ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 77. С. 5–10
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2012. Issue 77. P. 5–10

УДК 511.3

ПРО ВІДНОСНО-ПСЕВДОРЕГУЛЯРНІ СКРУТИ В КАТЕГОРІЇ ПОЛІГОНІВ НАД МОНОЇДОМ З НУЛЕМ

Юлія БІЛЯК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: jbilyak@ukr.net

Введено поняття T-псевдорегулярного S-полігону. Розглянуто теорії скруту, періодичні класи яких складаються з T-псевдорегулярних S-полігонів, де T – власний підмоноїд моноїда S. Описано відповідні квазіфільтри. Розглянуто питання про скінченну аксіоматизовність класу точних S-полігонів.

Ключові слова: T-псевдорегулярний полігон, теорія скруту, квазіфільтр, аксіоматизовний клас.

1. Вступ. Узагальнено деякі конструкції для полігонів, які вперше розглядав Кьюі [2] і продовжено вивчення скрутів у категорії полігонів. Людеман у 1983 р. [1] ввів поняття скруту в категорії лівих S-полігонів за аналогією з поняттям скруту у категорії R-модулів. Інші підходи до вивчення скрутів у категорії полігонів можна знайти в працях Занга, Гао, Шума (див. [3], [4]). Скрути в більш загальних категоріях полігонів розглядали Вігандт і Лекс.

В [2] Кьюі описав радикал, радикальний клас якого складається з усіх відносно-псевдорегулярних S-полігонів і описав відповідний квазіфільтр, були доведені його властивості.

Тут введено поняття відносно-псевдорегулярного S-полігону та описано теорії скрутів, радикальні класи яких визначаються як класи відносно-псевдорегулярних полігонів. Крім того, ми описуємо відповідні цим теоріям скруту квазіфільтри.

Остання частина праці присвячена проблемі аксіоматизовності класу точних S-полігонів. Скорняков Л.А. [5] в 1978 р. знайшов умови, за яких клас точних R-модулів скінченно аксіоматизовний. В останній частині за аналогією описано умови скінченної аксіоматизовності класу точних S-полігонів, які належать до класу відносно-псевдорегулярних полігонів.

2. Попередні дані. Нехай S мультиплікативна півгрупа з 0 і 1, $0 \neq 1$.

Означення 1. *Множину M назвемо лівим S-полігоном, якщо задано відображення* $\mu : S \times M \to M$,

$$(s,m) \to sm = \mu(s,m)$$

таке, що для всіх $s,t \in S$ *та* $m \in M$ $s(tm) = (st)m$.

Лівий S-полігон називають унітарним, якщо для всіх $m \in M$ виконується $1m = m$. Лівий полігон називають центрованим, якщо для довільних $m \in M$ та $s \in S$ правильне $0m = s0 = 0$. Категорію лівих S-полігонів позначаємо $S - Act$.

Означення 2. *Нехай* M, N *ліві* S*-полігони. Відображення* $f : M \to N$ *називають гомоморфізмом полігонів, якщо для всіх* $a \in S$ *та* $m \in M$ *виконується* $f(am) = af(m)$.

Відношення еквівалентності ρ на S ($\rho \subseteq S \times S$) називається лівою конгруенцією на S, якщо для всіх $x, y, z \in S$ з того, що $x\rho y$ випливає $zx\rho zy$. Сукупність всіх лівих конгруенцій на S позначаємо через $L(S)$.

Лівою конгруенцією на S-полігоні M називають відношення еквівалентності ρ на M ($\rho \subset M \times M$) таке, що $(x_1, x_2) \in \rho \Rightarrow (sx_1, sx_2) \in \rho$, $\forall s \in S$. Для кожного $a \in S$ визначаємо ρ-клас $\overline{a_\rho} = \{b \in S \mid \exists m \in M : (am, bm) \in \rho\}$. Також приймемо $(\rho : a) = \{(\lambda, \mu) \in \rho \mid \exists b \in M : (a\lambda = b\mu)\}$. Тотожну конгруенцію на M позначимо через id_M.

Нагадаємо ще одне означення, пов'язане з псевдорегулярними S-полігонами, яке введене у [2].

Означення 3. *Елемент* m S*-полігону* M *називають псевдорегулярним, якщо існує* $s \in S \setminus \{1\}$ *таке, що* $sm = m$. *Якщо в полігоні всі ненульові елементи псевдорегулярні, то його називають псевдорегулярним.*

Нехай T підмоноїд S, що не містить нуля.

Означення 4. *Елемент* m S*-полігону* M *називають відносно-псевдорегулярним* (T*-псевдорегулярним), якщо* $\exists t \in T \setminus \{1\} : tm = m$.

Множину всіх T-псевдорегулярних елементів позначають через M_{T_0}. S-полігон M називають T-псевдорегулярним, якщо $M = M_{T_0}$.

Приклад 1. Розглянемо моноїд S заданий таблицею Келі:

·	0	1	a	d	e
0	0	0	0	0	0
1	0	1	a	d	e
a	0	a	a	d	d
d	0	d	d	a	a
e	0	e	d	a	a

Розглянемо підмоноїд $T = \{1, a, d\}$ і множину $L = \{0, a, d\}$. Очевидно, що L є лівим T- псевдорегулярним S- полігоном.

Означення 5. *Під теорією скруту* τ *над* S *будемо розуміти впорядковану пару класів* S*-полігонів* (T_τ, F_τ) *для яких виконуються умови:*

1) $Hom_S(M,N) = 0, \forall M \in T_\tau, \forall N \in F_\tau$*;*
2) $Hom_S(M,N) = 0, \forall M \in T_\tau$*, то* $N \in F_\tau$*;*
3) $Hom_S(M,N) = 0, \forall N \in F_\tau$*, то* $M \in T_\tau$*.*

Означення 6. *Теорія радикала τ на S є спадковою теорією скруту, якщо клас T_τ є замкнутим стосовно підоб'єктів.*

Визначимо напередрадикал τ, задавши періодичний T_τ і напівпростий класи $\overline{T_\tau}$. Приймемо T_τ – клас всіх T-псевдорегулярних S-полігонів і $\overline{T_\tau}$ – клас тих S-полігонів, які не містять ненульових T-псевдорегулярних підполігонів.

Означення 7. *Систему лівих конгруенцій Q на S називають квазіфільтром S, якщо виконуються такі умови:*

1) якщо μ ліва конгруенція на S: $\rho \in Q$, $\rho \subseteq \mu$, то $\mu \in Q$;

2) якщо $\rho \in Q$, то $(\rho : a) \in Q$, $\forall a \in S$;

3) якщо μ ліва конгруенція, $\rho \in Q$ і $\forall (a, b) \in Q$ $(\mu : a) \in Q$ і $(\mu : b) \in Q$, то $\mu \in Q$.

3. Теорія скруту T-псевдорегулярних S-полігонів.

Теорема 1. *$\tau = (T_\tau, \overline{T_\tau})$ є спадковою теорією скруту.*

Доведення. Спочатку доведемо, що τ є теорією радикала. Припустимо, що існують $M \in T_\tau$, $N \in \overline{T_\tau} Hom_S(M, N) \neq 0$, тобто, що існує $f \in Hom_S(M, N)$. Тоді зрозуміло, що $f(M) = Im(f)$ є підполігоном в N. Для довільного $n \in f(M)$ існує $m \in M$ таке, що $f(m) = n$. M є T-псевдорегулярним S-полігоном, тому з того, що $m \in M$ існує елемент t з $T \setminus \{1\}$: $tm = m$. Звідси $n = f(m) = f(tm) = tf(m) = tn$, тобто, n є T-псевдорегулярним, як і всі елементи $f(M)$. Але $N \in \overline{T_\tau}$ і за визначенням не може містити ненульових T-псевдорегулярних підполігонів. Тому $f(M) = 0$, звідси f є нульовим відображенням.

Нехай N -лівий S-полігон і $Hom_S(M, N) = 0$ для всіх $M \in T_\tau$, треба довести, що $N \in \overline{T_\tau}$. Припустимо, що $N \notin \overline{T_\tau}$, тоді N містить ненульовий T-псевдорегулярний підполігон N'. Тому вкладення $i : N' \to N$ – ненульовий морфізм. Отримали суперечність. Тому $N \in \overline{T_\tau}$.

Нехай $Hom_S(M, N) = 0, \forall N \in F_\tau$, треба довести, що лівий S-полігон M лежить у класі T_τ. Розглянемо два випадки:

1) $M = 0$, то доводити нічого;

2) $M \neq 0$, тому M містить ненульовий T-псевдорегулярний підполігон M'. Справді, у протилежному випадку $M \in \overline{T_\tau}$, тому $Hom_S(M, M) = 0$. Звідси $M = 0$, а це суперечність. Приймемо $\Omega = \{L \in M \mid L \in T_\tau, L \neq 0\}$. $M' \in \Omega$, тому $\Omega \neq 0$. Зрозумілим є той факт, що Ω частково впорядкована й індуктивно впорядкована (кожна повністю впорядкована підмножина має верхню грань). Тоді за лемою Цорна Ω містить максимальний член $L \in \Omega$. Можемо припустити, що $L = M$.

Припустимо, що $M \neq l$, тоді $M/L \neq 0$ і нехай $\overline{M} = M/L \notin \overline{T_\tau}$ (у протилежному випадку ми отримали б $Hom(M, M/L) = 0$, звідки $M = 0$). Отже, M/L містить ненульовий T-псевдорегулярний підполігон $\overline{K}$, нехай $\overline{K} = K/L$ – T-псевдорегулярний підполігон для якого виконується умова $L \subset K \subseteq M$. Далі для довільного $x \in N \setminus L$ $(\overline{x} \neq 0)$ з того, що $\overline{N} \in T_\tau$ існує $t \in T \setminus \{1\}$: $t\overline{x} = \overline{x}$, тому $\overline{tx} = \overline{x}$, оскільки $x \notin L$, то $tx = x$. Звідси x – T-псевдорегулярний елемент, тому $N \in T_\tau$ і у підсумку $N \in \Omega$. Це суперечить максимальності L, тому $M/L \in \overline{T_\tau}$.

Розглянемо природний епіморфізм $\eta : M \to M/L$, він ненульовий, але $M/L \in \overline{T_\tau}$, тому $Hom_S(M, M/L) = 0$. Отже, $M = L \in T_\tau$.

Отже, τ є теорією радикала. Зрозумілим є той факт, що T_τ є замкненим стосовно підоб'єктів. Тому τ – теорія скруту. □

Якщо $\tau = (T_\tau, \overline{T_\tau})$ є теорією скруту, то з (2) $E_\tau = \{\rho \in L(S) \mid S/\rho \in T_\tau\}$ є відповідним квазіфільтром.

Нижченаведені теореми доведені для випадку, коли $S \setminus T$ скінченна. Варто також зауважити, що $|\rho| = \infty 1$ означає, що множина нескінченна.

Теорема 2. *Нехай* $\tau = (T_\tau, \overline{T_\tau})$ *є теорією скруту. Приймемо* $\chi = \{\rho \in L(S) \mid |\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty, \forall a \in S\}$ *і* $T = \{M \in S - Act \mid (id_M : m) \in \chi, \forall m \in M\}$.

Тоді:

1) $T_\tau = T$;

2) $C_\tau = \chi$.

Доведення. 2. $\rho \in \chi$ тоді і лише тоді, коли $\forall a \in S\ \exists t \in T$: $(t, 1) \in (\rho : a)$, а це означає, що $ta\rho a$. Це має зміст тоді і лише тоді, коли $S/\rho \in T_\tau$. Тому зрозуміло, що $C_\tau = \chi$.

1. Нехай $M \in T$, тоді $\forall m \in M (id_M : m) \in C_\tau$, звідси $|\overline{1_{(id_M:m)}}| = \infty|$. Це означає, що $\exists t \in T \setminus \{1\}$: $(t, 1) \in (id_M : m)$, тобто, $tm = m$. Отже, елемент m є T-псевдорегулярним і у підсумку $M \in T_\tau$.

Тепер нехай $M \in T_\tau$, тоді $\forall m \in M \forall a \in S \exists t \in T \setminus \{1\}$: $tam = am$. Звідси $(ta, a) \in (id_M : m)$, далі $(t, 1) \in ((id_M : m) : a)$. Отож, $||\overline{1_{((id_M:m):a)}}| = \infty|$, тобто, $(id_M : m) \in C_\tau$. Отже, $M \in T$. Теорему доведено. □

Теорема 3. *Нехай* S *– мультиплікативна півгрупа з* 0 *і* 1. *Введемо позначення* $S_T = \{b \in S | \exists t \in T \setminus \{1\} : ta = a\}$. *Тоді* $C_\tau = \{\rho \in L(S) || \overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty, \forall a \in S \setminus S_R\}$.

Доведення. $L(S)|S/\rho \in T_\tau\} = \{\rho \in L(S)||\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty, \forall a \in S \setminus S_R\}$.

Отже, нехай $\rho \in \{\rho \in L(S)|S/\rho \in T_\tau\}$, тому з попередньої теореми видно, що $|\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty, \forall a \in S \setminus S_R$. Тепер припустимо, що $\rho \in L(S)$ і $|\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty, \forall a \in S \setminus S_R$. Залишилося перевірити, що $|\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty \forall a \in S_R$. Нехай $a \in S_R$, тоді $\exists t \in T \setminus \{1\}$: $ta = a$. Звідси $(ta, a) \in id_S \subseteq \rho$, тоді $(s, 1) \in (\rho : a)$. Отож, $|\overline{1_{(\rho:a)}}| = \infty$, тому $\rho \in C_\tau$. Теорему доведено. □

4. Скінченна аксіоматизовність класу точних S-полігонів. Цей розділ присвячений умовам скінченної аксіоматизовності класу точних S-полігонів. Нехай S моноїд і M – унітарний лівий S-полігон. Через Δ позначатимемо тотожну конгруенцію на S.

Означення 8. *Лівим анулятором елемента* $m \in M$ *будемо розуміти множину* $Ann(m) = \{(s, t) \in S \times S | sm = tm\}$.

Відповідно лівим анулятором S-полігона M буде $Ann(M) = \{(s, t) \in S \times S \mid \forall m \in M sm = tm\}$.

Означення 9. *S-полігон M називають точним, якщо* $Ann(M) = \Delta$.

Тепер нагадаємо деякі основні поняття теорії моделей. Ми використовуємо мову ${}_SL$-мову лівих S- полігонів першого порядку. Множину всіх речень (замкнутих формул) мови, що є істинними в класі полігонів Ψ, називаємо теорією класу і позначаємо $Th(\Psi)$. Під моделлю теорії T розуміємо клас полігонів, для яких справджуються аксіоми з цієї теорії, позначаємо через $Mod(T)$. Клас називають аксіоматизованим, якщо $Mod(Th(\Psi)) = \Psi$. Аксіоматизований клас полігонів називають скінченно аксіоматизованим, якщо його можна задати скінченною кількістю формул.

Теорема 4. *Для моноїда S нижченаведені властивості еквівалентні:*
1) клас точних унітарних лівих S-полігонів скінченно аксіоматизований;
2) $\exists F \subseteq S \times S$ – скінченна множина така, що S-полігон M точний, якщо $\forall (a,b) \in F$ $\exists x \in M\colon ax \neq bx$;
3) $\exists T \subseteq (S \times S) \setminus \Delta$ – скінченна множина, що має непорожній перетин з усіма конгруенціями на S;
4) S – містить таку скінченну систему A мінімальних конгруенцій, що довільна нетотожна конгруенція на S містить хоч одну конгруенцію з A.

Доведення 1) ⇒2) Нехай Ψ – клас всіх точних лівих S-полігонів і нехай він описується скінченною системою аксіом U. Зрозуміло, що клас Ψ можна описати системою аксіом

$$U_{(\lambda,\mu)} = (\exists x(\lambda x \neq \mu x)), \quad (\lambda,\mu) \in S \times S.$$

Далі систему U можна вивести зі скінченної кількості аксіом з $\{U_{(\lambda,\mu)}\}$, наприклад, $\{U_{(\lambda_1,\mu_1)}, ..., U_{(\lambda_m,\mu_m)}\}$. Тому приймемо $F = \{(\lambda_1,\mu_1), ..., (\lambda_m,\mu_m)\}$.

2) $\Rightarrow$ 3) Нехай $\rho \subseteq S \times S$ – нетотожна конгруенція на S. Припустимо, що $\rho \cap F = \varnothing$. Розглянемо S/ρ як лівий S-полігон. Зрозуміло, що для всіх $(\lambda,\mu) \in F$ існує $\overline{x} \in S/\rho(\lambda\overline{x} = \mu\overline{x})$. Тому S/ρ – точний S-полігон, але $Ann(S/\rho)$ містить конгруенцію ρ. Отримали суперечність. Тому приймемо $T = F$.

3) $\Rightarrow$ 4) Нехай $T = \{(\lambda_1,\mu_1), ..., (\lambda_m,\mu_m)\}$. Приймемо $\rho_i = \rho(\lambda_i,\mu_i)$, де $\rho(\lambda_i,\mu_i)$ – головна конгруенція породжена (λ_i,μ_i).

Зрозумілий такий факт: якщо існують різні i,j: $\rho_i \subset \rho_j$, то система T без (λ_j,μ_j) не втратить своїх властивостей. Тому всі конгруенції ρ_i можна вважати попарно непорівняними. Якщо ρ нетотожна конгруенція на S, що міститься в деякому ρ_i, то з властивостей T отримаємо $(\lambda_i,\mu_i) \in \rho$. Звідси $\rho = \rho_i$. Отож, зрозуміло, що ρ_i – мінімальна конгруенція і можна прийняти $A = \{\rho_1, ..., \rho_m\}$.

4) $\Rightarrow$ 3) Множину T отримаємо, вибравши з кожної конгруенції по одній парі $(\lambda_i,\mu_i) \notin \Delta$.

3) $\Rightarrow$ 2) Нехай M – лівий S-полігон такий, що $\forall(\lambda,\mu) \in T$ $\exists x \in M$: $\lambda x \neq \mu x$. Припустимо, що M не є точним, тобто $Ann(M) \neq \Delta$. Тому $\exists(s,t) \in (S \times S) \setminus \Delta$ $\forall m \in M$: $sm = tm$. Зрозумілим є той факт, що $Ann(M)$ є конгруенцією, тому з (3) $\exists(\lambda,\mu) \in Ann(M) \cap T$: $\lambda x = \mu x$ $\forall x \in X$. Отримали суперечність.

2) $\Rightarrow$ 1) Випливає з побудови множини T.

Список використаної літератури

1. *Luedeman J.K.* Torsion theories and semigroup of quotients / *J.K. Luedeman* – Lecture Notes in Mathematics 998: Springer-Verlag, Berlin, New York, 1983.
2. *Qiu D.R.* Hereditary torsion theory of pseudoregular S-systems / *D.R. Qiu* // Semigroup Forum. – 2003. – Vol. 66, №1. – P. 131-139.
3. *Zhang R.Z.* Torsion theories and quasi-filters of right congruences / *R.Z. Zhang, W.M. Gao, F.Y. Xu* // Algebra Colloq. – 1994. – Vol. 1, №1. – P. 273-280.

4. *Zang R.Z.* Hereditary torsion classes of systems / *R.Z. Zang, K.P. Shum* // Semigroup Forum. – 1996. – Vol. 52. – P. 253-270.
5. *Скорняков Л.А.* Конечная аксиоматизируемость класса точных модулей / *Л.А. Скорняков* – Colloquium Mathematicum. – 1979. – Vol. 42. – С. 365-366.

Стаття: надійшла до редакції 20.07.2012
прийнята до друку 12.12.2012

ON RELATIVELY-PSEUDOREGULAR TORSIONS IN THE CATEGORY OF POLYGONS OVER MONOIDS WITH ZERO

Yuliya BILYAK

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: jbilyak@ukr.net

Introduced the concept of T-pseudoregular S-act. Considered torsion theories for which torsion classes contain all T-pseudoregular S-acts, where T is proper submonoid of monoid S. Described corresponding quasifilters. Considered the problem of finite axiomatizibility of class of faithful acts.

Key words: T-pseudoregular act, torsion theory, quasifilter, axiomatized class.

ОБ ОТНОСИТЕЛЬНО-ПСЕВДОРЕГУЛЯРНЫХ КРУЧЕНИЯХ В КАТЕГОРИИ ПОЛИГОНОВ НАД МОНОИДОМ С НУЛЕМ

Юлия БИЛЯК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: jbilyak@ukr.net

Введено понятие T-псевдорегулярного S-полигона. Рассмотрены теории кручения, периодические классы которых состоят из T-псевдорегулярных полигонов, где T – собственный подмоноид моноида S. Описаны соответствующие квазифильтры. Рассмотрен вопрос об конечной аксиоматизовности класса точных S-полигонов.

Ключевые слова: T-псевдорегулярный полигон, теория кручения, квазифильтр, аксиоматизовный класс.