ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76. С. 91-98
Visnyk of the Lviv University. Series Mech.-Mat. Issue 76. P. 91-98

УДК 539.3

ПЛАСТИЧНЕ ДЕФОРМУВАННЯ ПЛАСТИН З ДВОМА СПІВВІСНИМИ АБО КОМПЛАНАРНИМИ РОЗРІЗАМИ (АБСОЛЮТНО ЖОРСТКИМИ ВКЛЮЧЕННЯМИ)

Ігор КУЗЬ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

За допомогою варіаційно-різницевого методу розв'язують плоскі задачі деформаційної теорії пластичності за активного навантаження про деформування пластини з двома співвісними або компланарними розрізами та з такими самими абсолютно жорсткими включеннями. З математичного погляду вони полягають у розв'язуванні рівнянь рівноваги в переміщеннях у пластині з мішаними крайовими умовами на її поверхні. Для числового розв'язування цих задач у незв'язних областях використовують їхні варіаційні формулювання, які полягають у мінімізації лагранжіана. Отримані після дискретизації сформульованих задач системи нелінійних алгебричних рівнянь розв'язують методом Ньютона-Канторовича.

За допомогою числової реалізації наведеного вище методу отримано поля напружень і діаграми розподілу інтенсивності тензора напружень у пластинах з двома співвісними або компланарними розрізами та з такими самими абсолютно жорсткими включеннями за одновісного розтягу, а також визначено області виникнення та розвитку пластичних деформацій.

Ключові слова: варіаційно-різницевий метод, незв'язна область, деформаційна теорія пластичності, пластина, співвісні розрізи, компланарні розрізи, абсолютно жорсткі включення.

Дослідження напружено-деформованого стану пластин з розрізами або з тонкими включеннями [1, 2] – це необхідний етап розрахунку їхньої міцності та надійності. Оскільки такі елементи конструкцій займають незв'язну область [3] і містять концентратори напружень, то можливість застосування аналітичних методів розв'язування відповідних крайових задач значно обмежена. У [4] за допомогою числового методу розв'язують плоскі задачі деформаційної теорії пластичності про деформування пластин з розрізом або з таким самим абсолютно жорстким включенням. Ми продовжуємо [4] для випадку двох співвісних або компланарних розрізів (абсолютно жорстких включень).

Формулювання задачі. Розглядають плоскі задачі деформаційної теорії пластичності (теорії малих пружно-пластичних деформацій Ільюшина) за активного навантаження в областях $\boldsymbol{V}$ з межею Σ (рис. 1, 2), які моделюють напружено-деформований стан у пластині. З математичного погляду вони полягають у розв'язуванні рівнянь рівноваги

$$\left(\boldsymbol{C}_{ijkl}\boldsymbol{u}_{k,l}\right)_{,j} + \boldsymbol{X}_i = 0 \qquad (1)$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

при використанні мішаних крайових умов на її межі Σ ($\Sigma_{\boldsymbol{u}} \cup \Sigma_{\sigma} = \Sigma$)

$$\boldsymbol{u_i} \Big|_{\Sigma_u} = \boldsymbol{u_i^0}, \qquad \boldsymbol{C_{ijkl} u_{k,l} n_j} \Big|_{\Sigma_\sigma} = \boldsymbol{S_i^0}. \tag{2}$$

Тут $\boldsymbol{C_{ijkl}}$ – компоненти тензора модулів пружності; $\boldsymbol{u_i}, \boldsymbol{X_i}, \boldsymbol{S_i^0}, \boldsymbol{n_j}$ – компоненти векторів переміщень, об'ємних і поверхневих сил, а також зовнішньої нормалі до поверхні Σ_σ, відповідно; $\boldsymbol{u_{i,j}} \equiv \partial \boldsymbol{u_i} / \partial \boldsymbol{x_j}$. За однаковими індексами, які трапляються в одному виразі двічі, відбувається підсумовування від одиниці до двох.

У випадку плоскої деформації отримаємо

$$\boldsymbol{u}_1 = \boldsymbol{u_x}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{u}_2 = \boldsymbol{u_y}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \quad \boldsymbol{u}_3 = \boldsymbol{u_z} \equiv 0. \tag{3}$$

Щоб отримати задачу деформаційної теорії пластичності для початково ізотропного матеріалу, потрібно в (1), (2) прийняти

$$\boldsymbol{C_{ijkl}}(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}) = \lambda(\varepsilon_{\boldsymbol{u}})\delta_{\boldsymbol{ij}}\delta_{\boldsymbol{kl}} + \mu(\varepsilon_{\boldsymbol{u}})(\delta_{\boldsymbol{ik}}\delta_{\boldsymbol{jl}} + \delta_{\boldsymbol{il}}\delta_{\boldsymbol{jk}}),$$
$$\mu(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}) = \mu(1 - \omega(\varepsilon_{\boldsymbol{u}})), \quad \lambda(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}) = \boldsymbol{K} - \frac{2}{3}\mu(\varepsilon_{\boldsymbol{u}}), \tag{4}$$

де $\varepsilon_{\boldsymbol{u}}$ – інтенсивність тензора деформацій $\left(\varepsilon_{\boldsymbol{u}} = \sqrt{\boldsymbol{e_{ij} e_{ij}}}, \quad \boldsymbol{e_{ij}} = \varepsilon_{\boldsymbol{ij}} - \frac{1}{3}\varepsilon_{\boldsymbol{kk}}\delta_{\boldsymbol{ij}}\right)$; $\boldsymbol{K}$ – модуль об'ємного стиску; $\omega(\varepsilon_{\boldsymbol{u}})$ – функція пластичності Ільюшина [5].

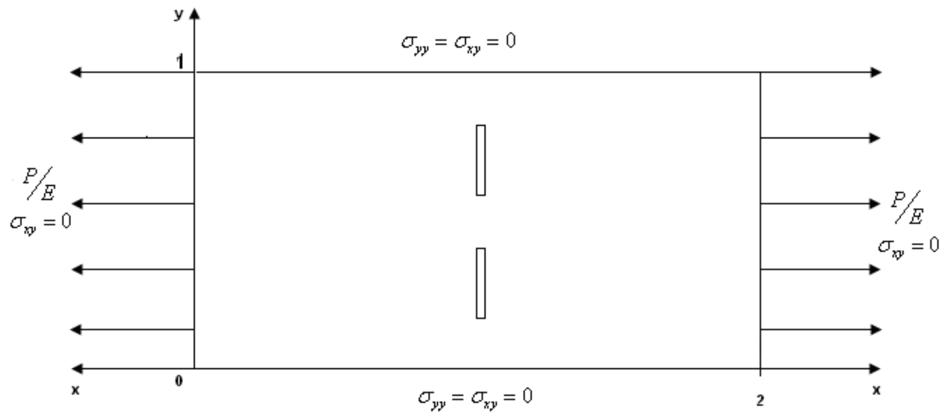

Рис. 1. Пластина з двома співвісними розрізами (абсолютно жорсткими включеннями) та крайовими умовами на зовнішній межі

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

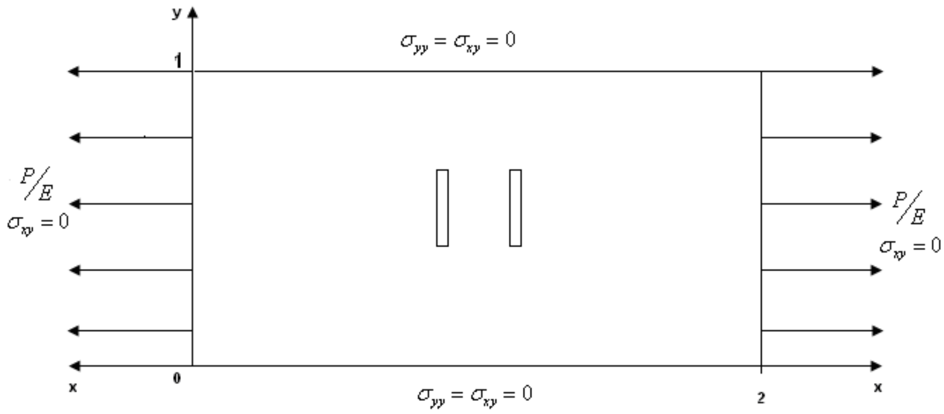

Рис. 2. Пластина з двома компланарними розрізами (абсолютно жорсткими включеннями) та крайовими умовами на зовнішній межі

Для матеріалу з лінійним зміцненням $\omega\left(\varepsilon_u\right)$ набуває вигляду

$$\omega\left(\varepsilon_u\right) = \begin{cases} \left(1-\gamma\right)\dfrac{\varepsilon_u - \varepsilon_s}{\varepsilon_u}, & \varepsilon_u > \varepsilon_s, \\ 0, & \varepsilon_u \le \varepsilon_s, \end{cases} \tag{5}$$

де ε_s – межа текучості; $\gamma = \mu'/\mu$ (μ' – модуль зміцнення).

Метод розв'язування задачі та результати числових досліджень. Для числового розв'язування задачі (1)–(5) зручно використовувати її варіаційне формулювання [6], яке полягає у мінімізації лагранжіана

$$L = \int_V W dV - \int_V X_i u_i dV - \int_{\Sigma_\sigma} S_i^0 u_i d\Sigma . \tag{6}$$

Тут $W = \frac{1}{2} C_{ijkl}(\varepsilon_u) u_{i,j} u_{k,l}$ – питома потенціальна енергія пружно-пластичної деформації.

Замінивши в (6) усі континуальні функції сітковими, інтеграли – скінченими сумами, похідні – різницевими похідними, отримаємо різницевий аналог лагранжіана L [6].

Для визначення стаціонарної точки L у випадку деформаційної теорії пластичності одержимо системи нелінійних алгебричних рівнянь

$$\vec{P}(\vec{u}) + \vec{F} = 0,$$

які розв'язують ітераційними методами [7].

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Описаний варіаційно-різницевий метод у незв'язних областях реалізований у вигляді пакета програм на мові FORTRAN з підпрограмою побудови сіток на DELPHI.

На рис. 1, 2 зображено геометрію пластин з двома співвісними та компланарними розрізами (абсолютно жорсткими включеннями), відповідно, та крайові умови. Межі розрізів або вільні від навантажень $\left(\sigma_{\boldsymbol{nn}} = 0, \sigma_{\boldsymbol{n}\tau} = 0\right)$, або закріплені $(\boldsymbol{u}_\tau = 0, \boldsymbol{u_n} = 0)$, що моделює наявність тонких абсолютно жорстких включень. До правого та лівого краю пластини прикладене рівномірне горизонтальне розтягувальне навантаження $\boldsymbol{P}/\boldsymbol{E} = 0{,}45$.

Усі розрахунки проводили у безрозмірних величинах. Модуль пружності $\boldsymbol{E} = 1$, коефіцієнт Пуассона $\nu = 0{,}3$, межа текучості $\sigma_{\boldsymbol{s}} = 0{,}5$, параметр зміцнення $\gamma = 0{,}2$. Довжина розрізів удесятеро більша за їхню ширину. Відстані між розрізами дорівнюють їхній довжині. Отримані діаграми розподілу інтенсивності тензора напружень $\sigma_{\boldsymbol{u}}/\boldsymbol{E}$ у пластині з двома співвісними розрізами або з такими ж абсолютно жорсткими включеннями зображені на рис. 3 і 4, відповідно.

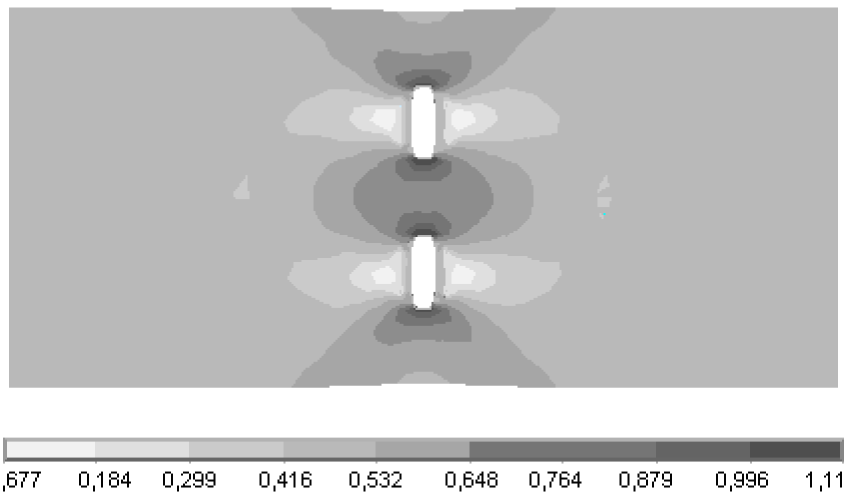

Рис. 3. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень $\sigma_{\boldsymbol{u}}/\boldsymbol{E}$ у пластині з двома співвісними розрізами

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

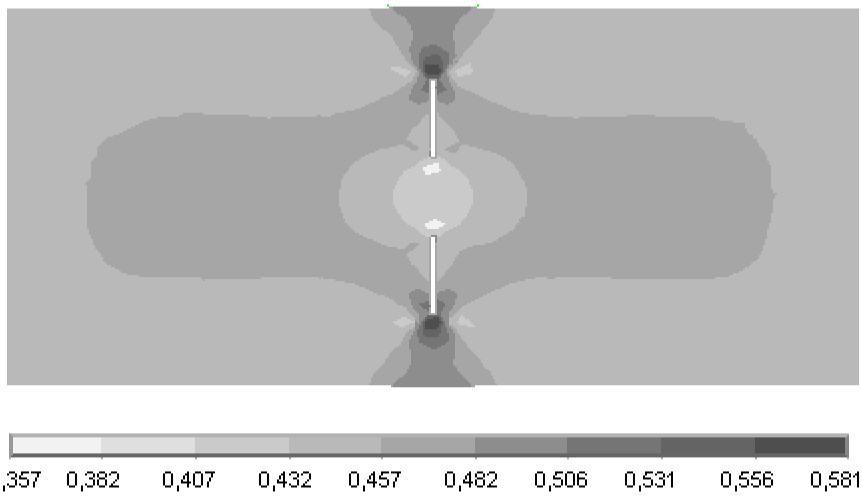

Рис. 4. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень $\sigma_{\boldsymbol{u}}/\boldsymbol{E}$ у пластині з двома співвісними абсолютно жорсткими включеннями

На рис. 5, 6 зображені діаграми розподілу інтенсивності тензора напружень $\sigma_{\boldsymbol{u}}/\boldsymbol{E}$ у пластині з двома компланарними розрізами або з такими самими абсолютно жорсткими включеннями, відповідно.

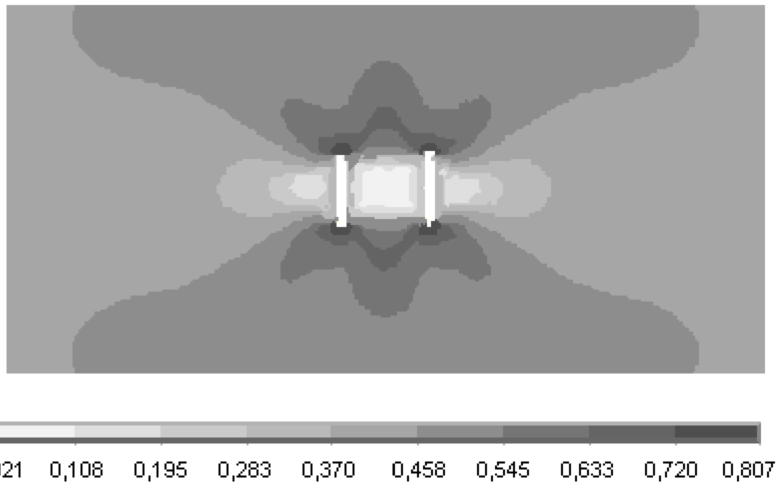

Рис. 5. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень $\sigma_{\boldsymbol{u}}/\boldsymbol{E}$ у пластині з двома компланарними розрізами

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

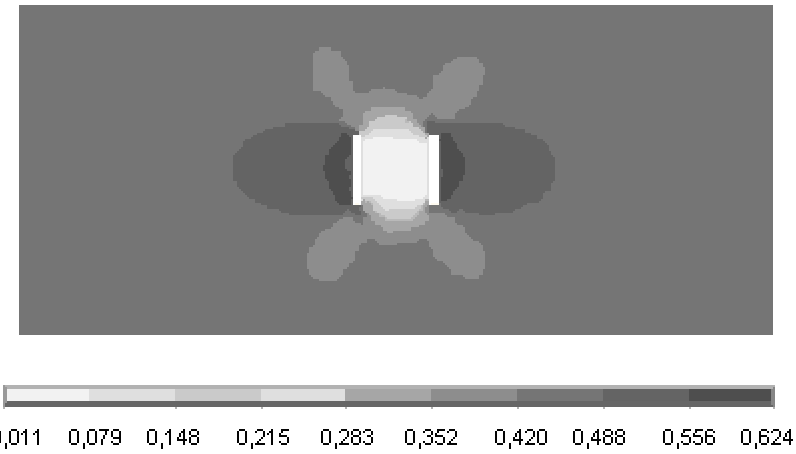

Рис. 6. Діаграма розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u / E у пластині з двома компланарними абсолютно жорсткими включеннями

На рис. 3 і 5 показано, як деформуватимуться межі розрізів.

За допомогою діаграм розподілу інтенсивності тензора напружень σ_u / E можна визначити області виникнення та розвитку пластичних деформацій. Згідно з умовою текучості Губера-Мізеса пластичне деформування починається тоді, коли інтенсивність тензора напружень σ_u досягає межі текучості σ_s (у нас σ_s =0,5).

Висновки. Як видно з рис. 3, області пластичних деформацій у пластині з двома співвісними розрізами вперше з'являються на торцях розрізів і розповсюджуються у формі еліпсів з більшими півосями в напрямі розтягу. Натомість, пластичні деформації у пластині з двома співвісними жорсткими включеннями (рис. 4) вперше виникають лише на зовнішніх торцях включень і розвиваються передовсім до найближчих країв пластини. Як видно з рис. 5, пластичні деформації у пластині з двома компланарними розрізами також вперше з'являються біля торців розрізів, проте розповсюджуються назустріч одні одним не вздовж осі розтягу, а з відхиленням до найближчих країв пластини. У пластині з двома компланарними включеннями (рис. 6) пластичні деформації вперше з'являються вздовж зовнішніх (ближчих до країв пластини), неторцьових поверхонь включень. Форма областей з однаковою величиною інтенсивності напружень у пластинах з розрізами (включеннями) є, очевидно, симетричною стосовно вертикальної та горизонтальної осей симетрії розрізів (включень). Пластичні деформації у пластинах з розрізами виникають за значно меншого навантаження (на 45% для співвісних розрізів і на 25% для компланарних), ніж у відповідних пластинах з такими самими включеннями.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Отож, отримані поля напружень дають змогу виявити області їхньої найбільшої концентрації та за відповідним критерієм руйнування оцінити міцність пластин з розрізами або з тонкими абсолютно жорсткими включеннями.

Список використаної літератури

1. *Сулим Г. Т.* Основи математичної теорії термопружної рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями. Монографія / Г.Т. Сулим –Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ, 2007.
2. *Николишин М. М.* Двовісний розтяг однорідної ізотропної пластини з двома рівними співвісними тріщинами з урахуванням пластичних зон біля їх вершин / М. М. Николишин, В. В. Опанасович, Л. Р. Куротчин, М. С. Слободян // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2009. – Т. 52, № 1. – С. 115–121.
3. *Кузь І. С.* Дослідження пружно-пластичного з'єднувального елемента конструкцій під дією нерівномірних навантажень / І. С. Кузь // В зб. "Механіка і фізика руйнування будівельних матеріалів та конструкцій". Вип. 8. – Л.: Каменяр, 2009. – С. 35–41.
4. *Кузь І.* Напружено-деформований стан пружно-пластичних пластин з розрізом або абсолютно жорстким включенням / І. Кузь, І. Тімар // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 73. – С. 148–154.
5. *Ильюшин А. А.* Пластичность / А. А. Ильюшин. – М.-Л.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.
6. *Победря Б. Е.* Численные методы в теории упругости и пластичности / Б. Е. Победря. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1981.
7. *Шешенин С. В.* О прикладных итерационных методах / С. В. Шешенин., И. С. Кузь // Вычислительная механика деформируемого твердого тела. – 1990. – Вып. 1. – С. 63–75.

ПЛАСТИЧЕСКОЕ ДЕФОРМИРОВАНИЕ ПЛАСТИН С ДВУМЯ СООСНЫМИ ИЛИ КОМПЛАНАРНЫМИ РАЗРЕЗАМИ (АБСОЛЮТНЫМИ ЖЕСТКИМИ ВКЛЮЧЕНИЯМИ)

Игорь КУЗЬ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

С помощью вариационно-разностного метода получены решения плоских задач деформационной теории пластичности о деформировании пластин с двумя соосными или компланарными разрезами (абсолютно жесткими включениями).

Ключевые слова: вариационно-разностный метод, деформационная теория пластичности, пластина, соосные разрезы, компланарные разрезы, абсолютно жесткое включение.

PLASTICAL STRAIN OF PLATES WITH TWO CUTS (THE SAME THIN RIGID BODY)

Ihor KUZ'

Ivan Franko National University of L'viv, Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine

Variation difference method of building finite difference schemes is used in unconnected domains. Using this method for solving 2D plasticity problems, stress states in plates with two cuts (the same thin rigid body) are investigated.

Key words: variation difference method, plasticity, plate, cut, thin rigid body.

Стаття надійшла до редколегії 02.11.2011
Прийнята до друку 31.05.2012