

УДК: 539.3

НЕСТАЦІОНАРНЕ ТЕМПЕРАТУРНЕ ПОЛЕ В ПІВСМУЗІ З ПОКРИТТЯМ ПРИ ТОРЦЬОВОМУ НАГРІВАННІ

Ольга ТУРЧИН

*Національний лісотехнічний університет України,
вул. Генерала Чупринки, 103 79057 Львів, Україна*

З використанням інтегрального перетворення Лагерра та \cos -перетворення Фур'є одержано розв'язок нестационарної задачі теплопровідності для композитної півсмуги, що нагрівається по бічній поверхні. Подано числовий аналіз температурного поля в симетричній півсмугі з покриттям при різних відношеннях теплофізичних характеристик покриття та основи.

Ключові слова: нестационарна теплопровідність, композитна півсмуга, перетворення Лагерра.

Практично всі елементи сучасної техніки, які залежно від призначення можуть зазнавати теплових чи силових навантажень різного типу, є неоднорідними за своїми властивостями. З одного боку, використання неоднорідності пов'язане з неможливістю задовольнити високі експлуатаційні вимоги, які тепер ставлять до матеріалів і конструкцій, лише за допомогою однорідних структур, а з іншого – з хімічними та фізичними процесами, що відбуваються під час їхнього виготовлення та експлуатації [4].

Основи теорії та методи розв'язування задач теплопровідності для тіл з різними тонкими неоднорідностями викладені у працях багатьох авторів, детальний огляд яких можна знайти, зокрема в [3]. Якщо опис неоднорідності з використанням математичних спрощень призводить до значних похибок, то використовують просторові формулювання. Цей підхід, як відомо [3, 7], ґрунтується на розгляді відповідних вихідних рівнянь для кожного елемента композитного тіла з подальшим узгодженням розв'язків через умови спряження елементів.

Мета нашої праці – розробити ефективну методику дослідження перехідних температурних полів у півбезмежних шаруватих середовищах при значній відмінності теплофізичних властивостей складових.

У зв'язку з цим розглянемо півсмугу $0 \leq x < \infty$, $0 \leq y \leq H$, яка складається з основи ($h_1 \leq y \leq h_1 + h_2$) та двох зовнішніх покриттів товщиною h_1 і h_3 , ($h_1 + h_2 + h_3 = H$) з відмінними від основи коефіцієнтами теплопровідності $\lambda_T^{(i)}$ та температуропровідності $a_T^{(i)}$. Починаючи з моменту часу $t = 0$, композитна півсмуга нагрівається по торцю $x = 0$ потоком тепла інтенсивності $q(t)$, а на граничних поверхнях $y = 0$, $y = H$ відбувається теплообмін за законом Ньютона з зовнішнім середовищем нульової температури.

Уведемо в розгляд безрозмірні змінні та величини $\alpha = \mathbf{x} / \mathbf{H}$, $\gamma = \mathbf{y} / \mathbf{H}$,
 $\tau = \mathbf{a}_T^{(2)} \mathbf{t} / \mathbf{H}^2$, $\gamma_1 = \mathbf{h}_1 / \mathbf{H}$, $\gamma_2 = (\mathbf{h}_1 + \mathbf{h}_2) / \mathbf{H}$, $\mathcal{Q}(\tau) = \mathbf{q}(\mathbf{H}^2 \tau / \mathbf{a}_T^{(2)}) \mathbf{H} / \lambda_T^{(2)}$,
 $\mathbf{B} \mathbf{i}_i = \kappa_i \mathbf{H} / \lambda_T^{(i)}$, $\mathcal{A}_T^{(i)} = \mathbf{a}_T^{(2)} / \mathbf{a}_T^{(i)}$, $\mathcal{X}_T^{(i)} = \lambda_T^{(i)} / \lambda_T^{(2)}$, де κ_i – коефіцієнти
 тепловіддачі з поверхні $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ ($\mathbf{i} = 1$) та з поверхні $\mathbf{y} = \mathbf{H}$ ($\mathbf{i} = 3$), $\mathbf{a}_T^{(2)}$ і
 $\lambda_T^{(2)}$ – теплофізичні характеристики основи.

Вважаючи, що між основою та покриттями виконуються умови
 ідеального теплового контакту, температурне поле $\mathbf{T}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau)$ в основі
 ($\mathbf{i} = 2$), верхньому ($\mathbf{i} = 1$) та нижньому ($\mathbf{i} = 3$) покритті визначимо з
 рівнянь нестационарної теплопровідності

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 \mathbf{T}^{(i)} + \partial_{\gamma\gamma}^2 \mathbf{T}^{(i)} = \mathcal{X}_T^{(i)} \partial_{\tau} \mathbf{T}^{(i)}, \quad \mathbf{i} = \overline{1, 3}; \quad (1)$$

за нульових початкових умов

$$\mathbf{T}^{(i)}(\alpha, \gamma, 0) = \mathbf{0}, \quad \mathbf{i} = \overline{1, 3}, \quad (2)$$

крайових умов

$$\mathcal{X}_T^{(i)} \partial_{\alpha} \mathbf{T}^{(i)} = -\mathcal{Q}(\tau), \quad \alpha = 0, \quad \mathbf{i} = \overline{1, 3}; \quad (3)$$

$$\partial_{\gamma} \mathbf{T}^{(1)} - \mathbf{B} \mathbf{i}_1 \mathbf{T}^{(1)} = \mathbf{0}, \quad \gamma = 0; \quad \partial_{\gamma} \mathbf{T}^{(3)} + \mathbf{B} \mathbf{i}_3 \mathbf{T}^{(3)} = \mathbf{0}, \quad \gamma = 1 \quad (4)$$

та умов спряження основи та покритть

$$\mathbf{T}^{(i)} = \mathbf{T}^{(i+1)}; \quad \mathcal{X}_T^{(i)} \partial_{\gamma} \mathbf{T}^{(i)} = \mathcal{X}_T^{(i+1)} \partial_{\gamma} \mathbf{T}^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad \mathbf{i} = \overline{1, 2}. \quad (5)$$

До рівнянь (1), крайових умов (4) та умов спряження (5) застосуємо
 інтегральне перетворення Лагерра [2] за часовою змінною τ та косинус-
 перетворення Фур'є за змінною α [5]. У підсумку, врахувавши початкові
 умови (2) та умови на торці півсмуги (3), прийдемо до послідовності
 крайових задач

$$\partial_{\alpha\alpha}^2 \bar{\mathbf{T}}_n^{(i)} - (\xi^2 + \lambda \mathcal{A}_T^{(i)}) \bar{\mathbf{T}}_n^{(i)} = \lambda \mathcal{A}_T^{(i)} \sum_{m=0}^{n-1} \bar{\mathbf{T}}_m^{(i)} - \mathcal{Q}_n^{(i)}, \quad \mathbf{n} = \mathbf{0}, \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{K}, \quad \mathbf{i} = \mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{3}, \quad (6)$$

де $\bar{\mathbf{T}}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \int_0^{\infty} \left[\int_0^{\infty} \exp(-\lambda\tau) \mathbf{T}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) \mathbf{L}_n(\lambda\tau) d\tau \right] \cos(\xi\alpha) d\alpha$ – трансформанти

за Лагерром і Фур'є, $\mathcal{Q}_n^{(i)} = \mathcal{Q}_n / \mathcal{X}_T^{(i)}$, $\mathcal{Q}_n = \int_0^{\infty} \exp(-\lambda\tau) \mathcal{Q}(\tau) \mathbf{L}_n(\lambda\tau) d\tau$ –

трансформанта за Лагерром, $L_n(\lambda\tau)$ – поліноми Лагерра, λ – масштабний множник [6].

Загальний розв'язок послідовності (6) подамо у вигляді

$$\bar{T}_n^{(i)}(\xi, \gamma) = \sum_{j=0}^n \left[A_{n-j}^{(i)}(\xi) G_j^{(i)}(\xi, \gamma) + B_{n-j}^{(i)}(\xi) W_j^{(i)}(\xi, \gamma) \right] + Q_n^{(i)}, \quad (7)$$

де $G_j^{(i)}(\xi, \gamma)$, $W_j^{(i)}(\xi, \gamma)$ – лінійно незалежні фундаментальні розв'язки однорідних послідовностей

$$\begin{aligned} d_{\gamma}^2 G_j^{(i)} - (\xi^2 + \lambda a_1^{(i)}) G_j^{(i)} &= \lambda a_1^{(i)} \sum_{m=0}^{j-1} G_m^{(i)}; \\ d_{\gamma}^2 W_j^{(i)} - (\xi^2 + \lambda a_1^{(i)}) W_j^{(i)} &= \lambda a_1^{(i)} \sum_{m=0}^{j-1} W_m^{(i)}, \end{aligned} \quad (8)$$

а $Q_n^{(i)}$ – частковий розв'язок неоднорідної послідовності, яка, враховуючи, що $Q_n^{(i)}$ не залежить від змінної γ , набуває вигляду рекурентного рівняння

$$Q_n^{(i)} = \frac{1}{\xi^2 + \lambda a_1^{(i)}} \left[Q_n^{(i)} - \lambda a_1^{(i)} \sum_{m=0}^{n-1} Q_m^{(i)} \right], \quad n = 0, 1, 2, \mathbf{K}, \quad i = 1, 2, 3, \quad (9)$$

розв'язок якого з використанням методу математичної індукції одержано у вигляді

$$Q_n^{(i)} = \frac{1}{\xi^2 + \lambda a_1^{(i)}} \left\{ Q_n^{(i)} - \frac{\lambda a_1^{(i)}}{\xi^2 + \lambda a_1^{(i)}} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{\xi^2}{\xi^2 + \lambda a_1^{(i)}} \right)^{n-1-k} Q_k^{(i)} \right\}. \quad (10)$$

Загальні розв'язки однорідних послідовностей (6) згідно з методом невизначених коефіцієнтів можна подати як

$$G_j^{(i)}(\xi, \gamma) = \exp(-\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(\omega_i \gamma)^k}{k!}, \quad W_j^{(i)}(\xi, \gamma) = \exp(\omega_i \gamma) \sum_{k=0}^j a_{j,k}^{(i)} \frac{(-\omega_i \gamma)^k}{k!}, \quad (11)$$

де введено позначення $\omega_i = \sqrt{\xi^2 + \lambda a_1^{(i)}}$.

Безпосередня підстановка розв'язків (11) у послідовності (12) призводить до рекурентних співвідношень на $a_{j,k}^{(i)}$ [6]

$$\mathbf{a}_{j,k+1}^{(i)} = 0.5 \left(\mathbf{a}_{j,k+2}^{(i)} - \frac{\lambda \mathbf{a}_i}{\omega_i^2} \sum_{m=k}^{j-1} \mathbf{a}_{m,k}^{(i)} \right) \quad (12)$$

при довільних $\mathbf{a}_{j,0}^{(i)}$.

Для знаходження невідомих $\mathbf{A}_k^{(i)}(\xi)$ та $\mathbf{B}_k^{(i)}(\xi)$, які входять до розв'язку (7), використаємо крайові умови (4) та умови спряження (5), які після застосування до них інтегральних перетворень Лагерра та Фур'є набудуть вигляду

$$\mathbf{d}_\gamma \bar{\mathbf{T}}_n^{(1)} - \mathbf{B}_1 \bar{\mathbf{T}}_n^{(1)} = 0, \quad \gamma = 0; \quad \mathbf{d}_\gamma \bar{\mathbf{T}}_n^{(3)} + \mathbf{B}_3 \bar{\mathbf{T}}_n^{(3)} = 0, \quad \gamma = 1 \quad (13)$$

$$\bar{\mathbf{T}}_n^{(i)} = \bar{\mathbf{T}}_n^{(i+1)}; \quad \mathcal{L}_T^{(i)} \mathbf{d}_\gamma \bar{\mathbf{T}}_n^{(i)} = \mathcal{L}_T^{(i+1)} \mathbf{d}_\gamma \bar{\mathbf{T}}_n^{(i+1)}, \quad \gamma = \gamma_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (14)$$

Прийmemo в рекурентних співвідношеннях (12) $\mathbf{a}_{0,0}^{(i)} = 1, \mathbf{a}_{j,0}^{(i)} = 0, j = 1, 2, \mathbf{K}$, тоді

$$\begin{aligned} \mathbf{G}_0^{(i)}(\xi, \gamma) &= \exp(-\omega_i \gamma), \quad \mathbf{d}_\gamma \mathbf{G}_0^{(i)}(\xi, \gamma) = -\omega_i \exp(-\omega_i \gamma), \\ \mathbf{W}_0^{(i)}(\xi, \gamma) &= \exp(\omega_i \gamma), \quad \mathbf{d}_\gamma \mathbf{W}_0^{(i)}(\xi, \gamma) = \omega_i \exp(\omega_i \gamma) \end{aligned} \quad (15)$$

та розглянемо, враховуючи (7), першу умову (13)

$$\begin{aligned} &\sum_{j=0}^n \left[\mathbf{A}_{n-j}^{(1)}(\xi) \left(\mathbf{d}_\gamma \mathbf{G}_j^{(1)}(\xi, 0) - \mathbf{B}_1 \mathbf{G}_j^{(1)}(\xi, 0) \right) + \right. \\ &\left. + \mathbf{B}_{n-j}^{(1)}(\xi) \left(\mathbf{d}_\gamma \mathbf{W}_j^{(1)}(\xi, 0) - \mathbf{B}_1 \mathbf{W}_j^{(1)}(\xi, 0) \right) \right] + \mathbf{Q}_n^{(1)} = 0. \end{aligned}$$

Залишиmo в лівій частині цих співвідношень невідомі з індексом n , а решту перенесемо в праву частину. Враховуючи подання (15), одержимо рівняння, яке пов'язує коефіцієнти $\mathbf{A}_n^{(1)}(\xi)$ та $\mathbf{B}_n^{(1)}(\xi)$ з коефіцієнтами, що мають індекси $k = 1, 2, \mathbf{K}, n - 1$ та відомими $\mathbf{Q}_n^{(1)}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n^{(1)}(\xi) (-\omega_1 - \mathbf{B}_1) + \mathbf{B}_n^{(1)}(\xi) (\omega_1 - \mathbf{B}_1) &= -\sum_{j=1}^n \left[\mathbf{A}_{n-j}^{(1)}(\xi) \left(\mathbf{d}_\gamma \mathbf{G}_j^{(1)}(\xi, 0) - \mathbf{B}_1 \mathbf{G}_j^{(1)}(\xi, 0) \right) + \right. \\ &\left. + \mathbf{B}_{n-j}^{(1)}(\xi) \left(\mathbf{d}_\gamma \mathbf{W}_j^{(1)}(\xi, 0) - \mathbf{B}_1 \mathbf{W}_j^{(1)}(\xi, 0) \right) \right] - \mathbf{Q}_n^{(1)}. \end{aligned}$$

Провівши аналогічні викладення з другою крайовою умовою (13) та умовами спряження (14), отримаємо послідовність систем рівнянь, яку можна записати у матричному вигляді

$$\begin{pmatrix} \mathbf{h}_{1,1} & \mathbf{h}_{1,2} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbf{h}_{2,1} & \mathbf{h}_{2,2} & \mathbf{h}_{2,3} & \mathbf{h}_{2,4} & 0 & 0 \\ \mathbf{h}_{3,1} & \mathbf{h}_{3,2} & \mathbf{h}_{3,3} & \mathbf{h}_{3,4} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{h}_{4,3} & \mathbf{h}_{4,4} & \mathbf{h}_{4,5} & \mathbf{h}_{4,6} \\ 0 & 0 & \mathbf{h}_{5,3} & \mathbf{h}_{5,4} & \mathbf{h}_{5,5} & \mathbf{h}_{5,6} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mathbf{h}_{6,5} & \mathbf{h}_{6,6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{A}_n^{(1)} \\ \mathbf{B}_n^{(1)} \\ \mathbf{A}_n^{(2)} \\ \mathbf{B}_n^{(2)} \\ \mathbf{A}_n^{(3)} \\ \mathbf{B}_n^{(3)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{c}_{n,1} \\ \mathbf{c}_{n,2} \\ \mathbf{c}_{n,3} \\ \mathbf{c}_{n,4} \\ \mathbf{c}_{n,5} \\ \mathbf{c}_{n,6} \end{pmatrix}, \quad (16)$$

де

$$\begin{aligned} \mathbf{h}_{1,1} &= -\omega_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{i}; \quad \mathbf{h}_{1,2} = \omega_1 - \mathbf{B}_1 \mathbf{i}; \quad \mathbf{h}_{6,5} = -\omega_3 + \mathbf{B}_3 \mathbf{i}; \quad \mathbf{h}_{6,6} = \omega_3 + \mathbf{B}_3 \mathbf{i}; \\ \mathbf{h}_{2i,2i-1} &= \exp(-\omega_i \gamma_i); \quad \mathbf{h}_{2i,2i} = \exp(\omega_i \gamma_i); \quad \mathbf{h}_{2i,2i+1} = -\exp(-\omega_{i+1} \gamma_i); \\ \mathbf{h}_{2i,2i+2} &= -\exp(\omega_{i+1} \gamma_i); \quad \mathbf{h}_{2i+1,2i-1} = -\mathcal{X}_T^{(i)} \omega_i \exp(-\omega_i \gamma_i); \quad \mathbf{h}_{2i+1,2i} = \mathcal{X}_T^{(i)} \omega_i \exp(\omega_i \gamma_i), \\ \mathbf{h}_{2i+1,2i+1} &= \mathcal{X}_T^{(i+1)} \omega_{i+1} \exp(-\omega_{i+1} \gamma_i); \quad \mathbf{h}_{2i,2i+2} = \mathcal{X}_T^{(i+1)} \omega_{i+1} \exp(-\omega_{i+1} \gamma_i), \quad \mathbf{i} = 1, 2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_{n,1} &= -\sum_{j=1}^n \left[\mathbf{A}_{n-j}^{(1)}(\xi) \left(\mathbf{d}_\gamma \mathbf{G}_j^{(1)}(\xi, 0) - \mathbf{B}_1 \mathbf{G}_j^{(1)}(\xi, 0) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{B}_{n-j}^{(1)}(\xi) \left(\mathbf{d}_\gamma \mathbf{W}_j^{(1)}(\xi, 0) - \mathbf{B}_1 \mathbf{W}_j^{(1)}(\xi, 0) \right) \right] - \mathbf{Q}_n^{(1)}, \\ \mathbf{c}_{n,6} &= -\sum_{j=1}^n \left[\mathbf{A}_{n-j}^{(3)}(\xi) \left(\mathbf{d}_\gamma \mathbf{G}_j^{(3)}(\xi, 1) + \mathbf{B}_3 \mathbf{G}_j^{(3)}(\xi, 1) \right) + \right. \\ &\quad \left. + \mathbf{B}_{n-j}^{(3)}(\xi) \left(\mathbf{d}_\gamma \mathbf{W}_j^{(3)}(\xi, 1) + \mathbf{B}_3 \mathbf{W}_j^{(3)}(\xi, 1) \right) \right]; \\ \mathbf{c}_{2i,n} &= -\sum_{j=1}^n \left[\mathbf{A}_{n-j}^{(i)}(\xi) \mathbf{G}_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) + \mathbf{B}_{n-j}^{(i)}(\xi) \mathbf{W}_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) \right] + \\ &\quad + \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{A}_{n-j}^{(i+1)}(\xi) \mathbf{G}_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) + \mathbf{B}_{n-j}^{(i+1)}(\xi) \mathbf{W}_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) \right]; \\ \mathbf{c}_{2i+1,n} &= -\mathcal{X}_T^{(i)} \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{A}_{n-j}^{(i)}(\xi) \mathbf{d}_\gamma \mathbf{G}_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) + \mathbf{B}_{n-j}^{(i)}(\xi) \mathbf{d}_\gamma \mathbf{W}_j^{(i)}(\xi, \gamma_i) \right] + \\ &\quad + \mathcal{X}_T^{(i+1)} \sum_{j=1}^n \left[\mathbf{A}_{n-j}^{(i+1)}(\xi) \mathbf{d}_\gamma \mathbf{G}_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) + \mathbf{B}_{n-j}^{(i+1)}(\xi) \mathbf{d}_\gamma \mathbf{W}_j^{(i+1)}(\xi, \gamma_i) \right], \quad \mathbf{i} = \overline{1, M-1}. \end{aligned}$$

Визначивши всі $\mathbf{A}_n^{(i)}(\xi)$ та $\mathbf{B}_n^{(i)}(\xi)$ з систем (16), остаточний розв'язок задачі подамо у вигляді

$$\mathbf{T}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) = \lambda \frac{2}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \mathbf{L}_n(\lambda\tau) \int_0^{\infty} \bar{\mathbf{T}}_n^{(i)}(\xi, \gamma) \cos(\xi\alpha) d\xi. \quad (17)$$

За формулою (17) проводили розрахунок температурного поля в півсмузі у випадку, коли інтенсивність потоку тепла на торці задається виразом $\Phi(\tau) = q^* (1 - \exp(-\tau_0\tau))$, де q^* – величина, що має розмірність температури, а τ_0 визначає час виходу теплового навантаження на стаціонарне значення. Тоді $\Phi_n = \Phi^* \left[\delta_{0n} / \lambda - (\tau_0)^n / (\lambda + \tau_0)^{n+1} \right]$, де δ_{0n} – символ Кронекера.

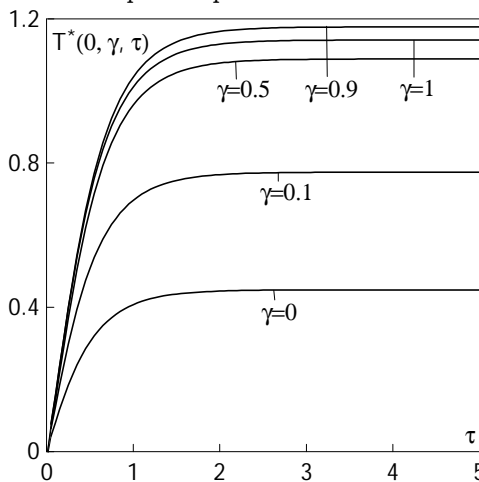


Рис. 1. Температура точок бокової поверхні при $\lambda_T^{(1)} / \lambda_T^{(2)} = a_T^{(1)} / a_T^{(2)} = 0.5$

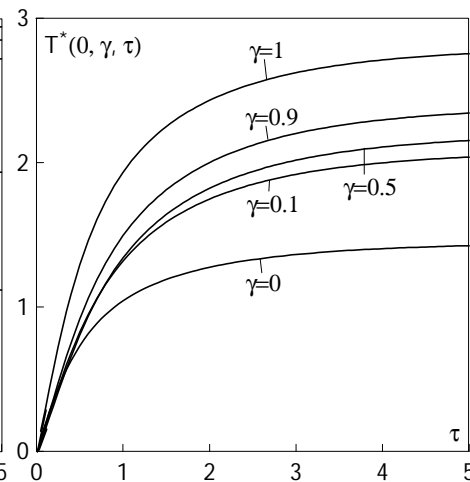


Рис. 2. Температура точок бокової поверхні при $\lambda_T^{(1)} / \lambda_T^{(2)} = a_T^{(1)} / a_T^{(2)} = 0.1$

Теплофізичні властивості матеріалів, які використовують на практиці як покриття та основи, на які їх наносять, можуть значно відрізнятись [7, 8]. Ми при числових розрахунках розглядали фізично та геометрично симетричну композитну півсмугу: $\lambda_T^{(1)} = \lambda_T^{(3)}, a_T^{(1)} = a_T^{(3)}, h_1 = h_3$ та два варіанта відношення теплофізичних властивостей покриття та основи: $\lambda_T^{(1)} / \lambda_T^{(2)} = a_T^{(1)} / a_T^{(2)} = 0.5$ і $\lambda_T^{(1)} / \lambda_T^{(2)} = a_T^{(1)} / a_T^{(2)} = 0.1$, які дають змогу визначити характерні особливості трансформації температурного поля в градієнтних композитних плитах і визначити вплив зміни градієнтності їхніх властивостей на розподіл температур та теплових потоків [8].

На рис. 1 та 2 подані результати розрахунку залежності від часу τ безрозмірної температури $\mathbf{T}^*(\alpha, \gamma, \tau) = \mathbf{T}^{(i)}(\alpha, \gamma, \tau) / \Phi^*$ точок на боковій

поверхні півсмуги при $\mathbf{Bi}_1 = 10$, $\mathbf{Bi}_3 = 1$, $\tau_0 = 4$ для першого (рис. 1) і другого (рис. 2) варіантів відношення теплофізичних властивостей.

Як бачимо, зниження відносних теплопровідних властивостей покриття призводить до підвищення температури усіх точок поверхні нагрівання і до збільшення тривалості перехідного періоду. Крім того, якщо для другого варіанта співвідношення теплофізичних властивостей температура рівномірно зростає по товщині півсмуги (від поверхні з більш інтенсивним теплообміном до поверхні з менш інтенсивним теплообміном), то для першого варіанта температура граничної поверхні $\gamma = 1$ нижча від температури поверхні поділу матеріалів покриття та основи $\gamma = 0.9$.

На рис. 3 і 4 показано результати розрахунку безрозмірної температури торця півсмуги та поверхні $\alpha = 0.5$ в різні моменти часу при $\lambda_T^{(1)} / \lambda_T^{(2)} = a_T^{(1)} / a_T^{(2)} = 0.1$.

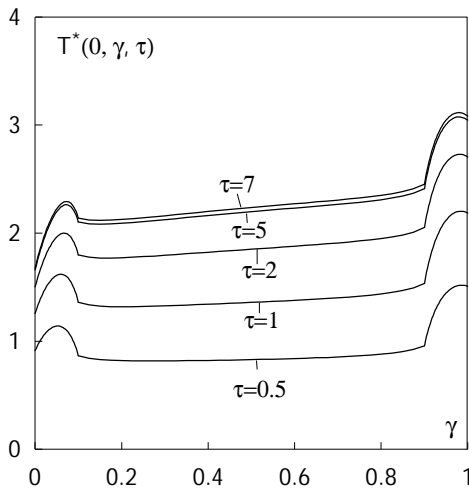


Рис. 3. Температура поверхні $\alpha = 0$ в різні моменти часу

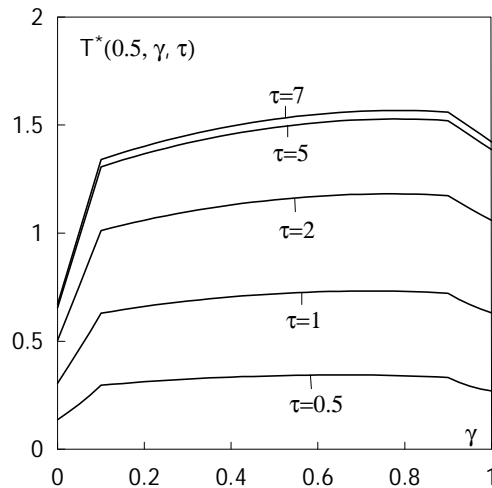


Рис. 4. Температура поверхні $\alpha = 0.5$ в різні моменти часу

Як видно, процеси нагрівання поверхонь, розташованих безпосередньо під джерелами тепла і на деякій відстані від них, якісно і кількісно різні. Безпосередня близькість джерел тепла зумовлює найінтенсивніше підвищення температури в покриттях, з віддаленням від поверхні нагрівання температура в них різко знижується, а сам процес нагріву покриттів в глибині півсмуги відбувається за рахунок теплопередачі від основи плити.

Список використаної літератури

1. *Абрамовиц М.* Справочник по специальным функциям / М. Абрамовиц, И. Стиган – М., 1979.
2. *Галазюк В.* Метод поліномів Чебишева–Лагерра в змішаній задачі для лінійного диференціального рівняння другого порядку з постійними коефіцієнтами / В. Галазюк // Доп. АН УРСР. – 1981. – №1. – С. 3–7.
3. *Коляно Ю.М.* Методы теплопроводности и термоупругости неоднородного тела / Ю.М. Коляно – К.: Наук. думка, 1992.
4. *Лилиус К.Р.* Функциональные градиентные материалы: развитие новых материаловедческих решений. / К.Р. Лилиус, М.М. Гасик // В кн.: Прогрессивные материалы и технологии. Т.2. –К., 2003. – С. 70-86.
5. *Снеддон И.* Преобразования Фурье / И. Снеддон. – М., 1955.
6. *Турчин О.* Нестационарное осесимметричное температурное поле в шароватому півпросторі, зумовлене імпульсним нагрівом / О. Турчин, І. Турчин // Вісн. Львів. у-ту. Серія мех.-мат. – 2008. – Вип. 69. – С. 256–261.
7. *Nomura N.* Thermo-mechanical modeling of functionally graded thermal barrier coatings / N. Nomura, M. Gasik, A. Kawasaki, R. Watanabe // Ceram. Trans. – Amer. Ceram. Soc. – USA. – 2001. – 114. – P. 223-229.
8. *Tamarin Y.* Protective coatings for turbine blades. / Y. Tamarin – ASM International, USA. – 2002.
9. *Yang X.-S.* Modelling Heat Transfer of Carbon Nanotubes / X.-S. Yang // Modelling and Simulation in Materials Science and Engineering. – 2005. – Vol. 13. – P. 893 – 902.
10. *Yangjian X.* Convective Heat Transfer Steady Heat Conduction and Thermal Stress in a Ceramic/FGM/Metal Composite EFBF Plate / X. Yangjian, T. Daihui, D. Haiyang // Journal of Software. – 2011. – Vol. 6., No 2. – P. 201–208
11. *Tanigawa Y.* Transient Heat Conduction and Thermal Stress Problems of a Nonhomogeneous Plate with Temperature-Dependent Material Properties / Y. Tanigawa, T. Akai, R. Kawamura, and N. Oka // J. Thermal Stresses. – 1996. – Vol. 19., No.1. – P. 77–102.

НЕСТАЦИОНАРНОЕ ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ В ПОЛУПОЛОСЕ С ПОКРЫТИЕМ ПРИ ТОРЦЕВОМ НАГРЕВЕ

Ольга ТУРЧИН

*Национальный лесотехнический университет Украины,
ул. Генерала Чупринки, 103 79057 Львов, Украина*

С использованием интегрального преобразования Лагерра и преобразования Фурье получено решение нестационарной задачи теплопроводности для композитной полуполосы, нагреваемой по боковой поверхности. Приводится численный анализ температурного поля в симметричной полуполосе с покрытием при различных отношениях теплофизических характеристик покрытия и основания.

Ключевые слова: нестационарная теплопроводность, композитная полуполоса, преобразование Лагерра.

UNSTEADY TEMPERATURE FIELD IN HALF-STRIP WITH COATING

OIha TURCHYN

*National Forestry University of Ukraine,
General Chuprinka Str., 103 79057 Lviv, Ukraine*

With using of Laguerre-Fourier integral transform we obtain a solution of the non-stationary problem of heat conduction for the composite half-strip. Half-strip is heated to a side surface. A numerical analysis of temperature field in a symmetric composite half-strip with different ratios of thermo-physical properties of the coating and the base.

Key words: non-stationary problem of heat conduction, Laguerre-Fourier integral transformation, composite half-strip.

Стаття надійшла до редколегії 10.10.2011

Прийнята до друку 31.05.2012