ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76. С. 109-118
Visnyk of the Lviv University. Series Mech.-Mat. Issue 76. P. 109-118

УДК 517.956

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ДЛЯ НАВАНТАЖЕНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ НАПІВЛІНІЙНИХ РІВНЯНЬ З ГОРИЗОНТАЛЬНИМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ольга ПЕЛЮШКЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

Розглянуто розв'язність мішаної задачі для навантаженої напівлінійної гіперболічної системи рівнянь першого порядку з горизонтальними характеристиками. Методом характеристик задача зведена до системи інтегро-операторних рівнянь Вольтерра другого роду, для якої за допомогою теореми Банаха про стискуюче відображення визначено достатні умови існування глобального неперервного розв'язку задачі.
Ключові слова: гіперболічна система, метод характеристик, напівлінійні рівняння, теорема Банаха.

Вступ. Незважаючи на свій півторастолітній розвиток, у теорії гіперболічних рівнянь і систем виникають нові задачі. До таких задач варто зачислити і мішані задачі для гіперболічних систем рівнянь першого порядку з двома незалежними змінними, в яких можуть бути вироджені (горизонтальні або вертикальні) характеристики.

Ці задачі є цікавими, оскільки вони з'являються в проблемах з малим параметром у вироджених випадках [1, 2]. Крім того, задачі з горизонтальними характеристиками (вертикальними) є математичними моделями багатьох процесів фізики, механіки, гідро- та газодинаміки, біології тощо [3, 4]. Проблема вироджених характеристик виникає також при зведенні гіперболічних систем квазілінійних рівнянь до канонічної форми Шаудера (характеристична канонічна форма) [5].

Використовуючи підхід, запропонований в [6], ми побудуємо єдиний розв'язок мішаної задачі для гіперболічної системи напівлінійних навантажених рівнянь з горизонтальними характеристиками у всій розглядуваній області. Запропоновано метод, який допоможе уникнути відомої проблеми про те, що в мішаних задачах для гіперболічних систем виникають особливості (лінії розриву) навіть для гладких вихідних даних, у випадку побудови неперервних розв'язків для всіх $t > 0$ [5].

Формулювання задачі. В області $G = \{(x,t) : 0 < t < T, -kt < x < kt + l\}$, T, k, l – додатні сталі, розглядаємо систему рівнянь

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \Lambda(x,t)\frac{\partial u}{\partial x} =$$
$$= f(x,t,u(x,t),v(x,t),u(-kt,t),v(-kt,t),u(kt+l,t),v(kt+l,t)),$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\frac{\partial v}{\partial x} = g(x,t,u(x,t),v(x,t),u(-kt,t),v(-kt,t),u(kt+l,t)), \tag{1}$$

де $u = (u_1,\dots,u_m)^T$, $f = (f_1,\dots,f_m)^T$, $v = (v_1,\dots,v_n)^T$, $g = (g_1,\dots,g_n)^T$, $\Lambda(x,t) = $ $= diag(\lambda_1(x,t),\dots,\lambda_m(x,t))$.

Для системи (1) задамо початкові умови

$$u(x,0) = q(x), (q = (q_1,\dots,q_m)), \ 0 \le x \le l. \tag{2}$$

Визначимо множини індексів

$$I_0 = \{i \in \{1,\mathrm{K},m\} : \lambda_i(0,t) > -k\},\ I_l = \{i \in \{1,\mathrm{K},m\} : \lambda_i(l,t) < k\}$$

та запишемо крайові умови у вигляді

$$\begin{aligned} u_i(-kt,t) &= \gamma_i^0(t,(u(-kt,t))_{s\notin I_0}), \quad i \in I_0, \\ u_i(l+kt,t) &= \gamma_i^l(t,(u(l+kt,t))_{s\notin I_l}), \ i \in I_l, \end{aligned} \tag{3}$$

$$v(-kt,t) = \psi(t,(u(-kt,t))_{s\notin I_0}), \ (\psi = (\psi_1,\dots,\psi_n)). \tag{4}$$

Нехай множини I_0, I_l містять відповідно r_0 та r_l елементів. Вважатимемо, що всі задані функції

$$f : \overline{G} \times R^{3m+3n} \to R^m, g : \overline{G} \times R^{3m+2n} \to R^n, \lambda_i : \overline{G} \to R^m, q : [0,l] \to R^m,$$

$$\gamma^0 : [0,T] \times R^{r_l} \to R^{r_0}, \gamma^l : [0,T] \times R^{r_0} \to R^{r_l}, \ \psi : [0,T] \times R^{r_l} \to R^n$$

є неперервними, а функції λ_i, крім того, задовольняють умову Ліпшиця за змінною x. Також виконується співвідношення

$$(\lambda_i(-kt,t)+k)(\lambda_i(l+kt,t)-k) \ne 0, \quad t \in [0,T], \quad i \in \{1,\mathrm{K},m\}.$$

Глобальна розв'язність задачі. Позначимо через $\phi_i(t;x_0,t_0)$, $i \in \{1,\mathrm{K},m\}$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt} = \lambda_i(x,t), \ x(t_0) = x_0$$

і назвемо їх характеристиками системи (1). Для зручності введемо позначення $\phi_i(t) := \phi_i(t;x_0,t_0)$. Через $\chi_i(x_0,t_0)$ позначимо найменше t, для якого в $\overline{G}$ визначений розв'язок $x = \phi_i(t;x_0,t_0)$. Крім того, зазначимо, що

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

другий блок системи (1) має також сім'ю горизонтальних характеристик вигляду $t = t_0$.

Введемо області

$$G_q^i = \{(x,t) \in G : \chi_i(x,t) = 0\},\ i \in \{1,\mathrm{K},m\},$$
$$G_0^i = \{(x,t) \in G : \chi_i(x,t) > 0,\ \phi_i(\chi_i(x,t);x,t) = -k\chi_i(x,t)\},\ i \in I_0,$$
$$G_l^i = \{(x,t) \in G : \chi_i(x,t) > 0,\ \phi_i(\chi_i(x,t);x,t) = l + k\chi_i(x,t)\},\ i \in I_l.$$

Проінтегрувавши рівняння системи (1) вздовж відповідних характеристик, зведемо задачу (1)–(4) до системи інтегро-операторних рівнянь

$$\begin{gathered} u_i(x,t) = F_i[w](x,t) + \\ + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} f_i(\phi_i(\tau),\tau,u(\phi_i(\tau),\tau),v(\phi_i(\tau),\tau),u\left(-k\tau,\tau\right), \\ v\left(-k\tau,\tau\right),u\left(k\tau+l,\tau\right),v\left(k\tau+l,\tau\right))d\tau,\ i \in \{1,\mathrm{K},m\}, \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{gathered} v_j(x,t) = \psi_j(t,u(-kt,t)) + \\ + \int\limits_{-kt}^{x} g_j(y,t,u(y,t),v(y,t),u(-kt,t),v(-kt,t),u(kt+l,t))dy,\ j \in \{1,\mathrm{K},n\}, \end{gathered} \tag{6}$$

де

$$F_i[w](x,t) = \begin{cases} q_i(\phi_i(0;x,t)), & (x,t) \in G_q^i, \\ \gamma_i^0(\chi_i(x,t),u(-k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))), & (x,t) \in G_0^i, \\ \gamma_i^l(\chi_i(x,t),u(l+k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))), & (x,t) \in G_l^i. \end{cases} \tag{7}$$

Означення. Узагальненим неперервним розв'язком задачі (1)–(4), будемо називати пару вектор-функцій (u,v), компоненти яких належать простору $C(\overline{G})$ і задовольняють систему інтегро-операторних рівнянь (5)–(6).

Теорема. Нехай виконуються такі умови:

– $\lambda, f, g, q, \psi, \gamma^1, \gamma^2$ – неперервні вектор-функції на відповідних множинах;

– компоненти вектор-функції λ є ліпшицевими на множині $\overline{G}$ за змінною x;

– компоненти вектор-функцій $f, g, q, \psi, \gamma^1, \gamma^2$ є ліпшицевими за змінними u, v на відповідних множинах;

– правильне співвідношення

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$(\lambda_i(-kt,t)+k)(\lambda_i(l+kt,t)-k)\neq 0,\quad t\in[0,T],\quad i\in\{1,\mathrm{K},m\};$$

– справджується умова погодження

$$\begin{aligned} q_i(0) &= \gamma_i^0(0,q(0)), \quad i\in I_0,\\ q_i(l) &= \gamma_i^l(0,q(l)), \quad i\in I_l. \end{aligned}$$

Тоді існує єдиний узагальнений неперервний розв'язок задачі (1)–(4) у $\overline{G}$.

Доведення. Розглянемо простір Q, пар неперервних функцій $w=(u,v)$ ($u:G\to R^m, v:G\to R^n$), позаяк виконуються умови

$$\begin{aligned} u_i(0,0) &= q_i(0),\ i\in I_0,\\ u_i(l,0) &= q_i(l),\ i\in I_l. \end{aligned}$$

Нехай $\{w^1,w^2\}\in Q$, тоді метрику на елементах простору Q визначимо як

$$\begin{aligned} \rho(w^1,w^2) = \max\{&\max_{i,x,t}|u_i^1(x,t)-u_i^2(x,t)|\,\alpha_i(x,t)e^{-at};\\ &\max_{i,x,t}|v_i^1(x,t)-v_i^2(x,t)|\,\beta_i(x,t)e^{-at}\}, \end{aligned} \tag{8}$$

де сталу $a>0$ і неперервні додатні функції α_i, β_i підберемо пізніше.

На елементах простору Q введемо оператор $A=\left(A^1,A^2\right)$, який діє за формулою $A[w]=(A^1[u,v],A^2[u,v])$, де оператори A^1 і A^2 визначені, відповідно, правими частинами рівностей (5), (6) (те, що ці оператори переводять неперервні функції в неперервні, випливає з відомих теорем математичного аналізу, а також із неперервності функцій $\phi_i(\tau;x,t)$ та $\chi_i\left(x,t\right)$ за всіма аргументами). Отже, пара функцій $\left(u,v\right)$ є неперервним узагальненим розв'язком задачі (1)–(4) тоді і тільки тоді, коли $w=\left(u,v\right)$ є нерухомою точкою оператора A.

Нехай $w^1\in Q, w^2\in Q$. Тоді з формули (8) при всіх допустимих i, x, t одержимо

$$|u_i^1(x,t)-u_i^2(x,t)|\le\frac{\rho(w^1,w^2)}{\alpha_i(x,t)}e^{at},\qquad |v_i^1(x,t)-v_i^2(x,t)|\le\frac{\rho(w^1,w^2)}{\beta_j(x,t)}e^{at}.$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Через L позначимо спільну сталу в умові Ліпшиця для функцій $f, g, \psi, \gamma^0, \gamma^l$, яку запишемо, наприклад, так:

$$|f_i(x,t,u^1,v^1) - f_i(x,t,u^2,v^2)| \le L\max\{\max_{j,x,t}|u_j^1 - u_j^2|, \max_{j,x,t}|v_j^1 - v_j^2|\}$$

і аналогічно для інших функцій.

Знайдемо коефіцієнт стиску оператора A, для цього виконаємо такі оцінки. Нехай $w^1, w^2 \in Q$. Тоді з (7) отримаємо нерівність

$$|F_i[w^1](x,t) - F_i[w^2](x,t)| \le \begin{cases} L\max\limits_{j\notin I_0}\dfrac{\rho(w^1,w^2)}{\alpha_j(-k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))}e^{a\chi_i(x,t)}, & (x,t)\in G_0^i, \\ L\max\limits_{j\notin I_l}\dfrac{\rho(w^1,w^2)}{\alpha_j(l+k\chi_i(x,t),\chi_i(x,t))}e^{a\chi_i(x,t)}, & (x,t)\in G_l^i. \end{cases} \quad (9)$$

Нехай $\Lambda = \max\limits_{i,x,t}|\lambda_i(x,t)|$, тоді для кожного $(x,t)\in\overline{G}$ одержимо оцінки [6] $\chi_i(x,t) \le \dfrac{-x+\Lambda t}{\Lambda+k}$, $i\in I_0$, аналогічно, для $i\in I_l$ маємо $\chi_i(x,t)\le\dfrac{x+\Lambda t-l}{\Lambda+k}$.

На підставі отриманих оцінок для оператора A^1 одержимо

$$\left|\left(A_i^1\left[w^1\right](x,t)\right) - \left(A_i^1\left[w^2\right](x,t)\right)\right|\alpha_i(x,t)e^{-at} \le$$

$$\le L\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0,\sigma}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\left(\frac{-x+\Lambda t}{\Lambda+k}-t\right)}}{\alpha_j(-k\sigma,\sigma)}, \max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l,\sigma}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\left(\frac{x+\Lambda t}{\Lambda+k}-t\right)}}{\alpha_j(l+k\sigma,\sigma)}\right\}\rho\left(w^1,w^2\right)+$$

$$+\int_0^t e^{a(\tau-t)}d\tau\, L\max\left\{\max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(-k\sigma,\sigma)},\right.$$

$$\left.\max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(k\sigma+l,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)}\right\}\rho\left(w^1,w^2\right) \le$$

$$\le L\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0,\sigma}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\sigma,\sigma)}, \max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l,\sigma}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt-l}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(l+k\sigma,\sigma)}\right\}\rho\left(w^1,w^2\right)+$$

$$+\frac{L}{a}\max\left\{\max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(-k\sigma,\sigma)},\right.$$

$$\max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)},\max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(k\sigma+l,\sigma)},\max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)}\Bigg\}\rho\left(w^1,w^2\right). \tag{10}$$

Для оператора A^2 отримаємо

$$|A_i^2[w^1](x,t)-A_i^2[w^2](x,t)|\beta_i(x,t)e^{-at}\le\Bigg(L\max_{i,j\notin I_0}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}+$$

$$+\int_{-kt}^{x}L\max\Bigg\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)},$$

$$L\max_{i,j\notin I_0}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt+l,t)}\Bigg\}dy\Bigg)\rho(w^1,w^2). \tag{11}$$

Із (8) та оцінок (10) і (11) одержуємо

$$\rho(A[w^1],A[w^2])\le\max_{(x,t)\in\bar G}\Bigg\{L\max\Bigg\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0,\sigma}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\sigma,\sigma)},\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l,\sigma}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt-l}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(l+k\sigma,\sigma)}\Bigg\}+$$

$$+\frac{L}{a}\max\Bigg\{\max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\sigma)},\max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\sigma)},\max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(-k\sigma,\sigma)},$$

$$\max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)},\max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(k\sigma+l,\sigma)},\max_{i,j,y,\sigma}\frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)}\Bigg\}+$$

$$+L\max_{i,j\notin I_0}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}+\int_{-kt}^{x}L\max\Bigg\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)},$$

$$L\max_{i,j\notin I_0}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt+l,t)}\Bigg\}dy\Bigg\}\rho(w^1,w^2).$$

Вибравши функції α_i, β_i так, щоб

$$\alpha_i(x,t)=\begin{cases}e^{p(kt+x)(kt-x+l)}, & i\in I_0,\ i\in I_l,\\ e^{p(kt+x)}, & i\in I_0,\ i\notin I_l,\\ e^{p(kt-x+l)}, & i\notin I_0,\ i\in I_l,\\ e^{p(2kt+l)}, & i\notin I_0,\ i\notin I_l,\end{cases}$$

$$\beta_i(x,t)=\varepsilon e^{-p(kt+x)},$$

покажемо, що коефіцієнт стиску оператора A менший від одиниці.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Нехай виконуються припущення $p \le a\mu,\ pl - a\mu \le -2pkT$, а $\mu = \dfrac{1}{\Lambda + k}$.

Тоді, дослідивши цю функцію на екстремум в $\overline{G}$, одержимо співвідношення

$$\max_{(x,t)\in\overline{G}}\left\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_{0,\sigma}}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{-x-kt}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(-k\sigma,\sigma)},\ \max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_{l,\sigma}}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\frac{x-kt-l}{\Lambda+k}}}{\alpha_j(l+k\sigma,\sigma)}\right\} = \max_{(x,t)\in\overline{G}}\left\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_{0,\sigma}}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\mu(-x-kt)}}{\alpha_j(-k\sigma,\sigma)},\right.$$

$$\left.\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_{l,\sigma}}}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\mu(x-kt-l)}}{\alpha_j(l+k\sigma,\sigma)}\right\} = \max_{(x,t)\in\overline{G}}\left\{\max_{i\in I_0}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\mu(-x-kt)}}{e^{pl}},\max_{i\in I_l}\frac{\alpha_i(x,t)e^{a\mu(x-kt-l)}}{e^{pl}}\right\} =$$

$$= \max_{(x,t)\in\overline{G}}\left\{\max\left\{e^{p(kt+x)(kt-x+l)},e^{p(kt+x)}\right\}e^{a\mu(-x-kt)-pl},\right.$$

$$\left.\max\left\{e^{p(kt+x)(kt-x+l)},e^{p(kt-x-l)}\right\}e^{a\mu(x-kt-l)-pl}\right\} = e^{-pl}.$$

Також правильна оцінка

$$\max_{(x,t)\in\overline{G}}\max_{i,j\notin I_0}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)} = \max_{(x,t)\in\overline{G}}\frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{e^{p(2kt+l)}} = \max_{(x,t)\in\overline{G}}\varepsilon e^{-3pkt-px-pl} =$$

$$= \max_t \varepsilon e^{-2pkt+pl} = \varepsilon e^{-pl}.$$

Зрештою, проведемо оцінку для

$$\max_{(x,t)\in\overline{G}}\int_{-kt}^{x}\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)},\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)},L\max_{i,j\notin I_0}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)},\right.$$

$$\left.\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt+l,t)}dy\right\} \le \max_{(x,t)\in\overline{G}}\int_{-kt}^{x}\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)}dy + \max_{(x,t)\in\overline{G}}\int_{-kt}^{x}\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}dy +$$

$$+ \max_{(x,t)\in\overline{G}}\int_{-kt}^{x}\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}dy + \max_{(x,t)\in\overline{G}}\int_{-kt}^{x}L\max_{i,j\notin I_0}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}dy +$$

$$+ \max_{(x,t)\in\overline{G}}\int_{-kt}^{x}\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt+l,t)}dy.$$

Тоді

$$\max_{(x,t)\in\overline{G}}\int_{-kt}^{x}\max_{i,j}\frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)}dy = \max_{(x,t)\in\overline{G}}\int_{-kt}^{x}\varepsilon e^{-p(kt+x)}dy \le$$

$$\le \max_{(x,t)\in\overline{G}}\{\varepsilon e^{-p(kt+x)}(x+kt)\} = \varepsilon(l+2kT),$$

$$\max_{(x,t)\in \underline{G}} \int_{-kt}^{x} \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)} dy = \max_{(x,t)\in \underline{G}} \int_{-kt}^{x} \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{\varepsilon e^{-p(kt+y)}} dy = \max_{(x,t)\in \underline{G}} \int_{-kt}^{x} e^{p(y-x)} dy =$$
$$= \max_{(x,t)\in \underline{G}} \frac{1}{p}(1 - e^{-p(kt+x)}) \le \frac{1}{p},$$

$$\max_{(x,t)\in \underline{G}} \int_{-kt}^{x} \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)} dy = \max_{(x,t)\in \underline{G}} \int_{-kt}^{x} \max \left\{ \varepsilon e^{-p(kt+x)}, \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{e^{p(2kt+l)}} \right\} dy \le$$
$$\le \max_{(x,t)\in \underline{G}} \{\varepsilon e^{-p(kt+x)}(x+kt)\} = \varepsilon(l+2kT),$$

$$\max_{(x,t)\in \underline{G}} \int_{-kt}^{x} L \max_{i,j\notin I_0} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)} dy = \max_{(x,t)\in \underline{G}} \int_{-kt}^{x} L \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{e^{p(2kt+l)}} dy =$$
$$\le L \max_{(x,t)\in \underline{G}} \{\varepsilon e^{-p(3kt+x+l)}(x+kt)\} = L\, \varepsilon e^{-pl}(l+2kT),$$

$$\max_{(x,t)\in \underline{G}} \int_{-kt}^{x} \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt+l,t)} dy = \max_{(x,t)\in \underline{G}} \int_{-kt}^{x} \max \left\{ \varepsilon e^{-p(kt+x)}, \frac{\varepsilon e^{-p(kt+x)}}{e^{p(2kt+l)}} \right\} dy \le$$
$$\le \max_{(x,t)\in \underline{G}} \{\varepsilon e^{-p(kt+x)}(x+kt)\} = \varepsilon(l+2kT).$$

Отже,

$$\max_{(x,t)\in \underline{G}} \int_{-kt}^{x} \max \left\{ \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(y,t)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\beta_j(y,t)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}, L \max_{i,j\notin I_0} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(-kt,t)}, \right.$$
$$\left. \max_{i,j} \frac{\beta_i(x,t)}{\alpha_j(kt+l,t)} dy \right\} \le 3\varepsilon(l+2kT) + \frac{1}{p} + L\varepsilon e^{-pl}(l+2kT).$$

Отож, визначаємо загальну оцінку

$$\rho(A[w^1], A[w^2]) \le \left(Le^{-pl} + \frac{L}{a} \max_{(x,t)\in \underline{G}} \left\{ \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(y,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(y,\sigma)}, \right. \right.$$
$$\left. \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(-k\sigma,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\alpha_j(k\sigma+l,\sigma)}, \max_{i,j,y,\sigma} \frac{\alpha_i(x,t)}{\beta_j(-k\sigma,\sigma)} \right\} +$$
$$\left. + L\varepsilon e^{-pl} + L\left(3\varepsilon(l+2kT) + \frac{1}{p} + L\varepsilon e^{-pl}(l+2kT) \right) \right\} \rho(w^1, w^2).$$

Зафіксуємо додатні параметри p^*, ε^* так, щоб виконувалась нерівність

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\boldsymbol{L}e^{-\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{L}\varepsilon^* \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{l}} + \boldsymbol{L}\left(3\varepsilon^*(\boldsymbol{l} + 2\boldsymbol{kT}) + \frac{1}{\boldsymbol{p}^*} + \boldsymbol{L}\varepsilon^* \boldsymbol{e}^{-\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{l}}(\boldsymbol{l} + 2\boldsymbol{kT})\right) < \frac{1}{2}.$$

Позначимо

$$\boldsymbol{M} = \max_{(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\in\overline{\boldsymbol{G}}}\left\{\max_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{y},\sigma}\frac{\alpha_{\boldsymbol{i}}^*\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\right)}{\alpha_{\boldsymbol{j}}^*\left(\boldsymbol{y},\sigma\right)}, \max_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{y},\sigma}\frac{\alpha_{\boldsymbol{i}}^*\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\right)}{\beta_{\boldsymbol{j}}^*\left(\boldsymbol{y},\sigma\right)}, \max_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{y},\sigma}\frac{\alpha_{\boldsymbol{i}}^*\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\right)}{\alpha_{\boldsymbol{j}}^*\left(-\boldsymbol{k}\sigma,\sigma\right)},\right.$$
$$\left.\max_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{y},\sigma}\frac{\alpha_{\boldsymbol{i}}^*\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\right)}{\beta_{\boldsymbol{j}}^*\left(-\boldsymbol{k}\sigma,\sigma\right)}, \max_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{y},\sigma}\frac{\alpha_{\boldsymbol{i}}^*\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\right)}{\alpha_{\boldsymbol{j}}^*\left(\boldsymbol{k}\sigma + \boldsymbol{l},\sigma\right)}, \max_{\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{y},\sigma}\frac{\alpha_{\boldsymbol{i}}^*\left(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}\right)}{\beta_{\boldsymbol{j}}^*\left(-\boldsymbol{k}\sigma,\sigma\right)}\right\},$$

де функції $\alpha_{\boldsymbol{i}}^*, \beta_{\boldsymbol{i}}^*$ дорівнюють, відповідно, функціям $\alpha_{\boldsymbol{i}}, \beta_{\boldsymbol{i}}$ при $\boldsymbol{p} = \boldsymbol{p}^*, \varepsilon = \varepsilon^*$.

Тепер зафіксуємо значення параметра $\boldsymbol{a}^*$, щоб задовольнити нерівності

$$\boldsymbol{p}^* \le \boldsymbol{a}^*\mu, \quad \boldsymbol{p}^*\boldsymbol{l} - \boldsymbol{a}^*\mu \le -2\boldsymbol{p}^*\boldsymbol{kT}, \quad \frac{\boldsymbol{LM}}{\boldsymbol{a}^*} < \frac{1}{2}.$$

Оскільки параметри $\boldsymbol{p}^*, \varepsilon^*, \boldsymbol{a}^*$ завжди можна вибрати так, щоб коефіцієнт стиску оператора був меншим від одиниці, то оператор $\boldsymbol{A}$ є стискуючим на елементах простору $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}^*$ з вибраними функціями $\alpha_{\boldsymbol{i}} = \alpha_{\boldsymbol{i}}^*, \beta_{\boldsymbol{i}} = \beta_{\boldsymbol{i}}^*$ та параметром $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{a}^*$. Отже, згідно з теоремою Банаха узагальнений неперервний розв'язок задачі (1)–(4) існує і єдиний. Теорему доведено.

Список використаної літератури

1. *Васильева А.Б.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений / А.Б. Васильева, В.Ф. Бутузов. – М.: Высш. шк., 1990.
2. *Громяк М.И.* Асимптотические методы исследования квазиволновых уравнений гиперболического типа / М.И. Громяк, Ю.А. Митропольский, Г.П. Хома. – К.: Наук. думка, 1991.
3. *Кирилич В.М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / В.М. Кирилич, А.М. Филимонов // Матем. студії. – 2008 –Т. 30. – №1. – С. 42–60.
4. *Florescu D.* Asupra existentei solutiilor unor sisteme hiperbolice de tip special / D. Florescu // Studii si cerc. Mat. – 1978. – T.30, No.3. – P. 279–285.
5. *Рождественский Б. Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / Б. Л. Рождественский, Н. Н. Яненко. – М. : Наука, 1978.

6. *Мауленов О. О.* разрешимости смешанной задачи для вырожденной полулинейной гиперболической системы на отрезке. / О. Мауленов, А. Д. Мышкис // Изв. АН КазССР. Сер. Физ.-мат. – 1981. – №5. – С. 25–29.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ПОЛУЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ С ГОРИЗОНТАЛЬНЫМИ ХАРАКТЕРИСТИКАМИ

Ольга ПЕЛЮШКЕВИЧ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

Рассмотрено разрешимость смешанной задачи с горизонтальными характеристиками для полулинейной нагруженной гиперболической системы уравнений первого порядка. Методом характеристик задача сведена к системе интегро-операторных уравнений Вольтерра второго рода, для которой с помощью теоремы Банаха о сжимающем отображении установлено достаточные условия существования глобального непрерывного решения задачи.

Ключевые слова: гиперболическая система, метод характеристик, полулинейные уравнения, теорема Банаха.

ABOUT ONE PROBLEM FOR LOADED HYPERBOLIC SYSTEM OF SEMILINEAR EQUATIONS WITH HORIZONTAL CHARACTERISTICS

Olga PELIUSHKEVYCH

Ivan Franko National University of Lviv, Universytetska Srt., 1 79000 Lviv, Ukraine

The solvability of the mixed problem with horizontal characteristics for the loaded semilinear hyperbolic system of the first order equations is considered. Applying the method of characteristics a problem was reduced to the system of Volterra the second order integro-operation equations, for which the sufficient conditions of existence of global continuous solution by Banach's theorem about a contractive mapping are established.

Key words: Banach theorem, hyperbolic system, quasi-linear equations, method of characteristic, semilinear equations.

Стаття надійшла до редколегії 16.11.2011
Прийнята до друку 31.05.2012