ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76. С. 156-163
Visnyk of the Lviv University. Series Mech.-Mat. Issue 76. P. 156-163

УДК 539.3

ДО МЕТОДОЛОГІЇ ОПТИМІЗАЦІЇ ТЕПЛОВИХ РЕЖИМІВ І НАПРУЖЕНОГО СТАНУ В СКЛЯНОМУ ВИРОБНИЦТВІ

Євген ІРЗА

*Інститут прикладних проблем механіки і математики
ім. Я. С. Підстригача НАН України,
вул. Наукова, 3б 79060 Львів, Україна*

Запропоновано концепцію побудови методики оптимізації теплових режимів у скляному виробництві. Алгоритм розв'язування сформульованої екстремальної задачі будується за принципом поетапної параметричної оптимізації, а отримання розв'язку прямих задач ґрунтується на методі зважених залишків у поєднанні з методом кінцевих елементів. Запропоновану методику можна використовувати для параметричної оптимізації режимів гартування, відпалювання, зварки скляних тіл і забезпечення їхньої міцності.
Ключові слова: концепція і схема оптимізації, термообробка скляних виробів.

Підвищення ефективності технологічних процесів термообробки в скляному виробництві, якості виробів із скла, поліпшення їхніх експлуатаційних характеристик неможливе без оптимізації теплових режимів у технологічних процесах.

Багатоманітність технологічних процесів у скляному виробництві, різнокритеріальність показників якості готових виробів ускладнюють, а в багатьох випадках виключають можливість застосування експериментальних і ймовірно-статистичних методів оптимізації теплових режимів при термообробці. Згадані особливості теплових процесів у скляному виробництві обумовлюють використання системного підходу до розробки методики оптимізації теплових режимів у ньому за функціональними параметрами, зокрема, напруженнями та деформаціями.

Методика з оптимізації теплових режимів у процесах нагрівання-охолодження скляних тіл передбачає:

- математичне формулювання задачі з цільового оптимального керування;
- розробку числового алгоритму пошуку оптимального розв'язку;
- програмну реалізацію числового алгоритму.

Математичне формулювання задач з визначення оптимальних за цільовими критеріями теплових режимів у процесах нагрівання-охолодження скляних тіл охоплює такі етапи:

- вибір параметрів стану, формулювання математичних залежностей, які описують поведінку тіл, зокрема термомеханічну, за заданого теплового навантаження (вибір адекватної фізико-математичної моделі опису наявних фізико-механічних процесів);
- вибір математичного критерію оптимальності;
- вибір функцій керування, за допомогою яких досягається екстремум функціонала оптимізації;
- формування і математичний запис обмежень на параметри стану і функції керування.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Питання вибору моделі поведінки тіл при тепловому навантаженні є головним для аналізу термонапруженого стану тіл під дією теплового навантаження і для оптимізації теплових режимів термообробки за певними критеріями. Тому оптимізація теплових режимів неможлива без попереднього опрацювання уявлень про суттєві та несуттєві явища в термомеханічній поведінці скляних тіл під дією теплових навантажень у широкому діапазоні температур. Реальний об'єкт, який звільнений від несуттєвих особливостей, називають фізико-математичною моделлю. Вибір фізико-математичної моделі по суті неєдиний.

У деяких випадках декілька різних фізико-математичних моделей може бути запропоновано для опису поведінки вибраного об'єкта. Водночас одній фізико-математичній моделі може ставитися у відповідність багато різних об'єктів.

Розглянемо класичне формулювання задач з оптимального керування тепловими режимами в процесах термообробки. Суттєвий елемент формулювання задачі – вибір термомеханічної моделі поведінки вибраного об'єкта при тепловому навантаженні. Спочатку вибирають параметри стану. Для розглядуваних процесів термообробки типовими параметрами, які визначають термонапружений стан конструкції, є такі: t – температура; $\hat{\sigma}$ – тензор напружень; $\hat{\varepsilon}$ – тензор деформацій; $\vec{u}$ – вектор переміщень; $\vec{h}$ – вектор–функція теплового навантаження; $\vec{p}$ – вектор–функція силового навантаження і т.п.

Наступним важливим етапом є формулювання системи рівнянь

$$L_i\left(\vec{r}, t, t, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \vec{u}, \vec{h}, \vec{p}\right) = 0, \quad i = \overline{1,n}, \tag{1}$$

які зв'язують ці параметри з фізичними та геометричними параметрами тіла, і зовнішніми діями. Тут $\vec{r} = \vec{r}\left(x^1, x^2, x^3\right)$ – радіус-вектор точки в криволінійній системі координат $Ox^1x^2x^3$; t – біжучий час. Через L_i в (1) позначено інтегро-диференціальні оператори по просторових координатах x^i і часу t. Систему рівнянь (1) в загальному випадку можна розглядати як систему нелінійних інтегро-диференціальних рівнянь. Припускають, що крайові умови входять до системи (1).

Система рівнянь (1) за заданих теплових навантажень $\vec{h}$, зовнішньої силової дії $\vec{p}$ і параметрах конструкції повинна бути замкненою і визначати параметри стану, які характеризують термонапружений стан тіла. Визначення параметрів стану при заданому силовому навантаженні $\vec{p}$ і заданих функціях $\vec{h}$, які характеризують теплове навантаження, а в оптимізаційних задачах є функціями керування, будемо називати прямою задачею.

Вибір критерію оптимізації і відповідного функціонала, який реалізує цей критерій, відбувається, враховуючи основні цільові призначення процесу термообробки. В задачах оптимізації розглядаються функціонали двох типів: інтегральні функціонали

$$J_k = \int_t \int_\Omega f_k\left(\vec{r}, t, t, \hat{\sigma}, \hat{\varepsilon}, \vec{u}, \vec{h}, \vec{p}\right) d\Omega dt, \quad k = \overline{1,e}, \tag{2}$$

і локальні функціонали

$$J_k = \max_{\Omega,\tau} f_k\left(\vec{r}, t, \tau, \hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}, \vec{u}, \vec{h}, \vec{p}\right), \; k = \overline{1,e}. \tag{3}$$

Вибір функції керування $\vec{h}$ відбувається, враховуючи технологічні можливості керування наявними фізико-механічними процесами в конкретній технології термообробки.

Вимоги, які ставлять до якості виробів і параметрів технологічних процесів термообробки, приводять до обмежень, які накладають на змінні стану і технологічні умови процесу термообробки. Ці обмеження складаються з нерівностей, які записують так:

$$f_j\left(\vec{r}, t, \tau, \hat{\varepsilon}, \hat{\varepsilon}, \vec{u}, \vec{h}, \vec{p}\right) \le 0, \; j = \overline{1,l}. \tag{4}$$

Тут f_j – задані функції. Вибір обмежень на параметри стану і технологічні умови відбувається залежно від цілей термообробки.

Отож, задача оптимізації полягає у знаходженні функції керування $\vec{h}$, яка задовольняє умову мінімуму (максимуму) функціонала інтегрального типу (2) або функціонала локального типу (3), співвідношенням типу (1) (що називаються в'язями) і обмеженням типу (4).

Розробка числового алгоритму пошуку оптимального розв'язку складається з таких етапів:

- побудова алгоритму розв'язування прямих задач;
- побудова алгоритму розв'язування задачі оптимізації.

Алгоритм розв'язування прямих задач ґрунтується на числових методах. Оскільки система диференціальних рівнянь є нелінійною і геометрична конфігурація області, яку займає тіло, часто досить складна, то виникає потреба використання універсальних обчислювальних методів для розв'язування цього класу задач. Одним з таких методів є метод зважених залишків у поєднанні з кінцево-елементним підходом [1], який дає змогу отримувати наближені розв'язки сформульованих вище задач.

Схематично розглянемо суть цього методу. Якщо враховувати диференціальне рівняння $Lu - f = 0$ (L – диференціальний оператор) і наближений розв'язок шукати у вигляді

$$\bar{u} = \sum_{i=1}^{m} N_i u_i, \tag{5}$$

то отримаємо

$$L\bar{u} - f = R_{\Omega}. \tag{6}$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Тут $\bar{u}$ – наближений розв'язок; N_i – базові функції (функції форми); u_i – дискретні значення функції u в області Ω; R_Ω – похибка або залишок, яка залежить від координат точок із Ω.

Мінімальну похибку забезпечує умова [1]

$$\int_\Omega \left(L\bar{u} - f\right) W_l \, d\Omega = \int_\Omega R_\Omega W_l \, d\Omega = 0, \; l = \overline{1,m}, \tag{7}$$

де $\left\{W_l; \; l = \overline{1,m}\right\}$ – множина линійно-незалежних вагових функцій.

Тоді загальну вимогу збіжності $\bar{u} \to u$ при $m \to \infty$ можна записати в формі умови виконання рівності (7) для всіх l при $m \to \infty$.

Для більшої ефективності методу зважених залишків його поєднують з методом кінцевих елементів.

У розглядуваному підході алгоритм розв'язання прямих задач методом зважених залишків в поєднанні з методом кінцевих елементів враховує:

- дискретизацію області кінцевими елементами;
- апроксимацію невідомих функцій на елементі розбиття;
- отримання на цій підставі системи алгебричних рівнянь стосовно вузлових значень невідомих функцій у вузлах і алгоритм розв'язку цієї системи.

Процес дискретизації можна поділити на два етапи:

- розбиття області на елементи;
- нумерація елементів і вузлів.

Згідно з концепцією методу кінцевих елементів дискретизація області Ω відбувається на скінчене число n_e підобластей $\Omega^{(e)}$, які називаються кінцевими елементами (КЕ), отже, справджуюся такі властивості:

а) $\forall\, e, m : e = \overline{1,n_e}, \; m = \overline{1,n_e}, \quad \Omega^{(e)} \cap \Omega^{(m)} = \varnothing, \quad e \neq m$;

б) $\Omega = \bigcup_{e=1}^{n_e} \Omega^{(e)}$.

Рівномірне розбиття області, коли всі елементи мають однакову форму та розміри, практично не проводиться. Реальні поля зазвичай мають різні розподіли (градієнти), опис яких потребує різних розмірів КЕ.

Метод кінцевих елементів побудований на ідеї апроксимації неперервної функції (температури, переміщень тощо) на кінцевому числі підобластей, які називаються елементами.

Довільна скалярна функція t може бути апроксимована на елементі так [1]:

$$t^{(e)} = \sum_{i=1}^{m} N_i^{(e)} T_i^{(e)} = \begin{bmatrix} N_1^{(e)} & \ldots & N_m^{(e)} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1^{(e)} \\ \vdots \\ T_m^{(e)} \end{Bmatrix}, \tag{8}$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

де $N_i^{(e)}$ – базова функція елемента, яка називається функцією форми, причому $N_i^{(e)}=1$ у і-му вузлі та дорівнює нулю у всіх інших вузлах; $T_i^{(e)}$ – значення функції в і-му вузлі; m – кількість вузлів в елементі.

Векторна величина, наприклад, переміщення $\vec{u}$ визначається величиною і напрямом. Тому для таких величин у кожному вузлі треба визначати більше, ніж одну невідому (степінь свободи). В цьому випадку векторна величина подається через її компоненти, які розглядають як невідомі скалярні величини. В кожному вузлі буде одна, дві або три невідомі залежно від того, яку задачу розглядають (одновимірну, двовимірну чи тривимірну). Для тривимірного випадку векторну величину $\vec{u}=(u_1,u_2,u_3)$ подають як [1]

$$\begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & \ldots & N_m & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & \ldots & 0 & N_m & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & \ldots & 0 & 0 & N_m \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_{3m} \end{Bmatrix}, \tag{9}$$

де U_{3i-k} – значення k-ї компоненти в і-му вузлі.

Аналогічно векторна величина $\vec{u}$ подається для дво- і одновимірного випадків.

Застосування методу зважених залишків у поєднанні з методом кінцевих елементів до (7) приводить до залежності [1]

$$\sum_{i=1}^{n_e} \int_{\Omega^{(i)}} \left[W^{(i)}\right]^T \left(L u^{(i)} - f\right) d\Omega = 0, \tag{10}$$

де $u^{(i)}$ – шукана величина, яка апроксимується на довільному кінцевому елементі співвідношенням

$$u^{(i)} = \left[N^{(i)}\right]\left\{U^{(i)}\right\} = \left[N_1^{(i)} \ldots N_m^{(i)}\right] \begin{Bmatrix} U_1^{(i)} \\ \vdots \\ U_m^{(i)} \end{Bmatrix}. \tag{11}$$

Тут m – кількість вузлів елемента; n_e – загальна кількість елементів, на які поділена вся область *Ω*, $\left(\sum_{i=1}^{n_e} \Omega^{(i)} = \Omega\right)$; $\left[N^{(i)}\right] = \left[N_1^{(i)} \ldots N_m^{(i)}\right]$ – матрична стрічка функцій форми і-го елемента; $\left\{U^{(i)}\right\}$ – вектор-стовпець значень функції u у вузлах елемента; $\left[W^{(i)}\right] = \left[W_1^{(i)} \ldots W_m^{(i)}\right]$ – матрична стрічка лінійно незалежних вагових функцій і-го елемента; T – індекс транспонування.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Підставляючи в (10) вираз (11) для $u^{(i)}$, бачимо, що система рівнянь методу зважених залишків зводиться до системи алгебричних рівнянь для невідомих $\{U\}$ значень функції у вузлах розбиття. Отриману систему можна записати в загальному вигляді як [1]

$$[K]\{U\} = \{F\}. \tag{12}$$

Тут $\{U\} = \left[U_1 .... U_{n_b}\right]^T$; n_b – кількість вузлів; $[K] = \sum_{e=1}^{n_e} \left[K^{(e)}\right]$ – глобальна матриця жорсткості; $\left[K^{(e)}\right]$ – матриця жорсткості елемента розбиття; $\{F\} = \sum_{e=1}^{n_e} \left\{F^{(e)}\right\}$ – вектор навантаження; $\left\{F^{(e)}\right\}$ – вектор навантаження елемента розбиття.

Матриця $[K]$ і вектор $\{F\}$ мають конкретний вигляд залежно від порядку диференціального оператора L. Система алгебричних рівнянь (12) є нелінійною і може бути розв'язана за допомогою відповідного ітераційного методу [2].

Розв'язок сформульованої екстремальної задачі будуємо на основі принципу поетапної параметричної оптимізації. В рамках запропонованого підходу проводять дискретизацію по часу з кроком Δt_n тривалості процесу термообробки. Оптимальний розв'язок функції керування на проміжку часу $\left[t_n, t_{n+1}\right]$ шукаємо на множині кусково-лінійних або кусково-постійних функцій. Значення h_{n+1} функції керування h в момент часу t_{n+1} знаходимо за формулою

$$h_{n+1} = h_n + a_n \Delta t_n \text{ або } h_{n+1} = b_n , \tag{13}$$

де a_n , b_n – шукані параметри, які міняються в заданих границях.

Отож, мінімізація функціоналів J_k на проміжку часу $\left[t_n, t_{n+1}\right]$ зводиться до задачі нелінійного програмування пошуку мінімуму відповідної функції однієї змінної $J_k = J_k\left(a_n\right)$ або $J_k = J_k\left(b_n\right)$ (аргументом якої є параметр a_n або b_n). Параметр a_n або b_n шукають шляхом перебору з множини значень його зміни на основі інформації про величину критерію оптимізації (яку отримують з розв'язку прямої задачі на проміжку часу $\left[t_n, t_{n+1}\right]$) у разі виконання заданих обмежень. Траєкторія функції керування є ламаною (рис. 1) і добре апроксимує неперервну траєкторію, знаходження якої пов'язано зі значними математичними труднощами методичного характеру. Такий метод пошуку оптимальної зміни функції керування називають "київський вінік" [2].

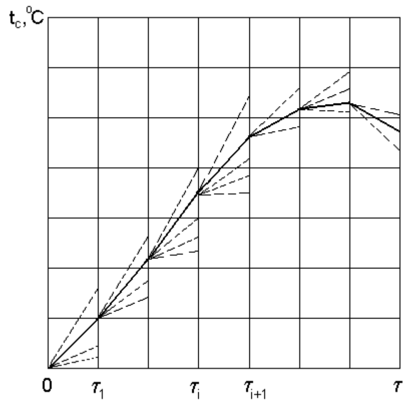

Рис. 1. Числова реалізація алгоритму пошуку оптимальної зміни функції керування методом “київський віник”

Запропоновану методику з оптимального керування тепловими режимами в процесах термообробки можна використовувати при параметричній оптимізації режимів гартування, відпалювання, зварки скляних тіл і забезпечення їхньої міцності.

Список використаної літератури

1. *Zienkiewicz O.C.* Finite Element Method / O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor. – Vol 1. The Basis. – London: Butterwoth Heinemann, 2000.
2. *Химмельбау Д.* Прикладное нелинейное программирование / Д. Химмельбау. – М.: Мир, 1975.

К МЕТОДОЛОГИИ ОПТИМИЗАЦИИ ТЕПЛОВЫХ РЕЖИМОВ И НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В СТЕКОЛЬНОМ ПРОИЗВОДСТВЕ

Евгений ИРЗА

Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Подстригача НАН Украины,
ул. Научная, 3б 79060 Львов, Украина

Предложено концепцию построения методики оптимизации тепловых режимов в стекольном производстве. Алгоритм решения сформулированной экстремальной задачи строится по принципу поэтапной параметрической оптимизации, а получение решения прямых задач основывается на методе взвешенных остатков в сочетании с методом конечных элементов. Предложенную методику можно использовать при

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

параметрической оптимизации режимов закалки, отжига, сварки стеклянных тел и обеспечения их прочности.

Ключевые слова: концепция и схема оптимизации, термообработка стеклянных изделий.

TO METHODOLOGY OF OPTIMIZATION THERMAL CONDITIONS AND STRESS STATE IN GLASS INDUSTRY

Yevgen IRZA

Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Ukrainian National Academy of Sciences
Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine

The work proposes a concept of construction the technique of thermal conclusions optimization in glass industry. In addition an algorithm of solution the formulated extreme problem is constructed on the basis of the principle of step-by-step parametric optimization and obtaining the solution of direct problems is based on the method of the finite elements method. The technique proposed can be used for parameter optimization of hardening modes, annealing welding of glass bodies for ensuing their strength.

Key words: the concept and the circuit of optimization, heat treatment of glass products.

Стаття надійшла до редколегії 16.02.2012
Прийнята до друку 31.05.2012

Робота виконана за часткової фінансової підтримки в рамках проекту Ф41.2/001