

УДК 620.179

## ВИЗНАЧЕННЯ В'ЯЗКОСТІ РУЙНУВАННЯ НА ПІДСТАВІ РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПРОСТОРОВОЇ ЗАДАЧІ В КВАЗІСТАТИЧНОМУ ПРУЖНО-ПЛАСТИЧНОМУ ФОРМУЛЮВАННІ

Владислав БОГДАНОВ<sup>1</sup>, Георгій СУЛИМ<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Національний транспортний університет,  
вул. Суворова, 1 01010 Київ, Україна

<sup>2</sup>Львівський національний університет імені Івана Франка,  
вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна

На підставі розробленої аналітико-числової методики розв'язування просторових задач у пружно-пластичному квазістатичному математичному формулюванні з використанням методу скінченних різниць визначається ймовірнісний характер температурної залежності в'язкості руйнування сталі 15Х2НМФА. Числовий розв'язок отримано для тіла у вигляді прямокутного паралелепіпеда з крайовим пропилом-тріщиною у площині симетрії (компактний зразок) при триточковому згині. Порівняння результатів розрахунку з використанням квазістатичного та динамічного пружно-пластичного формулювання свідчить, що перше дає якісно добрий опис явища руйнування, хоча кількісні відхилення доволі значні.

*Ключові слова:* компактний зразок, пружно-пластична деформація, в'язкість руйнування, температурна залежність, ймовірність, різницевий метод.

**Вступ.** У працях [1–6] було запропоновано для аналізу процесів руйнування застосовувати поряд з експериментальними також і розрахункові методи з використанням динамічної пружно-пластичної моделі матеріалу. В [4] розв'язано задачу плоского деформованого стану триточкового згину компактного зразка з центральною крайовою тріщиною. В [2] розв'язано аналогічну задачу плоского напруженого стану за критеріальної умови про початок збільшення тріщини у момент переміщення максимуму розривних напружень від місця безпосереднього продовження вістря тріщини на певну відстань від нього. У працях [3] і [5] досліджено плоскі задачі напруженого та деформованого станів з тріщиною, підростання якої контролюється узагальненим локальним  $\sigma_{\theta\theta}$ -критерієм крихкого руйнування. В [1] і [6] в'язкість руйнування матеріалу визначали, відповідно, на підставі дослідження розв'язків задач плоского напруженого та плоского деформованого станів у припущенні, що тріщина нерухома. Запропоновані моделі дали змогу значно підвищити рівень адекватності отриманих теоретичних підходів.

Для практичних інженерних розрахунків в'язкості руйнування часто використовують квазістатичну модель, яка значно простіша у застосуванні. У цьому дослідженні на відміну від [1, 6] в'язкість руйнування визначали на підставі числового розв'язку задачі про триточковий згин компактного

зразка у квазістатичному пружно-пластичному формулюванні і результати порівнювали з висновками застосування динамічної моделі.

1. **Математичне формулювання задачі.** Розглянемо деформування ізотропного бруса  $\{ |x| \leq L/2; 0 \leq y \leq B; 0 \leq z \leq H \}$ , що має в площині поперечного перерізу форму прямокутника  $\Sigma = L \times B \times H$  (рис. 1 – довжина  $L$ , ширина  $B$ , товщина  $H$ ) з пропилом-тріщиною завдовжки  $l$  уздовж прямокутної області  $\{x = 0; 0 \leq y \leq l; 0 \leq z \leq H\}$  посередині (профіль компактного зразка). Брус контактує з двома нерухомими опорами в області  $\{L_* \leq x \leq L_* + a; y = 0; 0 \leq z \leq H\}$ . Зверху на тіло падає абсолютно твердий ударник, який контактує з брусом в області  $\{|x| \leq A; y = B; 0 \leq z \leq H\}$  упродовж короткого інтервалу часу. Його дію заміняємо рівномірно розподіленим у зоні контакту нормальним напруженням  $-P$ , що змінюється з часом як лінійна функція ( $P = p_{01} + p_{02}t$ ). Унаслідок симетрії процесу деформування стосовно площини  $x = 0$  далі розглядаємо тільки праву частину бруса (рис. 1). Вважається, що упродовж всього проміжку часу взаємодії область контакту залишається незмінною.

Механічна модель заснована на статичній теорії напружено-деформованого стану. Нехай  $\mathbf{u} = (u_x, u_y, u_z)$  – вектор зміщень, компоненти якого пов'язані з компонентами тензора деформацій співвідношеннями Коші, а рівняння рівноваги набули вигляду

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0.$$

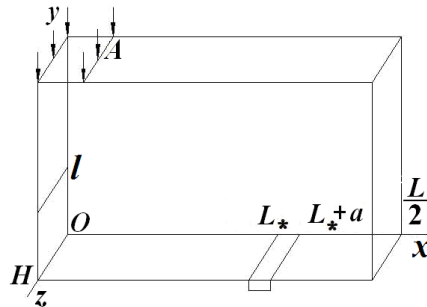


Рис. 1. Геометрична схема задачі

Вважатимемо, що під час ударного навантаження матеріал пружно-пластично зміцнюється, причому розрахунок полів напружень, деформацій та їхніх приростів, зокрема й приростів інтенсивності пластичних  $d\epsilon_i^p$ , а також параметра Одквіста  $\kappa = \int d\epsilon_i^p$  виконуватимемо на підставі числового розв'язування відповідної квазістатичної пружно-пластичної задачі.

Крайові умови запишемо так:

$$\begin{aligned}
 & \mathbf{x} = 0, \quad 0 < \mathbf{y} < \mathbf{L}, \quad 0 < \mathbf{z} < \mathbf{H} : \quad \sigma_{\mathbf{xx}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{xy}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{xz}} = 0; \\
 & \mathbf{x} = 0; \quad \mathbf{l} < \mathbf{y} < \mathbf{B}, \quad 0 < \mathbf{z} < \mathbf{H} : \quad \mathbf{u}_{\mathbf{x}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{xy}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{xz}} = 0; \\
 & \mathbf{x} = \mathbf{L} / 2, \quad 0 < \mathbf{y} < \mathbf{B}, \quad 0 < \mathbf{z} < \mathbf{H} : \quad \sigma_{\mathbf{xx}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{xy}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{xz}} = 0; \\
 & \mathbf{y} = 0, \quad 0 < \mathbf{x} < \mathbf{L}_*, \quad 0 < \mathbf{z} < \mathbf{H} : \quad \sigma_{\mathbf{yy}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{xy}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{yz}} = 0; \\
 & \mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{L}_* < \mathbf{x} < \mathbf{L}_* + \mathbf{a}, \quad 0 < \mathbf{z} < \mathbf{H} : \quad \mathbf{u}_{\mathbf{y}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{xy}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{yz}} = 0; \\
 & \mathbf{y} = 0, \quad \mathbf{L}_* + \mathbf{a} < \mathbf{x} < \mathbf{L} / 2, \quad 0 < \mathbf{z} < \mathbf{H} : \quad \sigma_{\mathbf{yy}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{xy}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{yz}} = 0; \\
 & \mathbf{y} = \mathbf{B}, \quad 0 < \mathbf{x} < \mathbf{A}, \quad 0 < \mathbf{z} < \mathbf{H} : \quad \sigma_{\mathbf{yy}} = -\mathbf{P}, \quad \sigma_{\mathbf{xy}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{yz}} = 0; \\
 & \mathbf{y} = \mathbf{B}, \quad \mathbf{A} < \mathbf{x} < \mathbf{L} / 2, \quad 0 < \mathbf{z} < \mathbf{H} : \quad \sigma_{\mathbf{yy}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{xy}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{yz}} = 0; \\
 & \mathbf{z} = 0, \quad 0 < \mathbf{x} < \mathbf{L} / 2, \quad 0 < \mathbf{y} < \mathbf{B} : \quad \mathbf{u}_{\mathbf{z}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{xz}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{yz}} = 0; \\
 & \mathbf{z} = \mathbf{H}, \quad 0 < \mathbf{x} < \mathbf{L} / 2, \quad 0 < \mathbf{y} < \mathbf{B} : \quad \sigma_{\mathbf{zz}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{xz}} = 0, \quad \sigma_{\mathbf{yz}} = 0.
 \end{aligned} \tag{1}$$

За фізичну модель прийняли модель, яка заснована на теорії неізотермічної пластичного течіння для середовища з зміцненням та умовою текучості Мізеса разом із гіпотезою короткочасної повзучості [7]. Отож, рівняння зв'язку між напруженнями та деформаціями набудуть вигляду [8]

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^p, \quad \varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2G} \mathbf{s}_{ij} + \mathbf{K} \sigma + \varphi, \quad d\varepsilon_{ij}^p = \mathbf{s}_{ij} d\lambda, \tag{2}$$

де  $\mathbf{s}_{ij} = \sigma_{ij} - \delta_{ij} \sigma$  – девіатор тензора напружень;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера;  $G$  – модуль зсуву;  $\mathbf{K} = 3\mathbf{K}_1$ ,  $\mathbf{K}_1 = (1 - 2\nu) / (3E)$  – модуль об'ємного стиску, що зв'язує об'ємне розширення  $3\varepsilon$ , середнє напруження  $\sigma = (\sigma_{\mathbf{xx}} + \sigma_{\mathbf{yy}} + \sigma_{\mathbf{zz}}) / 3$  і температурне видовження  $\varphi$  у співвідношенні  $\varepsilon = \mathbf{K} \sigma + \varphi$  (у цьому випадку  $\varphi \equiv 0$ );  $\nu$  – коефіцієнт Пуассона;  $E$  – модуль пружності (Юнга);  $d\lambda$  – деяка скалярна функція, що визначається формою поверхні навантаження. Припускаємо, що ця скалярна функція є квадратичною функцією девіатора напружень  $\mathbf{s}_{ij}$  [7]

$$\begin{aligned}
 d\lambda &= \left\{ 0 \quad (\mathbf{f} \equiv \sigma_i^2 - \sigma_s^2(\mathbf{T}) < 0); \quad \frac{3d\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} \quad (\mathbf{f} = 0, \quad d\mathbf{f} = 0) \right\}, \\
 d\varepsilon_i^p &= \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (d\varepsilon_{\mathbf{xx}}^p - d\varepsilon_{\mathbf{yy}}^p)^2 + (d\varepsilon_{\mathbf{xx}}^p - d\varepsilon_{\mathbf{zz}}^p)^2 + (d\varepsilon_{\mathbf{yy}}^p - d\varepsilon_{\mathbf{zz}}^p)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 6 \left( (d\varepsilon_{\mathbf{xy}}^p)^2 + (d\varepsilon_{\mathbf{xz}}^p)^2 + (d\varepsilon_{\mathbf{yz}}^p)^2 \right) \right]^{1/2}, \\
 \sigma_i &= \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{(\sigma_{\mathbf{xx}} - \sigma_{\mathbf{yy}})^2 + (\sigma_{\mathbf{xx}} - \sigma_{\mathbf{zz}})^2 + (\sigma_{\mathbf{yy}} - \sigma_{\mathbf{zz}})^2 + 6(\sigma_{\mathbf{xy}}^2 + \sigma_{\mathbf{xz}}^2 + \sigma_{\mathbf{yz}}^2)},
 \end{aligned} \tag{3}$$

де  $\sigma_i$  – інтенсивність напружень;  $\varepsilon_i^p$  – інтенсивність пластичних деформацій.

Припускаємо, що внаслідок пластичної деформації відбувається зміцнення матеріалу за таким температурним співвідношенням [9]:

$$\sigma_s(\mathbf{T}) = \sigma_{02}(\mathbf{T}_0) \left( 1 + \frac{\kappa(\mathbf{T})}{\varepsilon_0} \right)^{\eta_*}, \quad \varepsilon_0 = \frac{\sigma_{02}(\mathbf{T}_0)}{E}, \quad (4)$$

де  $T$  – температура;  $\kappa = \int d\varepsilon_i^p$  – параметр Одквіста;  $\mathbf{T}_0 = 20^\circ\text{C}$ ;  $\eta_*$  – коефіцієнт зміцнення;  $\sigma_s(\mathbf{T})$  – межа текучості після зміцнення матеріалу при температурі  $\mathbf{T}$ .

2. **Схема розв'язування задачі.** Використовуємо, як і в [9], метод послідовного (покрокового) відстежування розвитку пружно-пластичних деформацій, коли на кожному кроці приросту (збільшення) навантаження напружено-деформований стан знаходимо з урахуванням отриманого на попередньому кроці розв'язку. Для цього весь період підростання навантаження розбиваємо на окремі малі проміжки. Розглянемо деякий проміжок зміни навантаження, що визначається відрізком часу  $\Delta t = t_1 - t_0$ , де  $t_1$  – поточний момент часу;  $t_0$  – момент часу, що передує поточному. Інтегруємо (2) за змінною  $t$ , застосовуємо теорему про середнє,  $(\sigma_{xx} - \sigma)$ ,  $(\sigma_{yy} - \sigma)$ ,  $(\sigma_{zz} - \sigma)$ , і середні величини  $\bar{\sigma}_{xy}$ ,  $\bar{\sigma}_{xz}$ ,  $\bar{\sigma}_{yz}$  заміняємо з точністю до  $\mathbf{O}(\Delta t)$  відповідними величинами в момент часу  $t_1$ . Прирости деформацій запишемо у вигляді

$$\begin{aligned} \Delta\varepsilon_{xx} &= \psi(\sigma_{xx}(t_1) - \sigma(t_1)) + \mathbf{K}\sigma(t_1) - \mathbf{b}_{xx}(t_0), & \Delta\varepsilon_{xy} &= \psi\sigma_{xy}(t_1) - \mathbf{b}_{xy}(t_0), \\ \Delta\varepsilon_{yy} &= \psi(\sigma_{yy}(t_1) - \sigma(t_1)) + \mathbf{K}\sigma(t_1) - \mathbf{b}_{yy}(t_0), & \Delta\varepsilon_{xz} &= \psi\sigma_{xz}(t_1) - \mathbf{b}_{xz}(t_0), \\ \Delta\varepsilon_{zz} &= \psi(\sigma_{zz}(t_1) - \sigma(t_1)) + \mathbf{K}\sigma(t_1) - \mathbf{b}_{zz}(t_0), & \Delta\varepsilon_{yz} &= \psi\sigma_{yz}(t_1) - \mathbf{b}_{yz}(t_0), \\ \psi &= 1/(2\mathbf{G}) + \Delta\lambda, \end{aligned} \quad (5)$$

де  $\sigma(t_0) = (\sigma_{xx}(t_0) + \sigma_{yy}(t_0) + \sigma_{zz}(t_0)) / 3$  ( $i, j = x, y, z$ );  $\mathbf{b}_{ij}(t_0) = \frac{\sigma_{ij}(t_0)}{2\mathbf{G}} - \delta_{ij} \left( \frac{1}{2\mathbf{G}} - \mathbf{K} \right) \sigma(t_0)$ ;  $\Delta\lambda$  – різницевий відповідник диференціала  $d\lambda$ .

Напружений стан у момент часу  $t_1$  визначатимемо з урахуванням умов текучості, які на підставі (3) і (5) запишемо так:

$$\begin{aligned} \psi &= \left\{ \frac{1}{2\mathbf{G}} \quad (\mathbf{f} < 0); \frac{1}{2\mathbf{G}} + \frac{3\Delta\varepsilon_i^p}{2\sigma_i} \quad (\mathbf{f} = 0, d\mathbf{f} = 0) \right\}, \Delta\varepsilon_i^p = \frac{\sqrt{2}}{3} \left[ (\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{yy}^p)^2 + \right. \\ &+ \left. (\Delta\varepsilon_{xx}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p)^2 + (\Delta\varepsilon_{yy}^p - \Delta\varepsilon_{zz}^p)^2 + 6 \left( (\Delta\varepsilon_{xy}^p)^2 + (\Delta\varepsilon_{xz}^p)^2 + (\Delta\varepsilon_{yz}^p)^2 \right) \right]^{1/2}, \quad (6) \\ \Delta\varepsilon_{ij}^p &= \Delta\varepsilon_{ij} - \Delta\varepsilon_{ij}^e, \quad \Delta\varepsilon_{ij}^e = \frac{1}{2\mathbf{G}} \sigma_{ij} + \delta_{ij} \left( \mathbf{K} - \frac{1}{2\mathbf{G}} \right) \sigma \quad (i, j = x, y, z). \end{aligned}$$

Для врахування фізичної нелінійності застосовують метод послідовних наближень, який дає змогу нелінійну задачу звести до послідовності лінійних задач [1–6]

$$\psi^{(n+1)} = \left\{ \psi^{(n)} \mathbf{p} + \frac{1-p}{2G} (Q_i < -Q); \psi^{(n)} \quad (|Q_i| < Q); \psi^{(n)} \frac{\sigma_i^{(n)}}{\sigma_S(\mathbf{T})} (Q_i > Q) \right\}, \quad (7)$$

$$Q_i = \sigma_i^{(n)} - \sigma_S(\mathbf{T}), \quad 0 \leq p \leq 1,$$

де  $Q$  – найбільше відхилення інтенсивності напружень  $\sigma_i^{(n)}$  на кроці  $\mathbf{n}$  від зміцненої межі текучості;  $\mathbf{n}$  – номер наближення.

З системи (5) знайдемо вирази для обчислення напружень

$$\begin{aligned} \sigma_{xx} &= A_1 \Delta \varepsilon_{xx} + A_2 \Delta \varepsilon_{yy} + A_2 \Delta \varepsilon_{zz} + Y_{xx}, & \sigma_{xy} &= A_3 \Delta \varepsilon_{xy} + Y_{xy}, \\ \sigma_{yy} &= A_2 \Delta \varepsilon_{xx} + A_1 \Delta \varepsilon_{yy} + A_2 \Delta \varepsilon_{zz} + Y_{yy}, & \sigma_{xz} &= A_3 \Delta \varepsilon_{xz} + Y_{xz}, \\ \sigma_{zz} &= A_2 \Delta \varepsilon_{xx} + A_2 \Delta \varepsilon_{yy} + A_1 \Delta \varepsilon_{zz} + Y_{zz}, & \sigma_{yz} &= A_3 \Delta \varepsilon_{yz} + Y_{yz}. \end{aligned} \quad (8)$$

Тут

$$\begin{aligned} Y_{xx} &= A_1 b_{xx} + A_2 b_{yy} + A_2 b_{zz}, & Y_{xy} &= A_3 b_{xy}, & A_1 &= (\psi + 2K)/(3\psi K), \\ Y_{yy} &= A_2 b_{xx} + A_1 b_{yy} + A_2 b_{zz}, & Y_{xz} &= A_3 b_{xz}, & A_2 &= (\psi - K)/(3\psi K), \\ Y_{zz} &= A_2 b_{xx} + A_2 b_{yy} + A_1 b_{zz}, & Y_{yz} &= A_3 b_{yz}, & A_3 &= 1/\psi. \end{aligned}$$

Як основний незалежний параметр для дослідження зміни досліджуваних величин обрано розрахункове значення коефіцієнта інтенсивності напружень  $K_I$  (КІН) біля тріщини у статичній задачі для пружного деформованого компактного зразка. КІН у кожний поточний момент часу визначали відповідно до наближеного співвідношення [10] для статичного розв'язку

$$K_I = 12F \frac{\sqrt{l}}{BH} \left( 1,93 - 3,07 \frac{l}{B} + 14,53 \left( \frac{l}{B} \right)^2 - 25,11 \left( \frac{l}{B} \right)^3 + 25,8 \left( \frac{l}{B} \right)^4 \right), \quad (9)$$

де  $F = 2AP$  – контактна сила;  $4B$  – відстань між опорами.

Використовуючи розраховані пластичні деформації і напруження, локальний критерій крихкого руйнування полікристалічного матеріалу та функцією розподілу Вейбула для опису розподілу за міцністю, знайдемо температурні залежності в'язкості руйнування  $K_{Ic}$ . Для елементарної комірки прийнято локальний критерій крихкого руйнування у вигляді [1, 6, 11]

$$\sigma_1 + m_{T\varepsilon}(\mathbf{T}, \kappa) \sigma_{eff} \geq \sigma_d; \quad (10)$$

$$\sigma_1 \geq \mathbf{S}_C(\kappa), \quad (11)$$

де  $\sigma_1$  – максимальні головні напруження;  $\sigma_{eff} = \sigma_i - \sigma_{02}$  – ефективне напруження;  $\sigma_d$  – ефективна міцність карбідів або інших частинок, на яких зароджуються мікротріщини відколювання;  $\sigma_{02}(\mathbf{T}) = \mathbf{a} - \mathbf{c}(\mathbf{T} + 273) + \mathbf{b} \exp(-\mathbf{h}(\mathbf{T} + 273))$  – межа текучості;  $\mathbf{S}_C(\kappa) = [\mathbf{C}_1 + \mathbf{C}_2 \exp(-\mathbf{A}_d \kappa)]^{-1/2}$  – критичне напруження крихкого руйнування;  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{c}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{h}$ ,  $\mathbf{C}_1$ ,  $\mathbf{C}_2$ , і  $\mathbf{A}_d$  [1, 6, 11] – параметри (характеристики) матеріалу, які визначають на підставі результатів руйнування маломасштабних зразків при їхньому випробуванні на триточковий згин;  $\mathbf{m}_{T_\varepsilon}$  – залежний від температури  $\mathbf{T}$  і пластичної деформації параметр, який можемо записати у вигляді [1, 6, 11]

$$\mathbf{m}_{T_\varepsilon}(\mathbf{T}, \kappa) = \mathbf{m}_T(\mathbf{T}) \mathbf{m}_\varepsilon(\kappa), \quad (12)$$

де  $\mathbf{m}_\varepsilon(\kappa) = \mathbf{S}_0 / \mathbf{S}_C(\kappa)$ ,  $\mathbf{m}_T(\mathbf{T}) = \mathbf{m}_0 \sigma_{Ys}(\mathbf{T})$ ,  $\mathbf{S}_0 \equiv \mathbf{S}_C(0)$ ;  $\mathbf{m}_0$  – стала, що визначається експериментально;  $\sigma_{Ys}$  – температурно-залежна складова межі текучості. Критерій (10) формулюватимемо у ймовірнісному формулюванні внаслідок чого параметр  $\sigma_d$  вважатимемо стохастичним з функцією розподілу Вейбула [12]

$$p(\sigma_d) = 1 - \exp \left( - \left( \frac{\sigma_d - \sigma_{d0}}{\%_d} \right)^\eta \right), \quad (13)$$

де  $\eta$ ,  $\sigma_{d0}$ ,  $\%_d$  – параметри розподілу.

3. **Числові результати та їхній аналіз.** Для розрахунків компактних зразків зі сталі 15X2НМФА застосовано метод скінченних різниць зі змінюваним кроком розбиття уздовж осей  $Ox$  ( $\mathbf{N}$  елементів),  $Oy$  ( $\mathbf{M}$  елементів) і  $Oz$  ( $\mathbf{K}$  елементів). Крок між точками розбиття був найменшим в околі вершини тріщини і на межах зразка. Розбиття за часом рівномірне. Характерний розмір комірки в околі вершини тріщини дорівнює середньому розміру зерна випробуваного металу (0,05 мм). На рис. 2 – 4 зображено результати розрахунків для брусків завдовжки 60 мм, завширшки 10 мм, завтовшки 50 мм і з глибиною пропилу посередині 3 мм і коефіцієнтом зміцнення матеріалу  $\eta_s = 0,05$ . Відстань між опорами – 40 мм; коефіцієнти –  $\mathbf{p}_{01} = 8$  МПа,  $\mathbf{p}_{02} = 10$  МПа; температура  $\mathbf{T} = 50$  °С.

Якщо задані температура  $\mathbf{T}_0$  і коефіцієнт інтенсивності напружень  $\mathbf{K}_1$ , то ймовірність крихкого руйнування розраховують у припущенні, що руйнування в кожній комірці, на які сітка розбиває тіло, є незалежною подією, за формулою

$$P_f(K_I)|_{T=T_0} = 1 - \exp \left[ - \frac{1}{(\%_0)^n} \sum_{l=1}^{\infty} \varpi_l \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} (\sigma_{nuc}^{l,n,m} - \sigma_{d0})^n \right]. \quad (14)$$

Тут  $\sigma_{nuc}^{l,n,m} = \sigma_1^{l,n,m} + m_T^{l,n,m} m_\varepsilon^{l,n,m} \sigma_{eff}^{l,n,m}$ ,  $\varpi_l = 2h_l / \rho_{uc}$ ;  $h_l$  – крок сітки розбиття розрахункової області за віссю Z (індекс „nuc” від англ. – necessary utilized cell [11]);  $H$  – товщина маломасштабного зразка;  $l, m, n$  – індекси елементарних комірок, утворених сітками розбиття відповідно вздовж осей  $Ox, Oy$  і  $Oz$ . В сумах залежності (14) враховують тільки ті комірки, які руйнуються за умовами

$$\sigma_{eff}^{l,n,m} \geq 0, \quad \sigma_1 \geq S_C, \quad \sigma_{nuc}^{l,n,m} \geq \sigma_{d0}. \quad (15)$$

На рис. 2, 3 зображено (суцільні лінії) залежності середнього напруження  $\sigma$  і параметра Одквіста  $\kappa$  від температури  $T$  в області вершини тріщини у площині  $z = 41,3$  мм, коли значення КІН дорівнювало  $K_I = 72,3$  МПа $\sqrt{м}$ ; штрихова та штрихова з трикутником лінії відповідають випадкам динамічного пружно-пластичного ставлення плоского напруженого та деформованого станів [1, 4].

Відмінність значень середніх напружень  $\sigma$  і параметра Одквіста  $\kappa$  в просторовому квазістатичному формулюванні і плоскій динамічній задачі напруженого стану перевищує 200 відсотків. Попри таку кількісно велику різницю, якісний аспект проблеми процесу руйнування матеріалу квазістатичне ставлення схоплює досить добре. Зі збільшенням температури спостерігаємо очевидне збільшення пластичних деформацій.

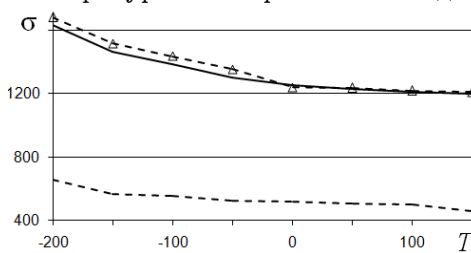


Рис. 2. Температурна залежність середніх напружень  $\sigma$

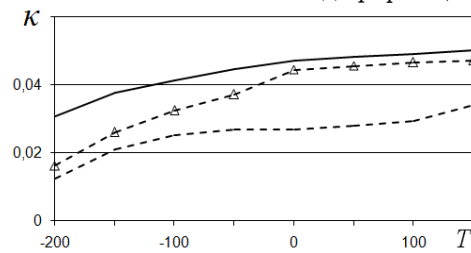
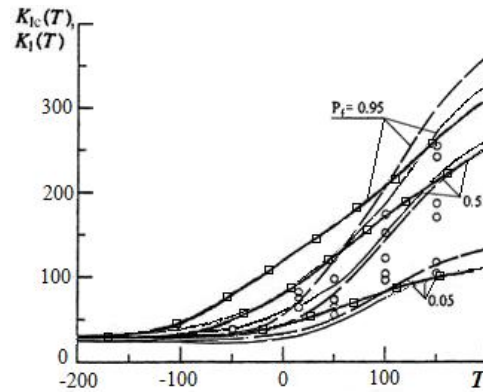


Рис. 3. Залежність параметра Одквіста  $\kappa$  від температури

При розрахунках імовірнісних кривих параметр  $m_T$  брали в такому вигляді [1, 6, 11]  $m_T = m_0(\sigma_{02}(T_0) - \sigma_{02}(350^\circ C))$ ,  $m_0 = 0,1$ . Застосовуючи динамічне пружно-пластичне формулювання, використання емпіричного параметра  $m_0$  взагалі не потрібне.

Рис. 4. Температурна залежність коефіцієнта  $K_{Ic}(T)$ 

Ймовірнісні криві будували для опромінених компактних зразків сталі 15X2NMФА, які перебувають у крихкому стані. Отримані криві температурної залежності коефіцієнта  $K_{Ic}(T)$  для крихкої сталі зображені на рис. 4 суцільними лініями. Кругечки та штрихові лінії відповідають експериментальним і розрахунковим результатам публікації [11]. Суцільні лінії з квадратними маркерами відповідають розрахунковим результатам публікації [6].

Щоб визначити необхідні для проведення розрахунків значень параметрів Вейбула, використовували лише три значення критичного коефіцієнта інтенсивності напружень (в'язкості руйнування) [11]  $K_{Ic}(50^\circ\text{C})|_{P_f=0,05} = 53$ ,  $K_{Ic}(50^\circ\text{C})|_{P_f=0,5} = 88$  і  $K_{Ic}(50^\circ\text{C})|_{P_f=0,95} = 123$ , які є ординатами точок штрихових ліній рис. 4 з абсцисою (температурою)  $50^\circ\text{C}$ . Мінімізація функції середньоквадратичного відхилення

$$\min \left( \sqrt{(P_f(53)|_{T=50^\circ\text{C}} - 0,05)^2 + (P_f(88)|_{T=50^\circ\text{C}} - 0,5)^2 + (P_f(123)|_{T=50^\circ\text{C}} - 0,95)^2} \right)$$

допомогла розрахувати значення параметрів Вейбула:  $\%_d = 17120$  МПа,  $\eta = 9$ ,  $\sigma_{d0} = 1603$  МПа. Для порівняння в табл. подано параметри розподілу Вейбула з публікацій [6, 11].

Для розрахунку значень функцій  $P_f(K_I)$  в (14) розв'язували задачі за різних значень температур  $T_0$  в діапазоні від  $-200^\circ\text{C}$  до  $200^\circ\text{C}$  з кроком  $50$  градусів. Обчислювали значення КІН  $K_I$  при значеннях імовірності крихкого руйнування  $0,05$ ,  $0,5$  і  $0,95$  і за отриманими даними на площині  $\text{ТОК}_I$  будували шукані залежності в'язкості руйнування  $K_{Ic}(T)$ .



Результати з публікації	Параметри розподілу Вейбула		
	$\sigma_d$	$\eta$	$\sigma_{d0}$
даної	17120 МПа	9	1603 МПа
[6]	17960 МПа	6	1590 МПа
[11]	4103 МПа	12	1840 МПа

Майже всі експериментальні дані, зображені на рис. 4 круглими маркерами, розташовані в області, обмеженій розрахунковими кривими. Однак наближення цих кривих до експериментальних результатів у разі квазістатичного підходу все ж гірше, ніж у разі використання динамічної моделі. Отримані параметри розподілу Вейбула значно відрізняються від отриманих в [1, 6] (див. табл.). Це свідчить про чутливість значень параметрів розподілу Вейбула до застосованої механічної моделі та методики визначення в'язкості руйнування. Можливо, треба також враховувати залежність цих параметрів від температури, незважаючи на загальноприйнятту думку, що така залежність надзвичайно слабка.

**Висновки.** Розв'язок тривимірної задачі в квазістатичному пружно-пластичному формулюванні для визначення в'язкості руйнування при триточковому згині дає змогу точніше визначати поля пластичних деформацій і напружень, аніж в [11], і можна використати в інженерних розрахунках так само, як і отриманий при застосуванні складнішого динамічного формулювання. Попри кількісно велику кількісну відмінність між результатами застосування динамічного та квазістатичного підходів якісний аспект проблеми процесу руйнування матеріалу він схоплює досить добре.

#### Список використаної літератури

1. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі чисельного моделювання плоского напруженого стану / В.Р. Богданов // Вісник Київського національного університету. Сер. "Фізико-математичні науки". – 2008. – Вип. 3. – С. 51–56.
2. Богданов В.Р. Динамічний розвиток тріщини у компактному зразку за пружно-пластичною моделлю плоского напруженого стану / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Вісник Київського нац. університету. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – № 4. – С. 51–54.
3. Богданов В.Р. Моделювання руху тріщини на основі числового розв'язування задачі плоского напруженого стану / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2010. – Вип. 73. – С. 192–204.
4. Богданов В.Р. О решении задачи плоского деформированного состояния материала с учетом упругопластических деформаций при динамическом нагружении / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим //

- Теоретическая и прикладная механика. – Донецьк. – 2010. – № 47. – С. 59–66.
5. Богданов В.Р. Моделирование подрастания трещины на основе численного решения задачи плоского деформированного состояния / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Збірник наукових праць «Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій». – Дніпропетровськ. – 2011. – № 15. – С. 33–44.
  6. Богданов В.Р. Визначення в'язкості руйнування матеріалу на основі числового моделювання плоского деформованого стану / В.Р. Богданов, Г.Т. Сулим // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2010. – № 6. – С. 16–24.
  7. Сборник: Теория пластичности. – М.: ИЛ, 1948.
  8. Аркулис Г.Э. Теория пластичности / Г.Э. Аркулис, В.Г. Дорогобид. – М.: Металлургия, 1987.
  9. Махненко В.И. Расчетные методы исследования кинетики сварочных напряжений и деформаций / В.И. Махненко. – К.: Наук. думка, 1976.
  10. Саврук М.П. Механика разрушения и прочность материалов / М.П. Саврук. – Т. 2. Коэффициенты интенсивности напряжений в телах с трещинами. – К.: Наук. думка, 1988.
  11. Margolin B.Z. Fracture toughness predictions for a reactor pressure vessel steel in the initial and highly embrittled states with the Master Curve approach and a probabilistic model / B.Z. Margolin, V.A. Shvetsova, A.G. Gulenko, A.V. Ilyin, V.A. Nikolaev, V.I. Smirnov // Pressure Vessels and Piping. – Jan. – 2002. – P. 219–231.
  12. Weibull W.A. A statistical theory of the strength of materials / W.A. Weibull // Roy. Swed. Inst. Eng. Res. – 1939. – 151. – P. 5–45.

**ОПРЕДЕЛЕНИЕ ВЯЗКОСТИ РАЗРУШЕНИЯ НА ОСНОВЕ  
РЕШЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ЗАДАЧИ В  
КВАЗИСТАТИЧЕСКОЙ УПРУГО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ  
ПОСТАНОВКЕ**

**Владислав БОГДАНОВ<sup>1</sup>, Георгий СУЛЫМ<sup>2</sup>**

<sup>1</sup>Національний Транспортний Університет,  
ул. Суворова, 1 01010 Киев, Украина

<sup>2</sup>Львовский национальный университет имени Ивана Франко,  
ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина

На основании разработанной аналитико-числовой методики решения пространственных задач в упруго-пластической квазистатической матема-

тической постановке с использованием метода конечных разностей определяется вероятностный характер температурной зависимости вязкости разрушения стали 15X2НМФА. Численное решение получено для тела в виде прямоугольного параллелепипеда с краевым пропилом-трещиной в плоскости симметрии (компактный образец) при трехточечном изгибе. Сравнение результатов расчетов с использованием квазистатической и динамической упруго-пластической формулировки свидетельствуют, что первая дает качественно хорошее описание явления разрушения, хотя количественные отклонения достаточно большие.

*Ключевые слова:* компактный профиль, упруго-пластическая деформация, вершина трещины, вязкость разрушения, температурная зависимость, вероятность, разностный метод.

## THE DESTRUCTION TOUGHNESS DETERMINATION ON THE BASE OF SOLUTION OF THREE DIMENSION PROBLEM IN QUASISTATIC PLASTIC-ELASTIC FORMULATION

Vladislav BOGDANOV<sup>1</sup>, Georgij SULYM<sup>2</sup>

<sup>1</sup>National Transport University,  
Suvorova Str., 1 01010 Kyiv, Ukraine  
<sup>2</sup>Ivan Franko National University of L'viv,  
Universytetska Str., 1 79000 L'viv, Ukraine

On the base of solution of three-dimensional problem and developed methodology of solution in quasi-static elastic-plastic mathematical model the destruction toughness of the embrittled steel 15X2НМФА has been determined. The numerical solution has calculated for three point band of material with transversal profile of shape of rectangle with middle notch-crack (compact profile) by method of finite differences. The quasi-static elastic-plastic model has compared to dynamic model. The results developed by the quasi-static elastic-plastic model are good enough in a qualitative sense, however in a quantitative sense these results have big difference with the results developed by second model.

*Key words:* compact specimen, elastic-plastic deformation, destruction toughness, temperature dependence, probability, finite differences method.

Стаття надійшла до редколегії 19.10.2011  
Прийнята до друку 31.05.2012