

УДК 539.3

## ЗГИН ПЛАСТИНИ З КРУГОВИМ ОТВОРОМ ТА РАДІАЛЬНОЮ ТРІЩИНОЮ З УРАХУВАННЯМ ШИРИНИ ОБЛАСТІ КОНТАКТУ ЇЇ БЕРЕГІВ

**Віктор ОПАНАСОВИЧ, Микола СЛОБОДЯН, Василь БЕДРІЙ**

*Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розв'язано задачу про двосторонній згин ізотропної пластини з круговим отвором і наскрізною радіальною прямолінійною тріщиною, береги якої гладко контактують поблизу однієї з основ пластини. З використанням методів теорії функцій комплексної змінної та комплексних потенціалів розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків кутів повороту та горизонтальних переміщень на тріщині. Крайові умови на круговому отворі задовольняються аналітично. Побудовано графічні залежності контактної зусилля між берегами тріщини, коефіцієнтів інтенсивності моментів і зусиль.

*Ключові слова:* згин, пластина, круговий отвір, комплексні потенціали, контактний тиск, коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль.

**Вступ.** Пластинчасті елементи широко застосовують у машинобудуванні, авіаційній, будівельній, суднобудівельній та інших галузях техніки. Ці елементи з технічних міркувань можуть містити кругові отвори. Під час встановлення чи в процесі експлуатації у них можуть виникати тріщиноподібні дефекти. Під дією зовнішнього навантаження в пластинчастих елементах біля тріщиноподібних дефектів виникають високі концентрації напружень. Важливо знати, як ці дефекти будуть впливати на напружено-деформований стан і на міцність пластини при згині.

З фізичних міркувань зрозуміло, що за згину пластини береги тріщин будуть контактувати. Розв'язати задачу згину пластини з круговим отвором і тріщинами, береги яких контактують, у тривимірному формулюванні досить складно. Набагато простіше розв'язати таку задачу, використовуючи класичну теорію згину пластин і плоску задачу теорії пружності.

У працях [1-5] розв'язано задачі згину пластин з тріщинами, береги яких гладко контактують по лінії на одній із основ пластини. Вплив ширини області контакту тріщин на напружено-деформований стан пластини вивчали у [6-9]. В [10-13] розглянуто двосторонній згин пластини з коловою межею поділу матеріалів і прямолінійними тріщинами, береги яких гладко контактують по лінії на одній із основ пластини.

Мета нашої праці – дослідити вплив ширини області контакту тріщини на напружено-деформований стан ізотропної пластини з круговим отвором і радіальною тріщиною.

**Формулювання задачі.** Досліджено задачу про двовісний згин безмежної ізотропної пластини завтовшки  $2h$  з круговим отвором радіуса  $R$  та радіальною тріщиною завдовжки  $2l$ . Будемо користуватись декартовою системою координат

© Опанасович В., Слободян М., Бедрій В., 2012

$Oxy$  і полярними координатами  $r, q$  з полярною віссю  $Ox$ . Береги тріщини під дією розподілених згинальних моментів  $M_x^I$  і  $M_y^I$  на нескінченності приходять у гладкий контакт по області постійної ширини  $h_1$  поблизу верхньої основи пластини [8] (рис. 1). За рахунок контакту берегів тріщини розв'язок задачі подається у вигляді розв'язків двох задач: задачі згину пластини та плоскої задачі.

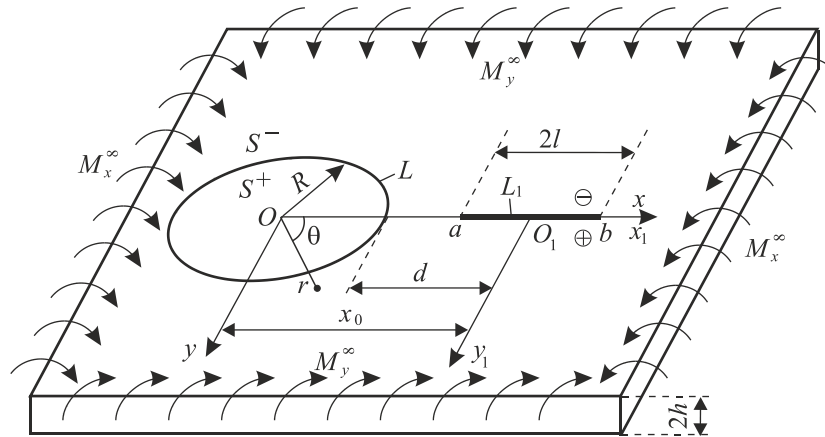


Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини

Задача розв'язана за таких крайових умов:

$$s_r = 0, s_{rq} = 0, M_r = 0, P_r = 0, \text{ на } L, \quad (1)$$

$$s_{yy}^\pm = -N/(2h), s_{xy}^\pm = 0, P^\pm = 0, M_y^\pm = M_y, x \in L_1, \quad (2)$$

$$M_y = bN, \int_x \int_y P_{BI}^\pm a \int_{xy}^2 \int_{BI}^2 w = 0, x \in L_1, \quad (3)$$

$$a = 0,5(1 + (1 - g)^2)h, b = (1 - g/3)h, g = h_1/h, \quad (4)$$

де  $N$  - контактний тиск між берегами тріщини;  $s_{xy}, s_{yy}, s_r$  і  $s_{rq}$  - компоненти тензора напружень;  $v_p$  - компонента вектора переміщень у плоскій задачі;  $w$  - прогин пластини в задачі згину;  $M_y$  і  $M_r$  - згинальний момент;  $P$  і  $P_r$  - узагальнені в сенсі Кірхгофа перерізувальні сили;  $\int_{BI}^2 f^\pm - \tilde{f}$ , значками "+" і "-" позначені граничні значення функції при прямуванні точки площини до тріщини при  $y_1 \in \pm 0$ .

**Розв'язок задачі.** З використанням комплексних потенціалів плоскої задачі [14] і класичної теорії згину пластин [15], аналогічно як у [10], розв'язок задачі зведений до задач лінійного спряження, на підставі яких отримано систему сингулярних

інтегральних рівнянь стосовно невідомих функцій стрибків кутів повороту нормалі до серединної площини у задачі згину  $Y(h)$  та стрибків переміщень на берегах тріщини у плоскій задачі  $G(h)$ , яка набула вигляду

$$\int_{-1}^1 \{K(h,x) + L(h,x)\} Y_1(h) dh - \frac{e^2 c \ddot{y}}{X^2} = c \ddot{y}, \quad x \in \left[ \frac{h}{X}, 1, \frac{1}{X} \right] \quad (5)$$

$$\int_{-1}^1 \{R(h,x) - S(h,x)\} G_2(h) dh = 0, \quad x \in \left[ \frac{h}{X}, 1, \frac{1}{X} \right] \quad (6)$$

$$\int_{-1}^1 \{L(h,x) - K(h,x)\} Y_2(h) dh + \frac{2b\eta_0}{p} \int_{-1}^1 \{R(h,x) + S(h,x)\} G_1(h) dh = P(x), \quad x \in \left[ \frac{h}{X}, 1, \frac{1}{X} \right] \quad (7)$$

де

$$P(x) = -\frac{R_0 l}{X^2} + A - \frac{B_0}{R_0 X^2} - \frac{B_0}{R_0 X^4} + \frac{A}{X^2} + \frac{2B_0 X^2 - 1}{R_0 X^4} + B_0 - \frac{R_0 l}{X^2},$$

$$K(h,x) = -\frac{1}{p} \frac{R_0}{h-x} + \frac{l}{2} \frac{2R_0}{X(TX-1)} + \frac{1}{R_0 T} \frac{1-T^2}{(TX-1)^2} + \frac{1}{R_0} \frac{(1-T^2)(2TX^3 - 3TX + 1)}{TX^2(1-TX)^3},$$

$$L(h,x) = \frac{l}{2p} \frac{T^2 - 1}{T(TX-1)^2} - \frac{1}{X(TX-1)} - \frac{1}{TX^2} + \frac{X^2(2TX-1) - 3TX + 2}{X^3(TX-1)^2},$$

$$R(h,x) = \frac{1}{h-x} + \frac{l}{2} \frac{2R_0}{X(TX-1)} + \frac{1-T^2}{T(TX-1)^2} + \frac{(1-T^2)(2TX^3 - 3TX + e^4) - TX(1-TX)^2}{TX^2(1-TX)^3},$$

$$S(h,x) = \frac{l}{2} \frac{1-T^2}{T(TX-1)^2} + \frac{1}{X(TX-1)} + \frac{1}{TX^2} - \frac{X^2(2TX-1) - 3TX + 2}{X^3(TX-1)^2},$$

$$A = -\frac{r+1}{4B^0(1+u)}, \quad B^0 = \frac{3+\nu}{1-\nu}, \quad k = \frac{3-u}{1+u}, \quad m = \frac{E}{2(1+u)},$$

$$B^0 = \frac{1-r}{2} m^0, \quad B^0 = \frac{2}{3(1-u^2)}, \quad m^0 = -\frac{1}{B^0(1-u)}, \quad r = \frac{M_x^I}{M_y^I},$$

$$l = l/R, \quad e = d/R, \quad T = 1 + e + lh, \quad X = 1 + e + lx,$$

$$y(x) E h^3 / M_y^I = Y(x) = Y_1(x) + i Y_2(x), \quad y(x) = (1 + B^0)^{-1} \int_{-1}^1 w_x + i \int_{-1}^1 w_y,$$

$$\frac{h^2 g \ddot{y}(x)}{M_y^I} = G(x) = G_1(x) + i G_2(x), \quad g \ddot{y}(x) = \frac{2m}{i(1+k)} \int_{-1}^1 (u_P + i v_P) dx,$$

$Y_1(x), Y_2(x), G_1(x), G_2(x)$  – дійсні функції;  $E$  – модуль Юнга;  $u$  – коефіцієнт Пуассона.

Зауважимо, що на підставі (3) функції  $G_1(h)$  і  $Y_2(h)$  пов'язані співвідношенням

$$G_1(h) + \frac{a(1+B^0)}{(1+k)(1+u)} Y_2(h) = 0, \quad h \in [-1, 1] \quad (8)$$

Рівняння (5)-(7) доповнюємо додатковими умовами

$$\int_{-1}^1 Y(h) dh = 0, \quad \int_{-1}^1 h Y_1(h) dh = 0, \quad (9)$$

які виражають, відповідно, однозначність кутів повороту та прогину пластини при обході контуру тріщини.

Для знаходження сталої  $c \ddot{y}$  використаємо однозначність прогину пластини при обході кругового отвору

$$c \ddot{y} = -\frac{1}{2p} \int_{-1}^1 \frac{l Y_1(h) dh}{T}. \quad (10)$$

Враховуючи умову однозначності переміщень при обході контуру тріщини, отримаємо

$$\int_{-1}^1 G(h) dh = 0. \quad (11)$$

Контактне зусилля між берегами тріщини обчислимо за формулою

$$N^*(x) = \frac{hN(x)}{M_y^I} = 2 \int_{-1}^1 \{R(h,x) + S(h,x)\} G_1(h) dh, \quad x \in \left[ -\frac{l}{R}, \frac{l}{R} \right]$$

Коефіцієнти інтенсивності моментів (КИМ)  $K = K_1 - iK_2$  та зусиль (КІЗ)  $k = k_1 - ik_2$  можна обчислити за формулами [16]

$$k = mh \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x)g'(x)), \quad f(x) = \sqrt{(l^2 - x^2)}/l,$$

$$K = m4Eh^3 (3 + u)(3(1 - u^2))^{-1} \lim_{x \rightarrow \pm l} (f(x)y'(x)).$$

**Числовий аналіз задачі та висновки.** Отримана система інтегральних рівнянь (5)-(11) розв'язана чисельно за допомогою методу механічних квадратур [17, 18] при  $u = 0.3$ ,  $g = h_1/h = 0.13$ .

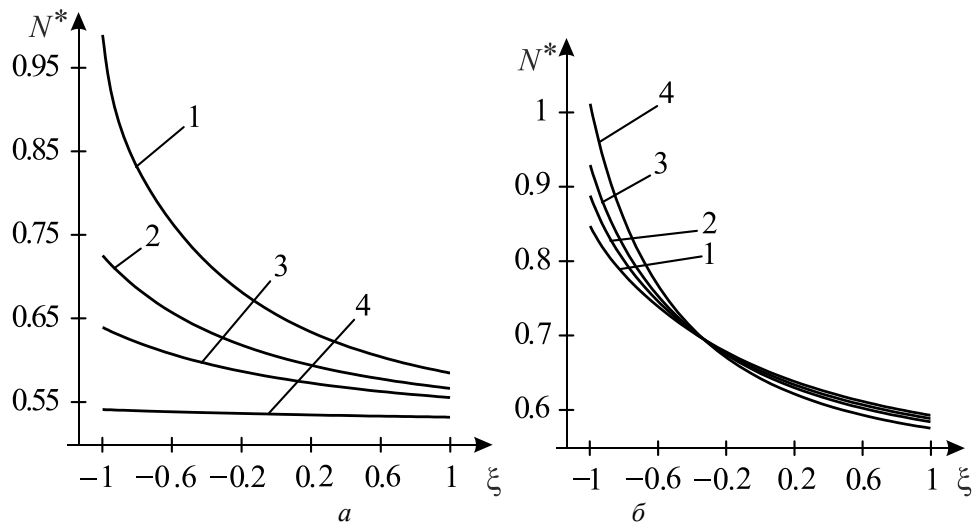


Рис. 2. Графічна залежність зведеного контактного зусилля між берегами тріщини

На рис. 2, *a* зображено графічну залежність зведеного контактного зусилля  $N^* = hN/M_y^I$  між берегами тріщини від безрозмірної координати  $x = x_1/l$  при  $l = l/R = 0.9$ ,  $r = M_x^I/M_y^I = 1$ . Крива 1 побудована при  $e = d/R = 1$ , крива 2 –  $e = 1.5$ , крива 3 –  $e = 2$ , крива 4 –  $e = 5$ . Як видно з цього рисунка, зі збільшенням відносної відстані  $e$  від центра тріщини до кругового отвору контактне зусилля між берегами тріщини зменшується, а при  $e \rightarrow \infty$  отримуємо результати [8].

На рис. 2 б зображено графічну залежність зведеного контактного зусилля  $N^* = hN/M_y^I$  між берегами тріщини від безрозмірної координати  $x = x_1/l$  при  $l = 0.8$ ,  $e = 1$ . Крива 1 побудована при  $r = 0$ , крива 2 –  $r = 1$ , крива 3 –  $r = 2$ , крива 4 –  $r = 4$ . Бачимо, що зі збільшенням відношення моментів  $r = M_x^I / M_y^I$  контактне зусилля у вершині  $a$  збільшується, а у вершині  $b$  – зменшується. З рис. 2 видно, що контактний тиск максимального значення набуває у ближній вершині тріщини стосовно кругового отвору.

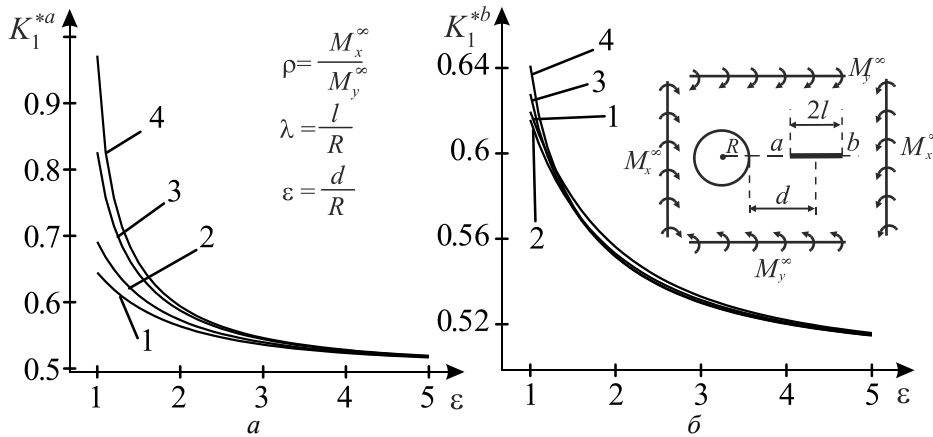


Рис. 3. Зведені коефіцієнти інтенсивності моментів

На рис. 3 показано графічну залежність зведеного коефіцієнта інтенсивності моментів (КІМ)  $K_1^* = K_1 / (M_y^I \sqrt{l})$  у вершині  $a$  (рис. 3, а) та у вершині  $b$  (рис. 3, б) від відносної відстані центра тріщини до кругового отвору  $e$  при  $r = 0.5$ . Криві 1 побудовані при  $l = 0.2$ , криві 2 –  $l = 0.5$ , криві 3 –  $l = 0.8$ , криві 4 –  $l = 0.9$ . З рис. 3 видно, що КІМ у вершині тріщини  $a$  є більшими, ніж у вершині  $b$ . Зі збільшенням відносної довжини тріщини  $l$  КІМ у вершині тріщини  $a$  збільшуються, а у вершині  $b$  майже не змінюються. При віддаленні тріщини від отвору КІМ у вершинах  $a$  та  $b$  тріщини зменшуються і прямують до однієї величини, яка відповідає випадку однієї ізольованої тріщини [8].

Числовий аналіз виявив, що береги тріщини будуть завжди контактувати. Коефіцієнти інтенсивності моментів і зусиль у ближній вершині тріщини стосовно отвору завжди більші, ніж в дальній вершині. При  $g = 0$  отримуємо результати роботи [10]. Крім того, між зведеним коефіцієнтом інтенсивності зусиль  $k_1^* = h k_1 / (M_y^I \sqrt{l})$  і коефіцієнтом інтенсивності моментів  $K_1^* = K_1 / (M_y^I \sqrt{l})$

існує залежність  $\frac{k_1^*}{K_1^*} = \frac{3a(1+u)}{(3+u)h}$ , а  $k_2^* = 0$  і  $K_2^* = 0$  при такому розміщенні тріщини стосовно отвору.

#### Список використаної літератури

1. *Шацький І.П.* Згин пластини, ослабленої розрізом з контактуючими берегами / І.П. Шацький // Доп. АН УРСР. Сер. А. Фізико-математичні та технічні науки. – 1988. – № 7. – С. 49-51.
2. *Young M.* Influence of crack closure on the stress intensity factor in bending plates / Young M., Sun C. // International Journal of Fracture. – 1992. – Vol. 55. – P. 81-93.
3. *Шацкий И.П.* Развитие модели контакта берегов трещины в изгибаемой пластине / И.П. Шацкий // Теоретическая и прикладная механика. – 2000. – № 31. – С. 91-97.
4. *Шацький І.* Задачі теорії пластин та оболонок із взаємопов'язаними крайовими умовами на розрізах / І. Шацький, В. Перепічка, Т. Даляк, А. Щербій // Матем. проблеми механіки неоднорідних структур: в 2-х т. Львів: Каменяр, 2000. – Т. 2, С. 51-54.
5. *Опанасович В.* Двовісний згин кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів із двома перпендикулярними тріщинами з урахуванням контакту їх берегів / В.К. Опанасович, І.С. Звізло, І.М. Яцик // Вісн. Дніпропетровського ун-ту, 2007. Механіка. Вип.11. Т. 2. № 2/2. С.141-148.
6. *Slepyan L.I.* Asymptotic solutions for crack closure in an elastic plate under combined extension and bending / L.I. Slepyan, J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman // Journal of the Mechanics and Physics of Solids. – 1995. – Vol. 43. – P. 1727-1749.
7. *Dempsey J.P.* Closure of a through crack in a plate under bending. / J.P. Dempsey, I.I. Shekhtman, L.L. Slepyan // International Journal of Solids and Structures. – 1998. – Vol. 35. – P. 4077-4089.
8. *Опанасович В. К.* Згин пластини з наскрізною прямолінійною тріщиною з урахуванням ширини області контакту її поверхонь / В.К. Опанасович // Наукові нотатки Луцького технічного університету. – 2007. – Вип. 20 (2). – С. 123–127.
9. *Опанасович В.* Визначення критичного навантаження за згину пластини Рейснера з наскрізними тріщинами та з урахуванням контакту їхніх берегів / В. Опанасович, І. Яцик // Механіка руйнування матеріалів і міцність конструкцій: наук. зб.; за заг. ред. В.В. Панасюка. – Львів: Фізико-механічний інститут ім. Г.В. Карпенка НАН України, 2009. – С. 155–160.
10. *Опанасович В.* Двосторонній згин пластини з круговим отвором та радіальною тріщиною з урахуванням контакту її берегів / В. Опанасович, М. Слободян // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 46-59.

11. *Опанасович В.К.* Двовісний згин пластини з круговим отвором і двома радіальними тріщинами, береги яких контактують / В.К. Опанасович, М.С. Слободян // Математичні методи та фізико-механічні поля. – 2006. – Т. 49. – № 3. – С. 106-119.
12. *Опанасович В.* Двовісний згин безмежної пластини з абсолютно жорсткою шайбою та тріщиною, береги якої контактують / В. Опанасович, М. Слободян // Вісник Львівського державного аграрного університету. – 2007. – № 8. – С. 75-87.
13. *Опанасович В.* Двосторонній згин ізотропної кусково-однорідної пластини з коловою межею поділу матеріалів та радіальною тріщиною з урахуванням контакту берегів / В. Опанасович, І. Звізло // Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій. Збірник наукових праць. Львів: Каменяр. – 2009. – Вип. 8. – С. 63-78.
14. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости / Н.И. Мусхелишвили – М.: Наука, 1966.
15. *Прусов И.А.* Метод сопряжения в теории плит / И.А. Прусов – Минск: Изд-во Белорус. ун-та, 1975.
16. *Саврук М. П.* Двумерные задачи упругости для тел с трещинами / М.П. Саврук – К.: Наук. думка, 1988.
17. *Панасюк В. В.* Распространение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацьшин – К.: Наук. думка, 1976.
18. *Сулим Г.Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим – Львів, 2007.



**ИЗГИБ ПЛАСТИНЫ С КРУГОВЫМ ОТВЕРСТИЕМ И РАДИАЛЬНОЙ ТРЕЩИНОЙ С УЧЕТОМ ШИРИНЫ ОБЛАСТИ КОНТАКТА ЕЕ БЕРЕГОВ****Виктор ОПАНАСОВИЧ, Николай СЛОБОДЯН, Василий БЕДРИЙ***Львовский национальный университет имени Ивана Франко,  
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Исследовано задачу об изгибе изотропной пластины с круговым отверстием и радиальной прямолинейной трещиной с учетом ширины области контакта ее берегов. Используя метод теории функций комплексного переменного и комплексные потенциалы плоской задачи и классической теории изгиба пластины, решение задачи сведено к системе сингулярных интегральных уравнений на трещине, которая решена численно. Проведен численный анализ задачи.

*Ключевые слова:* изгиб, пластина, круговое отверстие, комплексные потенциалы, контактное усилие, коэффициенты интенсивности моментов и усилий.

**BENDING OF THE PLATE WITH A CIRCULAR ORIFICE AND A RADIAL CRACK WITH THE WIDTH OF THE CONTACT AREA OF THE SHORES****Viktor OPANASOVYCH, Mykola SLOBODYAN, Vasil BEDRIY***Ivan Franco National University of Lviv,  
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine*

The bilateral bending of an isotropic plate with a circular orifice and a radial crack with considering of the contact it's shores is investigated. With application of methods of the theory of functions of complex variable and complex potentials the solution of a problem is shown to a system of integral equations, which is solved by numerical method with the help of method of mechanical quadratures. The numerical analysis of a problem is conducted, because of which are constructed of graphic dependence of contact pressure, coefficients intensity moment and efforts.

*Key words:* bilateral bending, isotropic plate, circular orifice, radial crack, two-dimensional problem of the theory of elasticity, classical theory of bend, complex potentials, contact pressure, coefficients intensity moment.

Стаття надійшла до редколегії 15.03.2012

Прийнята до друку 31.05.2012