

УДК 539.3

ДИНАМІЧНА ЗАДАЧА ТЕОРІЇ ПРУЖНОСТІ ДЛЯ ПРЯМОКУТНОЇ ПЛАСТИНКИ

Володимир ГУЦАЙЛЮК¹, Георгій СУЛИМ², Ігор ТУРЧИН²

¹Військова технічна академія імені Ярослава Домбровського,
буль. Генерала С. Каліського, 2 00908 Варшава, Польща

²Львівський національний університет імені Івана Франка,
буль. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

З використанням інтегрального перетворення Лапласа одержано розв'язок задачі теорії пружності про двовимірні коливання пластинки прямокутної форми. Розв'язок одержано у припущенні, що поверхня, де діє навантаження, частково защемлена.

Ключові слова: динамічна задача теорії пружності, позовжні коливання, інтегральне перетворення Лапласа.

Вивчення процесу швидкісного деформування матеріалів є важливим з огляду на широкі можливості його використання в інженерній практиці. Його треба враховувати при оцінюванні динамічної міцності конструкцій під дією імпульсних та ударних навантажень у технологічних умовах експлуатації та під час аварійних чи критичних ситуацій. Детальний аналіз процесу високошвидкісного деформування потрібний також для розробки параметрів технологічних процесів формоутворення та зміцнення елементів конструкцій з використанням високоінтенсивних джерел енергії. Визначальна особливість цих процесів – виявлення динамічних властивостей матеріалів [1], що стосується насамперед теоретичних основ матеріалознавства і, зокрема, дослідження явища утворення дисипативних структур при імпульсному підведенні енергії деформування [2].

Хоча означена проблема стосується складних, геометрично та фізично нелінійних моделей механіки [3], багато важливих закономірностей та ефектів, які передують процесу незворотного деформування, можна виявити та дослідити з використанням лінійної моделі теорії пружності [4].

Розглянемо прямокутну пластинку розміром $2h \times 2l$ по x_1 та y_1 , відповідно, де x_1 та y_1 – декартові координати. З моменту часу $t = 0$ пластинку навантажено нормальними зусиллями $p(t)$, прикладеними до її торців $x_1 = \pm l$, які нерухомо закріплені в напрямі осі y_1 . Граничні поверхні $y_1 = \pm h$ залишаються вільними від навантаження. Введемо у розгляд безрозмірні змінні та величини $x = x_1 / l$, $y = y_1 / l$, $t = c_1 t / l$, $x_0 = h / l$, $k^2 = c_1 / c_2 = (l + 2m) / m$, де c_1 , c_2 – швидкості поширення позовжніх і поперечних хвиль у матеріалі пластинки, l , m – пружні сталі.

© Гуцайлук В., Сулим Г., Турчин І., 2012

У термінах цих змінних, вважаючи, що до моменту часу $t = 0$ пластинка перебувала в стані спокою, задачу сформулюємо так:

$$\frac{\partial^2 q}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 q}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 q}{\partial t^2}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} = k^2 \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} - (k^2 - 1) \frac{\partial q}{\partial y}; \quad (2)$$

$$q = \frac{\partial q}{\partial t} = 0, \quad u_y = \frac{\partial u_y}{\partial t} = 0, \quad t = 0; \quad (3)$$

$$u_y(\pm 1, y, t) = 0; \quad s_{xx}(\pm 1, y, t) = \pm p(t); \quad (4)$$

$$s_{xx}(x, \pm y_0, t) = 0; \quad s_{xy}(x, \pm y_0, t) = 0, \quad (5)$$

де $q(x, y, t) = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y}$ – об'ємне розширення; $u_x(x, y, t)$, $u_y(x, y, t)$ – компоненти вектора пружного переміщення; $s_{ij}(x, y, t)$, $e_{ij}(x, y, t)$ – відмінні від нуля компоненти тензора напруження та тензора деформацій.

З умов (4), враховуючи, що $q(\pm 1, y, t) = \left. \frac{\partial u_x}{\partial x} \right|_{x=\pm 1}$, одержимо

$$m^{-1} s_{xx}(\pm 1, y, t) = k^2 q(\pm 1, y, t). \quad (6)$$

Застосуємо до рівняння (1) інтегральне перетворення Лапласа за часовою змінною t та скінчене перетворення Фур'є за змінною x . Враховуючи симетрію задачі, нульові початкові умови (3), співвідношення (6) та умови (4), замість рівняння (1), одержимо

$$\frac{d^2 \bar{q}_n}{dy^2} - (x_n^2 + s^2) \bar{q}_n = (-1)^{n+1} \frac{2x_n}{km} \bar{p}(s), \quad (7)$$

де $\bar{q}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \cos(x_n x) \int_0^\Gamma q(x, y, t) \exp(-st) dt dx$ – зображення за Лапласом і Фур'є, $x_n = p(2n + 1)/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$.

Трансформоване рівняння (2), відповідно, набуде вигляду

$$\frac{d^2 \bar{v}_n}{dy^2} - (x_n^2 + k^2 s^2) \bar{v}_n = (1 - k^2) \frac{d \bar{q}_n}{dy}, \quad (8)$$

$$\text{де } \bar{v}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \cos(x_n x) \int_0^{\Gamma} u_y(x, y, t) \exp(-st) dt dx.$$

Розв'язок рівняння (7), враховуючи, що $\bar{q}_n(y, s)$ є парною функцією змінної y , подамо у вигляді

$$\bar{q}_n(y, s) = A_n(s) \operatorname{ch}(g_1 y) + \frac{(-1)^n 2x_n \bar{p}(s)}{mk^2 g_1^2} \quad (9)$$

при $g_1 = \sqrt{x_n^2 + s^2}$.

З урахуванням (9) розв'язок рівняння (8) одержимо у вигляді

$$\bar{v}_n(y, s) = B_n(s) \operatorname{sh}(g_2 y) + \frac{g_1}{s^2} A_n(s) \operatorname{sh}(g_1 y) \quad (10)$$

при $g_2 = \sqrt{x_n^2 + k^2 s^2}$.

Іншу компоненту вектора пружного переміщення

$$\bar{u}_n(y, s) = \int_{-1}^1 \sin(x_n x) \int_0^{\Gamma} u_x(x, y, t) \exp(-st) dt dx \quad (11)$$

знайдемо, враховуючи співвідношення $\bar{u}_n = \frac{1}{x_n} \frac{\partial \bar{q}_n}{\partial y} - \frac{d\bar{v}_n}{dy}$ у вигляді

$$\bar{u}_n(y, s) = -B_n(s) x_n^{-1} g_2 \operatorname{ch}(g_2 y) - \frac{x_n}{s^2} A_n(s) \operatorname{ch}(g_1 y) + \frac{(-1)^n 2\bar{p}(s)}{mk^2 g_1^2}. \quad (12)$$

Величини $A_n(s)$ і $B_n(s)$ знайдемо з крайових умов (5), які в трансформантах за Лапласом і Фур'є та в термінах знайдених вище виразів набудуть вигляду

$$(k^2 - 2)\bar{q}_n + 2 \frac{d\bar{u}_n}{dy} = 0, \quad \frac{d\bar{u}_n}{dy} - x_n \bar{v}_n = 0, \quad y = \pm y_0. \quad (13)$$

Враховуючи вирази (10)-(12), з умов (13) знайдемо

$$A_n(s) = \frac{s^2(x_n^2 + g_2^2) \operatorname{sh}(g_2 y_0) \bar{p}_n(s)}{g_1^2 D(x, s)}, \quad B_n(s) = \frac{-2x_n^2 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \bar{p}_n(s)}{g_1 D(x, s)}. \quad (14)$$

Тут $\bar{p}_n(s) = \frac{(-1)^n 2x_n (k^2 - 2) \bar{p}(s)}{mk^2}$,

$$D(x,s) = 4x_n^2 g_1 g_2 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \operatorname{ch}(g_2 y_0) - (x_n^2 + g_2^2)^2 \operatorname{ch}(g_1 y_0) \operatorname{sh}(g_2 y_0).$$

За відомими $A_n(s)$ і $B_n(s)$ одержимо

$$\begin{aligned} \bar{u}_n(y,s) &= \frac{1}{(k^2 - 2)x_n} + \frac{x_n}{D} g_1 g_2 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \operatorname{ch}(g_2 y_0) - (x_n^2 + g_2^2) \operatorname{sh}(g_2 y_0) \operatorname{ch}(g_1 y_0); \\ \bar{v}_n(y,s) &= g_1^{-1} D^{-1} (x_n^2 + g_2^2) \operatorname{sh}(g_2 y_0) \operatorname{sh}(g_1 y_0) - 2x_n^2 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \operatorname{sh}(g_2 y_0). \end{aligned} \quad (15)$$

Обернення за Лапласом проведено з використанням теореми розвинення [6].
 Остаточно для довільної функції навантаження $p(t)$ отримали

$$\begin{aligned} u_x(x,y,t) &= \frac{4p^*}{m} - \frac{2}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-1)^n x_n x} \sum_{k=1}^{k_1} \frac{2g_1 g_2 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \operatorname{ch}(g_2 y_0) - (2x_n^2 - k^2 h_{n,k,1}^2) \operatorname{sh}(g_2 y_0) \operatorname{ch}(g_1 y_0)}{g_1^2 D_1^0(n,k)} f(h_{n,k,1}, t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{k_2} \frac{2g_1 g_2 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \cos(g_2 y_0) - (2x_n^2 - k^2 h_{n,k,2}^2) \sin(g_2 y_0) \operatorname{ch}(g_1 y_0)}{g_1^2 D_2^0(n,k)} f(h_{n,k,2}, t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2g_1 g_2 \sin(g_2 y_0) \cos(g_2 y_0) + (2x_n^2 - k^2 h_{n,k,3}^2) \sin(g_2 y_0) \cos(g_2 y_0)}{g_1^2 D_3^0(n,k)} f(h_{n,k,3}, t). \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} u_y(x,y,t) &= \frac{4p^*}{m} - \frac{2}{k^2} \sum_{n=0}^{\infty} e^{(-1)^n x_n x} \sum_{k=1}^{k_1} \frac{(2x_n^2 - k^2 h_{n,k,1}^2) \operatorname{sh}(g_2 y_0) \operatorname{sh}(g_1 y_0) - 2x_n^2 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \operatorname{sh}(g_2 y_0)}{g_1 D_1^0(n,k)} f(h_{n,k,1}, t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{k_2} \frac{(2x_n^2 - k^2 h_{n,k,2}^2) \sin(g_2 y_0) \operatorname{sh}(g_1 y_0) - 2x_n^2 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \sin(g_2 y_0)}{g_1 D_2^0(n,k)} f(h_{n,k,2}, t) + \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(2x_n^2 - k^2 h_{n,k,3}^2) \sin(g_2 y_0) \sin(g_2 y_0) - 2x_n^2 \sin(g_2 y_0) \sin(g_2 y_0)}{g_1 D_3^0(n,k)} f(h_{n,k,3}, t) \cos(x_n x). \end{aligned}$$

Тут $h_{n,k,1}$, $h_{n,k,2}$, $h_{n,k,3}$ – відповідно, додатні корені рівнянь

$$4x_n^2 g_1 g_2 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \operatorname{ch}(g_2 y_0) - (x_n^2 + g_2^2)^2 \operatorname{ch}(g_1 y_0) \operatorname{sh}(g_2 y_0) = 0 \quad (17)$$

при $g_1 = \sqrt{x_n^2 - h^2}$, $g_2 = \sqrt{x_n^2 - k^2 h^2}$, $0 < |h| < k^{-1} x_n$;

$$4x_n^2 g_1 g_2 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \cos(g_2 y_0) - (x_n^2 + g_2^2)^2 \operatorname{ch}(g_1 y_0) \sin(g_2 y_0) = 0 \quad (18)$$

при $g_2 = \sqrt{k^2 h^2 - x_n^2}$, $k^{-1} x_n < |h| < x_n$;

$$4x_n^2 g_2 \sin(g_2 y_0) \cos(g_2 y_0) + (x_n^2 + g_2^2)^2 \cos(g_2 y_0) \sin(g_2 y_0) = 0, \quad (19)$$

при $g_1 = \sqrt{h^2 - x_n^2}$, $|h| > x_n$;

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_1(n, k) \in \frac{dD}{ds} \Big|_{s=\pm h_{n,k,1}} &= \pm i h_{n,k,1} \left\{ 4x_n^2 \frac{\gamma g_2}{\kappa g_1} \operatorname{sh}(g_1 y_0) \operatorname{ch}(g_2 y_0) + \frac{k^2 g_1}{g_2} \operatorname{sh}(g_1 y_0) \operatorname{ch}(g_2 y_0) + \right. \\ &+ x_0 g_2 \operatorname{ch}(g_1 y_0) \operatorname{ch}(g_2 y_0) + k^2 y_0 g_1 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \operatorname{sh}(g_2 y_0) \Big|_{\text{БІ}} - 4k^2 (x_n^2 + g_2^2) \operatorname{ch}(g_1 y_0) \operatorname{sh}(g_2 y_0) - \\ &- (x_n^2 + g_2^2)^2 y_0 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \operatorname{sh}(g_2 y_0) / g_1 - (x_n^2 + g_2^2)^2 \frac{k^2 y_0}{g_2} \operatorname{ch}(g_1 y_0) \operatorname{ch}(g_2 y_0) \Big|_{\text{БІ}} \Big\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_2(n, k) \in \frac{dD}{ds} \Big|_{s=\pm h_{n,k,2}} &= m h_{n,k,2} \left\{ 4x_n^2 \frac{\gamma g_2}{\kappa g_1} \operatorname{sh}(g_1 y_0) \cos(g_2 y_0) - \right. \\ &- \frac{k^2 g_1}{g_2} \operatorname{sh}(g_1 y_0) \cos(g_2 y_0) + x_0 g_2 \operatorname{ch}(g_1 y_0) \cos(g_2 y_0) + k^2 y_0 g_1 \operatorname{r} \\ &\operatorname{sh}(g_1 y_0) \sin(g_2 y_0) \Big|_{\text{БІ}} - 4k^2 (x_n^2 - g_2^2) \operatorname{ch}(g_1 y_0) \sin(g_2 y_0) - \\ &- (x_n^2 - g_2^2)^2 y_0 \operatorname{sh}(g_1 y_0) \sin(g_2 y_0) / g_1 + (x_n^2 - g_2^2)^2 \frac{k^2 y_0}{g_2} \operatorname{ch}(g_1 y_0) \cos(g_2 y_0) \Big|_{\text{БІ}} \Big\}; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_3(n, k) \in \frac{dD}{ds} \Big|_{s=\pm h_{n,k,3}} &= m h_{n,k,3} \left\{ 4x_n^2 \frac{\gamma g_2}{\kappa g_1} \sin(g_1 y_0) \cos(g_2 y_0) + \right. \\ &+ \frac{k^2 g_1}{g_2} \sin(g_1 y_0) \cos(g_2 y_0) + y_0 g_2 \cos(g_1 y_0) \cos(g_2 y_0) - k^2 y_0 g_1 \sin(g_1 y_0) \operatorname{r} \\ &\operatorname{sin}(g_1 y_0) \Big|_{\text{БІ}} - 4k^2 (x_n^2 - g_2^2) \cos(g_1 y_0) \sin(g_2 y_0) - (x_n^2 - g_2^2)^2 \frac{y_0}{g_1} \sin(g_1 y_0) \sin(g_2 y_0) + \\ &+ (x_n^2 - g_2^2)^2 \frac{k^2 y_0}{g_2} \cos(g_1 y_0) \cos(g_2 y_0) \Big|_{\text{БІ}} \Big\}. \end{aligned}$$

Функції $f(h, t)$ обчислюють з використанням інтегральної згортки

$$f(h, t) = \int_0^t p(t-t) \sin(ht) dt. \quad (20)$$

Формули (16) дають точний замкнутий розв'язок динамічної задачі теорії пружності для прямокутної пластини за довільної залежності зовнішнього навантаження від часу. За одержаними компонентами вектора переміщення (16) компоненти тензора деформацій і тензора напружень обчислюють за формулами (6).

Розрахунок проводили для пластинки з алюмінієвого сплаву 2024-T3: $E = 6.9$ ГПа, $\nu = 0.3$, $r = 2.85$ г/см³ при $y_0 = 0.3$ та для часової залежності навантаження

$$p(t) = p^* (1 - \exp(-t_0 t))^2, \quad (21)$$

де p^* – розмірна величина (H / m^2); t_0 – безрозмірний параметр, який визначає час виходу зовнішнього навантаження на усталене значення. Вираз (21) дає змогу узгодити початкові та крайові умови, а також у багатьох випадках досить точно наблизити реальну залежність динамічного навантаження від часу.

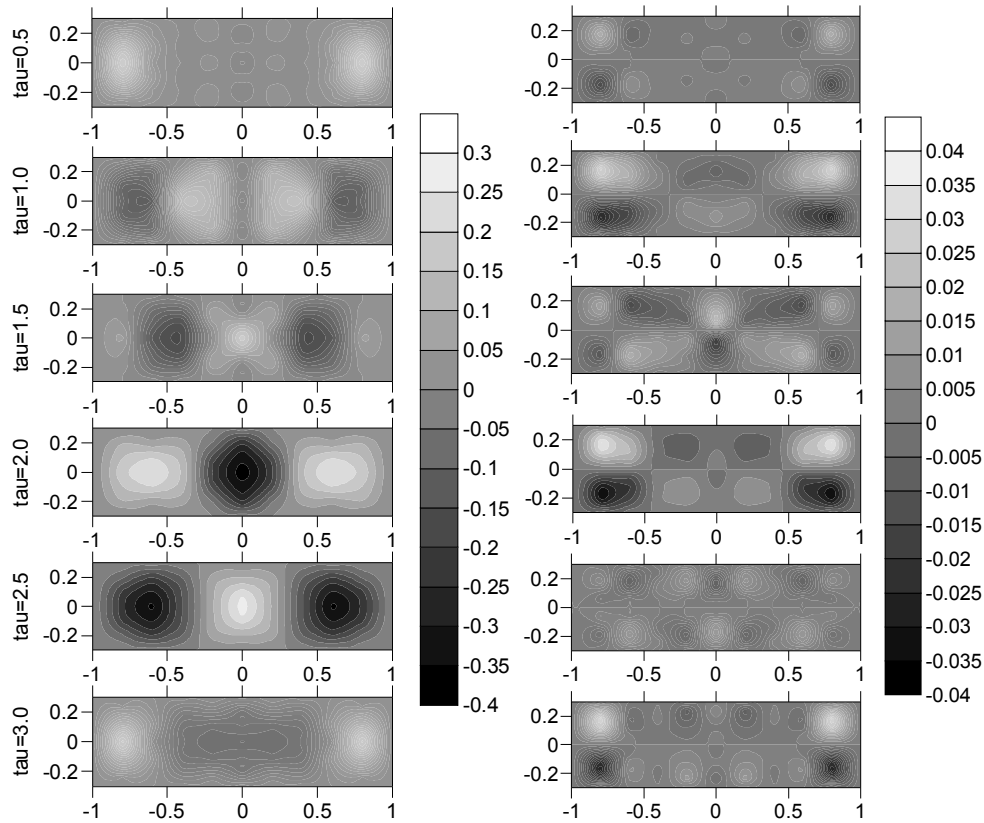


Рис. 1

Рис. 2

На рис. 1 показано розподіл у пластинці безрозмірних напружень $s_{yy}(x, y, t) / p^*$, а на рис. 2 – розподіл дотичних напружень $s_{xy}(x, y, t) / p^*$ у різні моменти часу при $t_0 = 5$. Як видно з наведеного, максимальні за модулем поперечні напруження під

час перехідного періоду досягають 40% від усталеного значення p^* для зовнішнього навантаження, а дотичні напруження лише 4%.

На рис. 3 зображено результати розрахунку напружень $s_{xx}(x,y,t)/p^*$ у пластинці, одержаних за формулами (16) (ліва частина рисунка) та розрахованих на підставі одновимірної моделі.

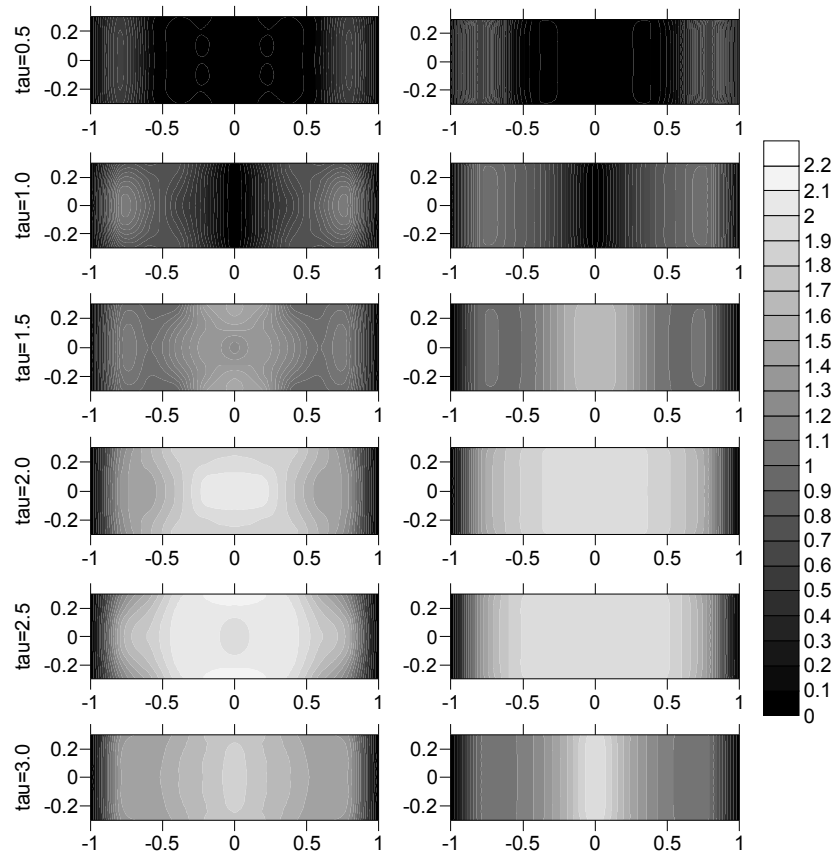


Рис. 3

Як видно з рисунка, похибка розрахунків, одержаних з використанням одновимірної моделі, не перевищує 10% порівняно з двовимірною. Це, враховуючи наведені вище результати для дотичних напружень, дає змогу при інженерних розрахунках використовувати значно простішу одновимірну модель.

Список використаної літератури

1. *Божидарник В.В.* Елементи теорії пружності / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим – Львів, 1994.
2. *Снеддон И.* Преобразования Фурье / И. Снеддон– М., 1955.
3. *Achenbach J.D.* Wave propagation in elastic solids / J.D. Achenbach – New York: Amer. Elsevier Publ. Co., 1973.
4. *Chausov M.G.* Laws of deformations processes and fracture of plastic steel from the point of view of dynamic overloading / M.G. Chausov, A.P. Pylypenko // *Mechanika*. – 2005. – **54**. – P. 24-29.
5. *Meleshko V.V.* Selected topics in the history of the two-dimensional biharmonic problem / V.V. Meleshko // *Appl. Mech. Rev.* – **56**, No 1. – P. 33-85.

**ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ
ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ПЛАСТИНЫ****Владимир ГУЦАЙЛЮК¹, Георгий СУЛИМ², Игорь ТУРЧИН²**¹*Военная техническая академия имени Ярослава Домбровского,
ул. Генерала С. Калиского, 2 00908 Варшава, Польша*²*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

С использованием интегрального преобразования Лапласа получено решение задачи теории упругости о двумерных колебаниях пластинки прямоугольной формы. Решение получено в предположении, что поверхность, на которой действует нагрузка, частично закреплена.

Ключевые слова: динамическая задача теории упругости, продольные колебания, интегральное преобразование Лапласа.

DYNAMIC PROBLEM OF ELASTICITY FOR A RECTANGULAR PLATE

Volodymyr HUTSAYLYUK¹, Heorgiy SULYM², Ihor TURCHYN²

¹*Military University of Technology
Gen. S. Kaliskiego str., 2 00908 Warsaw, Poland*

²*Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine*

Using the Laplace integral transformation we obtain a solution of the elasticity problem of two-dimensional oscillations of rectangular plates. The solution is obtained under the assumption that the loading surface is partially clamped.

Keywords: dynamic problem of elasticity, longitudinal oscillations, Laplace integral transformation.

Стаття надійшла до редколегії 25.01.2012

Прийнята до друку 31.05.2012

Publikacja wykonana w ramach realizacji projektu № N501 056740. Projekt został sfinansowany ze środków Narodowego Centrum Nauki.