ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76. С. 29-45
Visnyk of the Lviv University. Series Mech.-Mat. Issue 76. P. 29-45

УДК 539.3

ДВОВІСНИЙ РОЗТЯГ КУСКОВО-ОДНОРІДНОЇ ІЗОТРОПНОЇ ПЛАСТИНИ З ПРЯМОЛІНІЙНОЮ МЕЖЕЮ ПОДІЛУ МАТЕРІАЛІВ І НЕНАСКРІЗНОЮ ТРІЩИНОЮ В НІЙ З УРАХУВАННЯМ ПЛАСТИЧНИХ ЗОН БІЛЯ ЇЇ ВЕРШИН

Мирон НИКОЛИШИН[1], **Віктор ОПАНАСОВИЧ**[2],

Леся КУРОТЧИН[1], **Микола СЛОБОДЯН**[2]

[1]*Інститут прикладних проблем механіки і математики ім. Я. С. Підстригача НАН України, вул. Наукова, 3б 79060 Львів, Україна*
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська, 1 79000 Львів, Україна*

Розглянуто задачу про двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з ненаскрізною тріщиною в прямолінійній межі поділу матеріалів. Припускають, що береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження, а біля її вершин на продовженні тріщини утворюються пластичні зони, де виконуються умови пластичності Треска у вигляді поверхневого пластичного шару. Позаяк тріщина не наскрізна, то розв'язок задачі розбиваємо на задачу розтягу та згину пластини, використовуючи класичну теорію згину. На підставі комплексних потенціалів плоскої задачі теорії пружності та задачі згину, їхній обмежений розв'язок зведено до задач лінійного спряження. Знайдено напружений стан пластини на межі поділу матеріалів. Проведено числовий аналіз задачі та визначено довжини пластичних зон і розкриття тріщини на її фронті.

Ключові слова: розтяг, пластина, тріщина, пластичні зони, комплексні потенціали, умова пластичності Треска, розкриття тріщини.

Вступ. У багатьох галузях техніки використовують пластинчасті елементи конструкцій, які досить легкі, проте достатньо надійні. Під час встановлення та експлуатації таких елементів у них виникають тріщиноподібні дефекти. Ці дефекти різко знижують допустиме навантаження і можуть привести до руйнування конструкції, тому важливо вивчати їхній вплив на напружено-деформований стан пластинчастих елементів.

Вперше задачу про напружено-деформований стан кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною досліджено в [31]. Схожі дослідження для однорідної ізотропної пластини подано в працях [27, 30]. В [29] розглянуто задачу розтягу однорідної пластини з півеліптичною поверхневою тріщиною, на продовженні якої утворюється пластична зона, у тривимірному формулюванні з використанням методу скінчених елементів. Задачу розтягу однорідної пластини з системою паралельних тріщин у пружному та пластичному формулюванні з використанням комплексних потенціалів Колосова-Мусхелішвілі та методу граничних елементів наведено в [26].

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

В [3] зробили огляд досліджень для задач розтягу тіл з тріщиною, у вершині якої утворюються пластичні зони, та подано критерії руйнування. У [7] досліджено одновісний розтяг пластини з наскрізною тріщиною у пластичному формулюванні. Визначення зон пластичності в околі вершин двох близько розміщених паралельних тріщин за повздовжнього зсуву виконано у праці [8]. Задачу про вплив міжфазних тріщин на напружено-деформований стан кусково-однорідної ізотропної пластини з прямолінійною межею поділу матеріалів досліджено в [17, 18, 23]. В [1] розв'язано схожу задачу для випадку анізотропних півплощин, у цьому разі розв'язок побудовано в класі функцій необмежених у вершинах тріщини. Вплив наскрізних тріщин, на продовженні яких утворюються пластичні зони, на напружено-деформований стан циліндричної оболонки досліджено в [9, 11, 13]. Зміцнення матеріалу на напружений стан пружно-пластичних оболонок описано в [4, 5].

У [24] розглянуто дві нерівні колінеарні тріщини у пластині з урахуванням пластичних зон за моделлю Дагдейля. Задачу про взаємодію поверхневих тріщин у пружно-пластичному формулюванні досліджено в [28]. У [25] з використанням умови пластичності Мізеса визначено пластичну область на продовженні тріщини у пластині.

Довжину пластичної зони та розкриття ненаскрізної тріщини при прикладенні до її берегів нормальних зусиль і згинних моментів в однорідній пластині розглянуто в [16]. Дослідженням напружено-деформованого стану кусково-однорідної пластини з наскрізною тріщиною та однорідної пластини з двома рівними тріщинами у пластичному формулюванні проведено у працях [14, 15].

Наша мета – дослідити задачу про двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з ненаскрізною тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів. Вважають, що береги тріщини вільні від навантаження, а в процесі деформування біля неї утворилися вузькі пластичні зони по всій товщині пластини. Аналогічно як у δ_c-моделі замінимо пластичні зони поверхнями розриву пружних переміщень, а реакцію пластичної зони на пружний об'єм – невідомими нормальними та дотичними напруженнями, які задовольняють умову пластичності Треска. З допомогою методів теорії функції комплексної змінної задачу розбиваємо на задачу розтягу та згину, зводимо до задач лінійного спряження, розв'язок яких шукаємо в класі функцій обмежених у вершинах тріщини. Числовий аналіз задачі виконано з використанням квадратурних формул Гаусса [19, 22].

Формулювання задачі. Розглянемо нескінченну кусково-однорідну ізотропну пластину завтовшки $2\boldsymbol{h}$ з прямолінійною межею поділу матеріалів. Нехай пластина перебуває під дією однорідного поля зусиль на нескінченності. Вважаємо, що на межі поділу матеріалів перебуває ненаскрізна тріщина заввишки $\boldsymbol{h}+\boldsymbol{h}_1$ і завдовжки $2\boldsymbol{l}$. Береги тріщини вільні від зовнішнього навантаження. Виберемо в серединній площині пластини декартову систему координат $\boldsymbol{Oxyz}$ з початком в центрі тріщини, вісь $\boldsymbol{Ox}$ спрямуємо по межі поділу матеріалів. Вважатимемо, що під дією

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

зовнішнього навантаження на продовженні тріщини виникають пластичні зони завдовжки $\boldsymbol{a}$, крім того, матеріал у перемичці $\boldsymbol{h}_1 \le \tilde{\boldsymbol{z}} \le \boldsymbol{h}$, $-\boldsymbol{l} \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{l}$ (рис. 1) також перейшов у пластичний стан. На межі поділу матеріалів поза тріщиною виконуються умови ідеального механічного контакту. В серединній площині пластини лінію спаю матеріалів позначимо через $\boldsymbol{L}'$, лінію, де розміщено тріщину, – через $\boldsymbol{L}$, а пластичні зони через – $\boldsymbol{L}_1'$ і $\boldsymbol{L}_1''$, у цьому разі $\boldsymbol{L}_1 = \boldsymbol{L}_1' \cup \boldsymbol{L}_1''$, $\tilde{\boldsymbol{L}} = \boldsymbol{L} \cup \boldsymbol{L}_1$, $\hat{\boldsymbol{L}} = \tilde{\boldsymbol{L}} \cup \boldsymbol{L}'$ (див. рис. 1). Граничне значення відповідних величин при $\boldsymbol{y} \to \pm 0$ будемо позначати знаками “+” і “–”, а для пружних сталих матеріалу $\boldsymbol{S}_j$ півплощини приписуватимемо індекс $\boldsymbol{j}$, який надалі приймає два значення 1 чи 2, а півплощину для якої $\boldsymbol{y} < 0$ $(\boldsymbol{y} > 0)$ – через $\boldsymbol{S}_1$ $(\boldsymbol{S}_2)$. Завдяки наявності пластичної зони в перемичці розв’язок задачі подано у вигляді розв’язків двох задач: плоскої задачі та задачі згину пластини, з використанням класичної теорії.

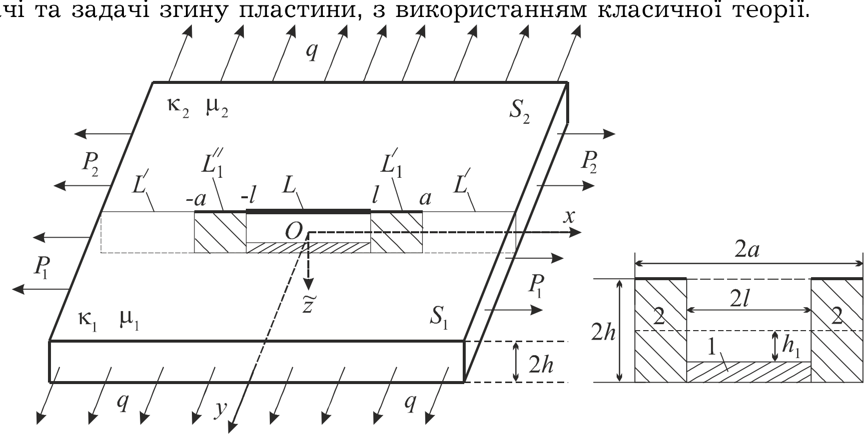

Рис. 1. Схема навантаження пластини та розміщення тріщини і пластичних зон

Для плоскої задачі згідно з формулюванням отримаємо такі крайові умови:

$$(\sigma_y - \boldsymbol{i}\tau_{xy})^+ = (\sigma_y - \boldsymbol{i}\tau_{xy})^-,\ (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{v})^+ = (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{i}\boldsymbol{v})^- \ \text{на}\ \boldsymbol{L}'; \qquad (1)$$

$$\sigma_y^{\pm} = \sigma_T \boldsymbol{b}_1,\ \tau_{xy}^{\pm} = 0\ \text{на}\ \boldsymbol{L},\ \sigma_y^{\pm} = \sigma_0,\ \tau_{xy}^{\pm} = \tau_0\ \text{на}\ \boldsymbol{L}_1',\ \sigma_y^{\pm} = \sigma_0,\ \tau_{xy}^{\pm} = -\tau_0\ \text{на}\ \boldsymbol{L}_1''; \qquad (2)$$

для задачі згину:

$$\boldsymbol{M}_y^{+} = \boldsymbol{M}_y^{-},\ \boldsymbol{H}_{xy}^{+} = \boldsymbol{H}_{xy}^{-},\ \boldsymbol{N}_y^{+} = \boldsymbol{N}_y^{-},\ \boldsymbol{w}^{+} = \boldsymbol{w}^{-},\ \partial_y \boldsymbol{w}^{+} = \partial_y \boldsymbol{w}^{-}\ \text{на}\ \boldsymbol{L}'; \qquad (3)$$

$$\boldsymbol{M}_y^{\pm} = \sigma_T \boldsymbol{b}_2,\ \boldsymbol{H}_{xy}^{\pm} = 0,\ \boldsymbol{N}_y^{\pm} = 0\ \text{на}\ \boldsymbol{L},\ \boldsymbol{M}_y^{\pm} = \boldsymbol{M}_0,\ \boldsymbol{H}_{xy}^{\pm} = \boldsymbol{H}_0,\ \boldsymbol{N}_y^{\pm} = 0\ \text{на}\ \boldsymbol{L}_1',$$

$$\boldsymbol{M}_y^{\pm} = \boldsymbol{M}_0,\ \boldsymbol{H}_{xy}^{\pm} = -\boldsymbol{H}_0,\ \boldsymbol{N}_y^{\pm} = 0\ \text{на}\ \boldsymbol{L}_1''; \qquad (4)$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

де $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$ – проекції вектора переміщення точки серединної площини на осі $\boldsymbol{Ox}$ і $\boldsymbol{Oy}$, відповідно; $\sigma_{\boldsymbol{y}}$, $\tau_{\boldsymbol{xy}}$ – компоненти тензора напружень; σ_0, τ_0 – невідоме нормальне та дотичне напруження у пластичній зоні; $\boldsymbol{w}$ – прогин точки серединної поверхні пластини; $\boldsymbol{M}_{\boldsymbol{y}}$, $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{xy}}$, $\boldsymbol{N}_{\boldsymbol{y}}$ – згинальний і крутний моменти та перерізувальна сила; $\boldsymbol{M}_0, \boldsymbol{H}_0$ – невідомі згинальний і крутний моменти у пластичній зоні; $\boldsymbol{b}_1 = (\boldsymbol{h} - \boldsymbol{h}_1)\big/(2\boldsymbol{h})$, $\boldsymbol{b}_2 = (\boldsymbol{h}^2 - \boldsymbol{h}_1^2)\big/2$; $\sigma_{\boldsymbol{T}} = \min(\sigma_{\boldsymbol{T}}^{(1)}, \sigma_{\boldsymbol{T}}^{(2)})$, $\sigma_{\boldsymbol{T}}^{(\boldsymbol{j})}$ – границя текучості матеріалу $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{j}}$ півплощини, де індекс $\boldsymbol{j}$ тут і надалі набуває двох значень 1 і 2, $\partial_{\boldsymbol{s}}$ – позначення часткової похідної по $\boldsymbol{s}$.

Побудова розв'язку плоскої задачі. Введемо комплексні потенціали Колосова-Мусхелішвілі $\Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})$ і $\Psi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})$ для кожної з півплощин $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{j}}$. Тоді згідно з [12] можемо записати

$$\begin{aligned} &\sigma_{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{i}\tau_{\boldsymbol{xy}} = \Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) + \overline{\Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})} + \boldsymbol{z}\overline{\Phi_{\boldsymbol{j}}'(\boldsymbol{z})} + \overline{\Psi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})}, \\ &2\mu_{\boldsymbol{j}}\partial_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{iv}\right) = \kappa_{\boldsymbol{j}}\Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) - \overline{\Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})} - \boldsymbol{z}\overline{\Phi_{\boldsymbol{j}}'(\boldsymbol{z})} - \overline{\Psi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})}, \end{aligned} \tag{5}$$

де $\boldsymbol{z} = \boldsymbol{x} + \boldsymbol{iy}$, $\boldsymbol{i}^2 = -1$, $\kappa_{\boldsymbol{j}} = \dfrac{3 - \nu_{\boldsymbol{j}}}{1 + \nu_{\boldsymbol{j}}}$; $\mu_{\boldsymbol{j}}$ – модуль зсуву; $\nu_{\boldsymbol{j}}$ – коефіцієнт Пуассона.

Для великих $\left|\boldsymbol{z}\right|$ мають місце розвинення [12]

$$\Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) = \Gamma_{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{o}(1\big/\boldsymbol{z}^2), \ \Psi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) = \Gamma_{\boldsymbol{j}}' + \boldsymbol{o}(1\big/\boldsymbol{z}^2). \tag{6}$$

Тут

$$\Gamma_{\boldsymbol{j}} = 0{,}25(\boldsymbol{P}_{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{q}), \ \Gamma_{\boldsymbol{j}}' = 0{,}5(\boldsymbol{q} - \boldsymbol{P}_{\boldsymbol{j}}). \tag{7}$$

Аналітично продовжимо функцію $\Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})$ з області $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{j}}$ в область $\boldsymbol{S}_{3-\boldsymbol{j}}$ за формулою [12]

$$\Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) = -\overline{\Phi}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z}\overline{\Phi}_{\boldsymbol{j}}'(\boldsymbol{z}) - \overline{\Psi}_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}). \tag{8}$$

Тоді залежності (5) можемо записати так:

$$\sigma_{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{i}\tau_{\boldsymbol{xy}} = \Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) - \Phi_{\boldsymbol{j}}(\overline{\boldsymbol{z}}) + (\boldsymbol{z} - \overline{\boldsymbol{z}})\overline{\Phi_{\boldsymbol{j}}'(\boldsymbol{z})}, \tag{9}$$

$$2\mu_{\boldsymbol{j}}\partial_{\boldsymbol{x}}\left(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{iv}\right) = \kappa_{\mathrm{j}}\Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) + \Phi_{\boldsymbol{j}}(\overline{\boldsymbol{z}}) - (\boldsymbol{z} - \overline{\boldsymbol{z}})\overline{\Phi_{\boldsymbol{j}}'(\boldsymbol{z})}. \tag{10}$$

На підставі (6) і (8) аналітичне продовження функції $\Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})$ (8) при великих $\left|\boldsymbol{z}\right|$ подамо у вигляді

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) = -\Gamma_{\boldsymbol{j}} - \Gamma'_{\boldsymbol{j}} + \boldsymbol{o}(1/\boldsymbol{z}^2). \tag{11}$$

Враховуючи (9), з крайових умов (1)–(2) отримуємо таку задачу лінійного спряження:

$$(\Phi_1(\boldsymbol{x}) + \Phi_2(\boldsymbol{x}))^+ - (\Phi_1(\boldsymbol{x}) + \Phi_2(\boldsymbol{x}))^- = 0\,,\ \boldsymbol{x} \in \breve{\boldsymbol{L}}\,. \tag{12}$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (12), одержимо

$$\theta(\boldsymbol{z}) = \Phi_1(\boldsymbol{z}) + \Phi_2(\boldsymbol{z}) = (\boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 - 2\boldsymbol{q})\ /\ 4\,. \tag{13}$$

Введемо функцію

$$\Phi(\boldsymbol{z}) = \mu_{3-\boldsymbol{j}}\kappa_{\mathrm{j}}\Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) - \mu_{\boldsymbol{j}}\Phi_{3-\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})\,, \tag{14}$$

то, як видно з другої крайової умови (1) та залежності (10), вона задовольняє умову

$$\Phi^+(\boldsymbol{x}) - \Phi^-(\boldsymbol{x}) = 0\,,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}'\,. \tag{15}$$

Звідси, враховуючи (6), (11) і (14), при великих $|\boldsymbol{x}|$, отримаємо

$$\mu_1(1 + \kappa_2)\boldsymbol{P}_2 - \mu_2(1 + \kappa_1)\boldsymbol{P}_1 = \left[3(\mu_1 \text{-} \mu_2) + \mu_2\kappa_1 - \mu_1\kappa_2\right]\boldsymbol{q}\,. \tag{16}$$

На підставі (13) і (14) знайдемо вирази для функцій $\Phi_1(\boldsymbol{z})$ і $\Phi_2(\boldsymbol{z})$ через введені функції $\theta(\boldsymbol{z})$ і $\Phi(\boldsymbol{z})$

$$\Phi_{\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) = \begin{cases} \boldsymbol{A}_{\boldsymbol{j}}^{-1}(\mu_{\boldsymbol{j}}\theta(\boldsymbol{z}) + \Phi(\boldsymbol{z})), \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{j}}, \\ \boldsymbol{A}_{3-\boldsymbol{j}}^{-1}(\mu_{\boldsymbol{j}}\kappa_{3\text{-j}}\theta(\boldsymbol{z}) - \Phi(\boldsymbol{z})), \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{S}_{3-\boldsymbol{j}}, \end{cases} \tag{17}$$

де $\boldsymbol{A}_{\boldsymbol{j}} = \mu_{\boldsymbol{j}} + \mu_{3-\boldsymbol{j}}\kappa_{\mathrm{j}}$.

Крайову умову (2) подамо так: $(\sigma_{\boldsymbol{y}} - \boldsymbol{i}\tau_{\boldsymbol{xy}})^+ = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{x} \in \tilde{\boldsymbol{L}}$, з якої на підставі (9) і (17) отримаємо

$$\Phi^+(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}\Phi^-(\boldsymbol{x}) = -\boldsymbol{A}\theta(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{A}_1\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\,,\ \boldsymbol{x} \in \tilde{\boldsymbol{L}}\,, \tag{18}$$

де

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sigma_{\mathrm{T}}\boldsymbol{b}_1\,,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}\,,\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sigma_0 - \boldsymbol{i}\tau_0\,,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}_1'\,,\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \sigma_0 + \boldsymbol{i}\tau_0\,,\ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{L}_1''\,,$$
$$\boldsymbol{A} = \mu_1\mu_2(1 - \kappa_1\kappa_2)\boldsymbol{A}_2^{-1}\,,\ \boldsymbol{g} = -\boldsymbol{A}_1\boldsymbol{A}_2^{-1}.$$

Якщо ввести функцію

$$\Phi_0(\boldsymbol{z}) = \Phi(\boldsymbol{z}) + \boldsymbol{A}\theta(\boldsymbol{z})\ /\ (1 - \boldsymbol{g})\,, \tag{19}$$

то вона, як випливає з (18), є розв'язком такої крайової задачі:

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\Phi_0^+(x) - g\Phi_0^-(x) = A_1 f(x)\,,\ x \in L\,. \tag{20}$$

Розв'язавши задачу лінійного спряження (20), одержимо

$$\Phi_0(z) = A_1 X_0(z)[\sigma_T b_1 g(L,z) + \sigma_0 g(L_1,z) - \tau_0 i g(L_1',z) + \tau_0 i g(L_1'',z)]\,, \tag{21}$$

$$g(L,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{X_0^+(t)(t-z)}\,,\ X_0(z) = \frac{(z-a)^{0,5+i\beta}}{(z+a)^{-0,5+i\beta}}\,,\ \beta = -\frac{\ln|g|}{2\pi}. \tag{22}$$

Враховуючи (6), (11), (13), (14), (19), для функції $\Phi_0(z)$ правильне розвинення

$$\Phi_0(z) = A_1 q\big/(1-g) + O(1\big/z^2)\,. \tag{23}$$

З іншого боку, на підставі (21) при великих $|z|$ отримаємо

$$\Phi_0(z) = A_1\left(a_1 + (a_2 - 2ia\beta a_1)\big/z + \ldots\right), \tag{24}$$

де

$$a_1 = e^{\beta\pi}[\sigma_T b_1 I_c^0 + \sigma_0 I_c - \tau_0 I_s]\,/\,\pi,\ a_2 = -ie^{\beta\pi}[\sigma_T b_1 I_{st}^0 + \sigma_0 I_{st} + \tau_0 I_{ct}]\,/\,\pi,$$

$$I_\rho = \int_l^a g_\rho(t)dt\,,\ I_c^0 = \int_0^l g_c(t)dt\,,\ I_{\rho t} = \int_l^a g_\rho(t)tdt\,,\ I_{st}^0 = \int_0^l g_s(t)tdt\,;$$

$$g_c(t) = \frac{\cos b(t)}{\sqrt{a^2-t^2}}\,,\ g_s(t) = \frac{\sin b(t)}{\sqrt{a^2-t^2}}\,,\ b(t) = \beta\ln\left|\frac{a-t}{a+t}\right|. \tag{25}$$

Тут індекс ρ набуває двох значень c чи s.

Враховуючи (23) і (24), отримаємо

$$a_1 = q\big/(1-g)\,,\ a_2 = 2i\beta a_1 a\,. \tag{26}$$

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь (26) стосовно σ_0 і τ_0, можемо записати

$$\sigma_0 = [-\sigma_T b_1(I_c^0 I_{ct} + I_s I_{st}^0) + b_4(I_{ct} - 2a\beta I_s)]\,/\,b_5\,, \tag{27}$$

$$\tau_0 = [\sigma_T b_1(I_c^0 I_{st} + I_c I_{st}^0) - b_4(I_{st} + 2a\beta I_c)]\,/\,b_5\,, \tag{28}$$

де

$$b_4 = q\pi e^{-\beta\pi}\,/\,(1-g)\,,\ b_5 = I_c I_{ct} + I_s I_{st}\,. \tag{29}$$

Компоненти тензора напружень вздовж осі Ox знайдемо за формулами

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$
\begin{aligned}
&\sigma_{\boldsymbol{y}}^{\pm} - \boldsymbol{i}\tau_{\boldsymbol{xy}}^{\pm} = \boldsymbol{A}_1^{-1}\left[\Phi_0^{+}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}\Phi_0^{-}(\boldsymbol{x})\right],\\
&\sigma_{\boldsymbol{x}}^{+} = \boldsymbol{A}_1^{-1}\,\mathrm{Re}\left[3\Phi_0^{+}(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}\Phi_0^{-}(\boldsymbol{x})\right] + \boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{q}(3+\boldsymbol{g})\,/\,(1-\boldsymbol{g}),\\
&\sigma_{\boldsymbol{x}}^{+} + \sigma_{\boldsymbol{x}}^{-} - 2\sigma_{\boldsymbol{y}}^{\pm} = \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{P}_2 - 2\boldsymbol{q}, -\infty < \boldsymbol{x} < \infty.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Якщо ввести позначення

$$
\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{s}}^{\pm}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{a}} \frac{\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{t})}{(\boldsymbol{t} \pm \boldsymbol{x})}\boldsymbol{dt},\ \boldsymbol{I}_{\boldsymbol{c}}^{\pm}(\boldsymbol{x}) = \int_{\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{a}} \frac{\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{t})}{(\boldsymbol{t} \pm \boldsymbol{x})}\boldsymbol{dt},\ \boldsymbol{I}_{\rho}(\boldsymbol{x}) = \int_{-\boldsymbol{l}}^{\boldsymbol{l}} \frac{\boldsymbol{g}_{\rho}(\boldsymbol{t})}{(\boldsymbol{t} - \boldsymbol{x})}\boldsymbol{dt},
\tag{31}
$$

то на підставі залежностей (30) отримуємо такі вирази для компонент тензора напружень на дійсній осі:

$$
\begin{aligned}
\sigma_{\boldsymbol{x}}^{+}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{b}_6(\sigma_0 - \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{g}_3(\boldsymbol{x})[(\sigma_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b}_1 - \sigma_0)\boldsymbol{g}_5(\boldsymbol{x}) + \tau_0\{\boldsymbol{g}_6(\boldsymbol{x}) + \boldsymbol{g}_7^{+}(\boldsymbol{x})\}], \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{l},\boldsymbol{a});\\
\sigma_{\boldsymbol{x}}^{+}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{b}_6(\sigma_0 - \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{g}_3(\boldsymbol{x})[(\sigma_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b}_1 - \sigma_0)\boldsymbol{g}_5(\boldsymbol{x}) - \tau_0\{\boldsymbol{g}_6(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{g}_7^{-}(\boldsymbol{x})\}], \boldsymbol{x} \in (-\boldsymbol{a},-\boldsymbol{l});\\
\sigma_{\boldsymbol{x}}^{+}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{b}_6(\sigma_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b}_1 - \boldsymbol{q}) + \boldsymbol{P}_1 + \boldsymbol{g}_3(\boldsymbol{x})[(\sigma_0 - \sigma_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b}_1)\boldsymbol{g}_8^{+}(\boldsymbol{x}) - \tau_0\boldsymbol{g}_9^{-}(\boldsymbol{x})], \boldsymbol{x} \in (-\boldsymbol{l},\boldsymbol{l});\\
\sigma_{\boldsymbol{y}}^{\pm}(\boldsymbol{x}) &= (1-\boldsymbol{g})\boldsymbol{g}_4(\boldsymbol{x})[-\sigma_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{g}_6(\boldsymbol{x}) - \sigma_0\boldsymbol{g}_9^{-}(\boldsymbol{x}) - \tau_0\boldsymbol{g}_8^{-}(\boldsymbol{x})],\\
\tau_{\boldsymbol{xy}}^{\pm}(\boldsymbol{x}) &= -(1-\boldsymbol{g})\boldsymbol{g}_4(\boldsymbol{x})[-\sigma_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{g}_5(\boldsymbol{x}) - \sigma_0\boldsymbol{g}_8^{+}(\boldsymbol{x}) + \tau_0\boldsymbol{g}_9^{+}(\boldsymbol{x})],\\
\sigma_{\boldsymbol{x}}^{+}(\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{P}_1 - \boldsymbol{q}\boldsymbol{b}_6 + (3+\boldsymbol{g})\boldsymbol{g}_4(\boldsymbol{x})[-\sigma_{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{b}_1\boldsymbol{g}_6(\boldsymbol{x}) - \sigma_0\boldsymbol{g}_9^{-}(\boldsymbol{x}) - \tau_0\boldsymbol{g}_8^{-}(\boldsymbol{x})], \boldsymbol{x} \in (\boldsymbol{a},\infty);
\end{aligned}
$$

де

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{g}_3(\boldsymbol{x}) = 2\sqrt{\boldsymbol{a}^2 - \boldsymbol{x}^2}\Big/\pi,\ \boldsymbol{g}_4(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{e}^{\beta\pi}\sqrt{\boldsymbol{x}^2 - \boldsymbol{a}^2}\Big/2\pi,\ \boldsymbol{g}_{\rho}^{\pm}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{I}_{\rho}^{-}(\boldsymbol{x}) \pm \boldsymbol{I}_{\rho}^{+}(\boldsymbol{x}),\\
&\boldsymbol{g}_5(\boldsymbol{x}) = \sin\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}) - \cos\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{g}_6(\boldsymbol{x}) = \sin\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{s}}(\boldsymbol{x}) + \cos\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{x}),\\
&\boldsymbol{g}_7^{\pm}(\boldsymbol{x}) = \pm 2\{\sin\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{s}}^{\pm}(\boldsymbol{x})\ \mathbf{m}\ \cos\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{c}}^{\pm}(\boldsymbol{x})\},\ \boldsymbol{g}_8^{\pm}(\boldsymbol{x}) = \sin\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{c}}^{\mathbf{m}}(\boldsymbol{x}) - \cos\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{s}}^{\pm}(\boldsymbol{x}),\\
&\boldsymbol{g}_9^{\pm}(\boldsymbol{x}) = \cos\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{c}}^{\pm}(\boldsymbol{x}) + \sin\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\boldsymbol{g}_{\boldsymbol{s}}^{\mathbf{m}}(\boldsymbol{x}),\ \boldsymbol{b}_6 = (3+\boldsymbol{g})\,/\,(1-\boldsymbol{g}).
\end{aligned}
$$

Задача згину пластини. Введемо комплексні потенціали $\Phi_{3\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})$ і $\Psi_{3\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})$ для кожної з півплощин $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{j}}$ та аналітичне продовження функції $\Phi_{3\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})$ з області $\boldsymbol{S}_{\boldsymbol{j}}$ в область $\boldsymbol{S}_{3-\boldsymbol{j}}$ за формулою

$$
\Phi_{3\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) = -\bar{\Phi}_{3\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) - \boldsymbol{z}\bar{\Phi}'_{3\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) - \bar{\Psi}_{3\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}),
$$

тоді згідно з [20] можемо записати

$$
\partial_{\boldsymbol{x}}(\partial_{\boldsymbol{x}}\boldsymbol{w} + \boldsymbol{i}\partial_{\boldsymbol{y}}\boldsymbol{w}) = \Phi_{3\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) - \Phi_{3\boldsymbol{j}}(\bar{\boldsymbol{z}}) + (\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}})\overline{\Phi'_{3\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})},\ \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{j}},
\tag{32}
$$

$$
2\text{‰}_{\boldsymbol{j}}\boldsymbol{f}^{\text{‰}} = \text{‰}_{\mathrm{j}}\Phi_{3\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z}) + \Phi_{3\boldsymbol{j}}(\bar{\boldsymbol{z}}) - (\boldsymbol{z} - \bar{\boldsymbol{z}})\overline{\Phi'_{3\boldsymbol{j}}(\boldsymbol{z})},\ \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{S}_{\boldsymbol{j}},
\tag{33}
$$

де

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

$$\tilde{f} = M_y + i(H_{xy} + \int_{-a}^{x} N_y dx),$$

$$\tilde{\beta}_j = -0,75(1+\nu_j) / E_j h^3, \ \tilde{\kappa}_j = (3+\nu_j) / (1-\nu_j), \ E_j \text{ – модуль Юнга.}$$

Для комплексного потенціалу $\Phi_{3j}(z)$ правильне розвинення

$$\Phi_{3j}(z) = O(1/z^2), \ |z| \to \infty. \tag{34}$$

Введемо функції

$$\theta_3(z) = \tilde{\Phi}_{31}(z) + \tilde{\Phi}_{32}(z), \ z \in S_j, \tag{35}$$

$$\Phi_3(z) = \tilde{\beta}_{3-j}\tilde{\kappa}_j\Phi_{3j}(z) - \tilde{\beta}_j\Phi_{33-j}(z), \ z \in S_j. \tag{36}$$

З частини крайових умов (3) і (4) можемо записати

$$\tilde{f}^{+} = \tilde{f}^{-}, \ x \in \tilde{L}. \tag{37}$$

Якщо врахувати (33) і (36), то з крайової умови (37) одержимо, що функція $\Phi_3(z)$ задовольняє задачу лінійного спряження

$$\Phi_3^{+}(x) - \Phi_3^{-}(x) = 0, \ x \in \tilde{L},$$

розв'язок якої набув вигляду

$$\Phi_3(z) = 0. \tag{38}$$

Розв'язавши систему алгебричних рівнянь (35) і (36) стосовно $\Phi_{3j}(z)$ та врахувавши (38), отримаємо

$$\Phi_{3j}(z) = \begin{cases} \tilde{A}_j^{-1}\tilde{\beta}_j\theta_3(z), z \in S_j, \\ \tilde{A}_{3-j}^{-1}\tilde{\beta}_j\tilde{\kappa}_{3-j}\theta_3(z), z \in S_{3-j}. \end{cases} \tag{39}$$

Тут $\tilde{A}_j = \tilde{\beta}_j + \tilde{\beta}_{3-j}\tilde{\kappa}_j$.

Якщо врахувати крайові умови (3) і (4), а також залежності (32), (33) і (39), то одержимо, що функція $\theta_3(z)$ задовольняє такі крайові умови:

$$\begin{aligned} &\theta_3^{+}(x) - \theta_3^{-}(x) = 0, x \in L', \\ &\theta_3^{+}(x) - \tilde{g}\theta_3^{-}(x) = \tilde{A}^{-1}\tilde{f}_1(x), x \in \tilde{L}, \end{aligned} \tag{40}$$

де

$$\tilde{A} = \tilde{\kappa}_1 / (2\tilde{A}_1), \ \tilde{g} = -\tilde{\kappa}_2\tilde{A}_1 / (\tilde{A}_2\tilde{\kappa}_1),$$

$$\tilde{f}_1(x) = \sigma_T b_2, \ x \in L, \ \tilde{f}_1(x) = M_0 + iH_0, \ x \in L_1', \ \tilde{f}_1(x) = M_0 - iH_0, \ x \in L_1''.$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Розв'язок задачі лінійного спряження (40) можна зобразити так:

$$\theta_3(z) = \tilde{A}^{-1}\tilde{X}_0(z)[\sigma_T b_2 \tilde{g}(L,z) + M_0 \tilde{g}(L_1,z) + iH_0 \tilde{g}(L_1',z) - iH_0 \tilde{g}(L_1'',z)], \quad (41)$$

де

$$\tilde{X}_0(z) = \frac{(z-a)^{0,5+i\tilde{\beta}}}{(z+a)^{-0,5+i\tilde{\beta}}}, \ \tilde{g}(L,z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{\tilde{X}_0^+(t)(t-z)}, \ \tilde{\beta} = -\frac{\ln\left|\tilde{g}\right|}{2\pi}. \quad (42)$$

Знайдемо розвинення функції $\theta_3(z)$ при $\left|z\right| \to \infty$ двояко, враховуючи формули (35) і (34)

$$\theta_3(z) = O(1/z^2), \quad (43)$$

та залежність (41)

$$\theta_3(z) = \tilde{A}^{-1}\left(\tilde{\alpha}_1 + (\tilde{\alpha}_2 - 2ia\tilde{\beta}\tilde{\alpha}_1)/z + \ldots\right). \quad (44)$$

Тут

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_1 &= e^{\tilde{\beta}\pi}[\sigma_T b_2 \tilde{I}_c^0 + M_0 \tilde{I}_c + H_0 \tilde{I}_s] / \pi, \\ \tilde{\alpha}_2 &= -ie^{\tilde{\beta}\pi}[\sigma_T b_2 \tilde{I}_{st}^0 + M_0 \tilde{I}_{st} - H_0 \tilde{I}_{ct}] / \pi, \end{aligned} \quad (45)$$

вирази для $\tilde{I}_m^0$, $\tilde{I}_m$ отримають із виразів для I_m^0 і I_m заміною $\beta \to \tilde{\beta}$.

На підставі (43) і (44) запишемо

$$\tilde{\alpha}_1 = 0, \ \tilde{\alpha}_2 = 0. \quad (46)$$

Підставляючи (45) у (46) та розв'язуючи отриману систему лінійних алгебричних рівнянь стосовно M_0 і H_0, одержимо

$$M_0 = \tilde{b}_5(\tilde{I}_c^0 \tilde{I}_{ct} + \tilde{I}_s \tilde{I}_{st}^0), \ H_0 = \tilde{b}_5(\tilde{I}_c^0 \tilde{I}_{st} - \tilde{I}_c \tilde{I}_{st}^0), \quad (47)$$

де $\tilde{b}_5 = -\sigma_T b_2 \Big/ \left(\tilde{I}_c \tilde{I}_{ct} + \tilde{I}_s \tilde{I}_{st}\right)$.

Згинальні та крутні моменти на дійсній осі визначимо за формулами

$$\begin{aligned} &M_y^{\pm} + iH_{xy}^{\pm} = \tilde{A}\left[\theta_3^+(x) - \tilde{g}\theta_3^-(x)\right], d_j = (\tilde{\kappa}_j - 2) / \tilde{\kappa}_j, \\ &M_x^+ = \tilde{A}\,\mathrm{Re}\left[d_1\theta_3^+(x) + \tilde{g}\theta_3^-(x)\right], M_x^- = -\tilde{A}\,\mathrm{Re}\left[\theta_3^+(x) + \tilde{g}d_2\theta_3^-(x)\right]. \end{aligned} \quad (48)$$

Якщо врахувати вирази для функцій $\theta_3(z)$ (41), то на підставі (48) отримаємо

$$M_x^+(x) = b_3 M_0 + \tilde{g}_{10}(x)[(\sigma_T b_2 - M_0)\tilde{g}_5(x) - H_0(\tilde{g}_6(x) - \tilde{g}_7^+(x))], x \in (l,a);$$

$$M_x^+(x) = b_3 M_0 + \tilde{g}_{10}(x)[(\sigma_T b_2 - M_0)\tilde{g}_5(x) + H_0(\tilde{g}_6(x) - \tilde{g}_7^-(x))], x \in (-a,-l);$$

$$M_x^+(x) = b_3 \sigma_T b_2 + \tilde{g}_{10}(x)[(M_0 - \sigma_T b_2)\tilde{g}_8^+(x) + H_0 \tilde{g}_9^+(x)], x \in (-l,l);$$

$$M_y^{\pm}(x) = (1-\tilde{g})\tilde{g}_4(x)[-\sigma_T b_2\tilde{g}_6(x) - M_0\tilde{g}_9^-(x) + H_0\tilde{g}_8^-(x)], \tag{49}$$

$$H_{xy}^{\pm}(x) = (1-\tilde{g})\tilde{g}_4(x)[-\sigma_T b_2\tilde{g}_5(x) - M_0\tilde{g}_8^+(x) - H_0\tilde{g}_9^+(x)],$$

$$M_x^{+}(x) = b_3\tilde{g}_4(x)[-\sigma_T b_2\tilde{g}_6(x) - M_0\tilde{g}_9^-(x) + H_0\tilde{g}_8^-(x)],$$

$$M_x^{-}(x) = -\{1+\tilde{g}d_2\}\tilde{g}_4(x)[-\sigma_T b_2\tilde{g}_6(x) - M_0\tilde{g}_9^-(x) + H_0\tilde{g}_8^-(x)], x \in (a,\infty);$$

де $\tilde{g}_8(x) = \sqrt{|a^2 - x^2|}\Big/(2\pi)$, $b_3 = (d_1 + \tilde{g}) / (1-\tilde{g})$, $\tilde{g}_{10}(x) = 2\tilde{g}_8(x)(\tilde{h}_1 - 1) / \tilde{h}_1$, вирази для $\tilde{I}_m^k(x)$, $\tilde{g}_m^k(x)$ отримуємо зі співвідношень для $I_m^k(x)$, $g_m^k(x)$ заміною $\beta \to \tilde{\beta}$.

Зауважимо таке: якщо прийняти $h_1 / h = 1$, то отримаємо результати про розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з наскрізною тріщиною, які подано в [15], а в випадку однорідної пластини отримаємо відомі результати з монографії [21].

Числовий аналіз задачі. Для знаходження довжини a пластичної зони на продовженні тріщини використаємо умову пластичності Треска [2] у вигляді умови пластичності поверхневого шару [6, 10]

$$\max\left\{|\sigma_1^p|, |\sigma_2^p|, |\sigma_1^p - \sigma_2^p|\right\} = \sigma_T, \tag{50}$$

де

$$\sigma_{1,2}^p = \left(\sigma_x^p + \sigma_y^p \pm \sqrt{(\sigma_x^p - \sigma_y^p)^2 + 4(\tau_{xy}^p)^2}\right) / 2.$$

Напруження на поверхні пластини σ_j^p є комбінацією напружень плоскої задачі та задачі згину, які знаходимо за відомими формулами через відповідні моменти (49).

Розкриття тріщини δ у вершині $x = l$ на нижній основі пластини знайдемо за формулою

$$\delta(x) = A_1(g-1)\Big/(4\pi g\mu_1\mu_2)\int_a^l \sqrt{a^2 - x^2}[(\sigma_0 - \sigma_T b_1)g_6(x) + \tau_0 g_5(x) -$$

$$-2\tau_0\{\cos b(x) I_s^+(x) + \sin b(x) I_c^+(x)\}]dx + h\tilde{A}_1(\tilde{g}-1)\Big/(2\pi\tilde{g})\int_a^l \sqrt{a^2 - x^2}[(M_0 - \tag{57}$$

$$-\sigma_T b_2)\tilde{g}_6(x) - H_0\tilde{g}_5(x) + 2H_0\{\cos\tilde{b}(x)\tilde{I}_s^+(x) + \sin\tilde{b}(x)\tilde{I}_c^+(x)\}]dx.$$

Числовий аналіз задачі проведено з використанням квадратурних формул Гаусса для нитесилу $\sigma_T^{(1)} = 278$ МПа, $E_1 = 1{,}38 \cdot 10^5$ МПа та

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

технічно чистого заліза $\underset{T}{\sigma}^{(2)} = 130$ МПа, $\boldsymbol{E}_2 = 2,08 \cdot 10^5$ МПа, $\nu_1 = \nu_2 = 0,3$. На рис. 2–9 суцільні лінії зображені для верхньої основи пластини ($\boldsymbol{z} = -\boldsymbol{h}$), а штрихові – для нижньої основи пластини ($\boldsymbol{z} = \boldsymbol{h}$), у цьому разі $\boldsymbol{P}_1 \; / \; \sigma_{\boldsymbol{T}} = 0,4$.

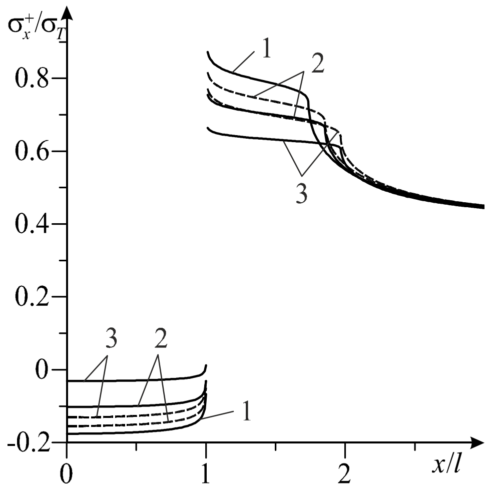

Рис. 2

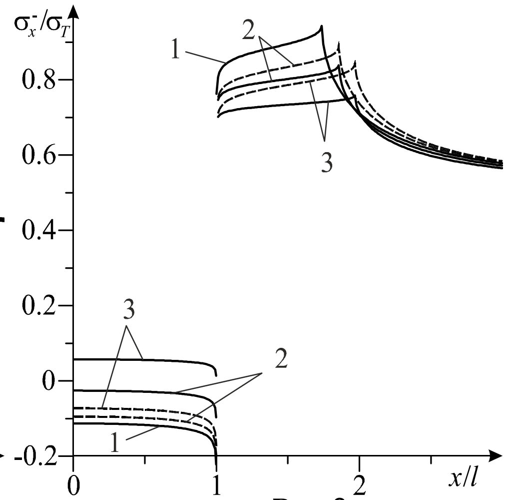

Рис. 3

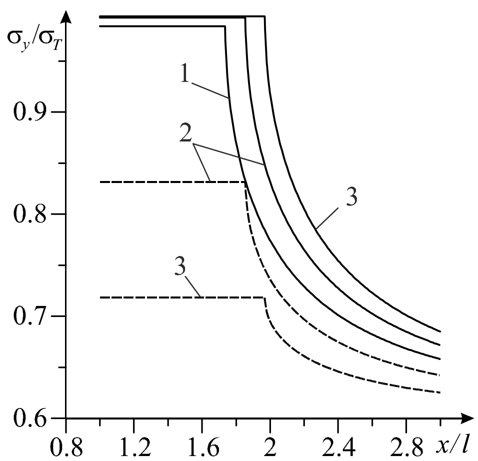

Рис. 4

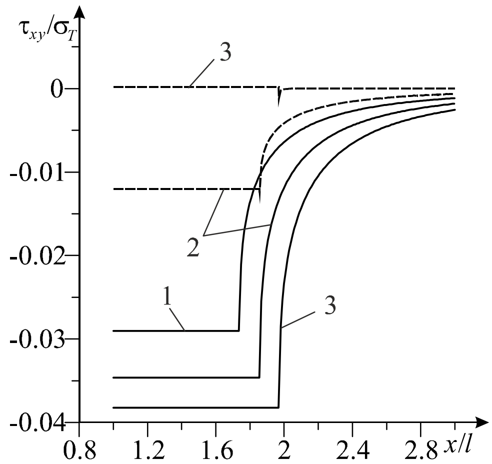

Рис. 5

На рис. 2–5 зображено зміну компонент тензора напружень вздовж дійсної осі від відносної координати $\boldsymbol{x} \; / \; \boldsymbol{l}$ при $\boldsymbol{q} \; / \; \sigma_{\boldsymbol{T}} = 0,6$. Числовий аналіз виявив, що напружений стан симетричний стосовно початку координат, тому наведено результати для $\boldsymbol{x} > 0$. Криві 1 побудовані при $\boldsymbol{h}_1 \; / \; \boldsymbol{h} = 1$

(випадок наскрізної тріщини), криві 2 – при $\boldsymbol{h}_1 / \boldsymbol{h} = 0,9$, криві 3 – при $\boldsymbol{h}_1 / \boldsymbol{h} = 0,8$; у цьому разі відносна довжина пластичної зони була такою: при $\boldsymbol{h}_1 / \boldsymbol{h} = 1$ – $a / \boldsymbol{l} = 1{,}7363$, при $\boldsymbol{h}_1 / \boldsymbol{h} = 0,9$ – $a / \boldsymbol{l} = 1{,}8552$, при $\boldsymbol{h}_1 / \boldsymbol{h} = 0,8$ – $\boldsymbol{a} / \boldsymbol{l} = 1{,}9685$. Як виявив числовий аналіз, у разі використання умови пластичності (50) розподілене навантаження $\boldsymbol{P}_1$ і $\boldsymbol{P}_2$ майже не впливає на числове значення довжини пластичної зони при фіксованому $\boldsymbol{q} / \sigma_{\boldsymbol{T}}$.

На рис. 2, 3 зображено розподіл напружень $\sigma_{\boldsymbol{x}}^{+} / \sigma_{\boldsymbol{T}}$ на дійсній осі у пластині. На підставі цих рисунків можна зробити висновок, що у зонах пластичності на продовженні тріщини найбільші напруження будуть у випадку наскрізної тріщини, а найменші – при $\boldsymbol{h}_1 / \boldsymbol{h} = 0,8$; а от у зоні пластичності, під тріщиною, навпаки – найменші напруження у випадку наскрізної тріщини, а найбільші – коли $\boldsymbol{h}_1 / \boldsymbol{h} = 0,8$. Для великих $|\boldsymbol{x}|$ $\sigma_{\boldsymbol{x}}^{+} / \sigma_{\boldsymbol{T}}$ і $\sigma_{\boldsymbol{x}}^{-} / \sigma_{\boldsymbol{T}}$ прямують до $\boldsymbol{P}_1 / \sigma_{\boldsymbol{T}}$ і $\boldsymbol{P}_2 / \sigma_{\boldsymbol{T}}$, відповідно.

На рис. 4 показано графічну залежність розподілу напружень $\sigma_{\boldsymbol{y}} / \sigma_{\boldsymbol{T}}$ на дійсній осі у пластині. Напруження $\sigma_{\boldsymbol{y}}$ на нижній основі пластини менші, ніж на верхній основі при $\boldsymbol{h}_1 / \boldsymbol{h} < 1$; при великих $|\boldsymbol{x}|$ $\sigma_{\boldsymbol{y}} / \sigma_{\boldsymbol{T}}$ прямують до $\boldsymbol{q} / \sigma_{\boldsymbol{T}}$.

На рис. 5 зображено розподіл дотичних напружень $\tau_{\boldsymbol{xy}} / \sigma_{\boldsymbol{T}}$ на дійсній осі у пластині. З цього рисунка видно, що в зонах пластичності дотичні напруження по абсолютній величині на верхній основі пластини більші, ніж

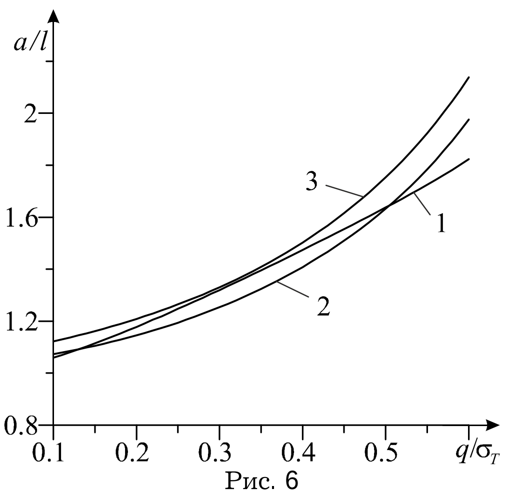

Рис. 6

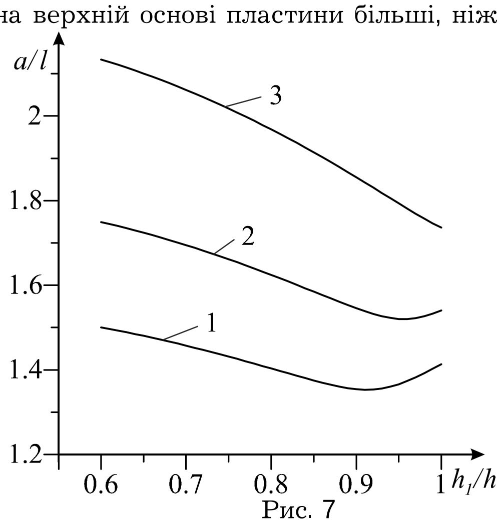

Рис. 7

на нижній основі, крім того, вони по модулю зростають на верхній основі та зменшуються на нижній основі, коли h_1 зменшується; зі зростанням $|x|$ вони прямують до нуля.

На рис. 6 і 8 крива 1 побудована при $h_1/h = 1$ (випадок наскрізної тріщини), крива 2 – при $h_1/h = 0,8$, крива 3 – при $h_1/h = 0,6$.

На рис. 7 і 9 крива 1 відповідає $q/\sigma_T = 0,4$, крива 2 – при $q/\sigma_T = 0,5$ і крива 3 – $q/\sigma_T = 0,6$.

На рис. 6 зображено графічну залежність відносної довжини пластичної зони a/l від безрозмірного розподіленого навантаження q/σ_T, а на рис. 7 – та сама залежність тільки від відносної глибини ненаскрізної тріщини h_1/h. На підставі рис. 6 можна зробити висновок, що незалежно від глибини ненаскрізної тріщини зростання розподіленого навантаження q приводить до зростання довжини пластичної зони. Зростання глибини ненаскрізної тріщини за сталого q приводить спочатку до спадання довжини пластичної зони, а потім до її зростання.

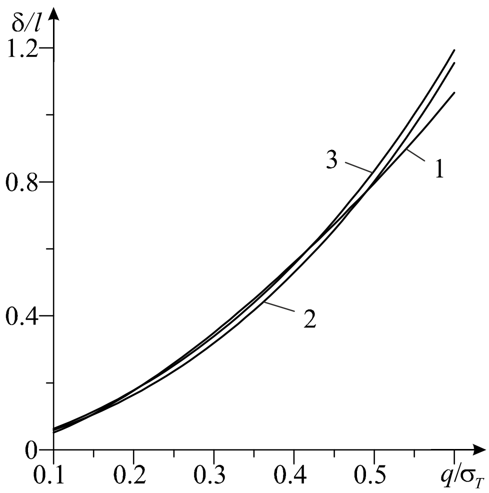

Рис. 8

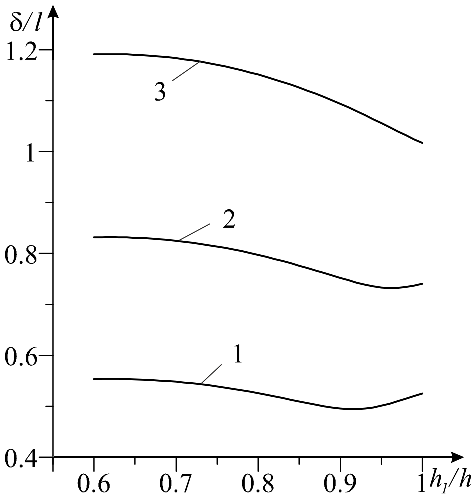

Рис. 9

На рис. 8 показано графічну залежність відносного розкриття δ/l у вершині тріщини на нижній основі пластини від безрозмірного розподіленого навантаження q/σ_T, на рис. 9 – та сама залежність від відносної глибини ненаскрізної тріщини h_1/h. Як видно з рис. 8, зі збільшенням q/σ_T величина розкриття δ/l збільшується, а при заданому навантаженні q глибина ненаскрізної тріщини не значно впливає на розкриття тріщини.

ISSN 2078-3744. Вісник Львівського університету. Серія мех.-мат. 2012. Випуск 76

Список використаної літератури

1. *Бакиров В.Ф.* Модель Леонова-Панасюка-Дагдейля для трещины на границе соединения материалов / В.Ф. Бакиров, Р.В. Гольдштейн // Прикладная математика и механика. – 2004. – Т. 69, в. 1. – С. 170–179.
2. *Божидарник В.В.* Елементи теорії пластичності та міцності / В.В. Божидарник, Г.Т. Сулим – Львів: Світ. – 1999. – Т. 1. – 531 с.
3. *Витвицький П.М.* Пластические деформации в окресности трещин и критерии разрушения. (Обзор) / П.М. Витвицький, В.В. Панасюк, С.Я. Ярема // Пробл. прочности. – 1973. – № 2. – С. 3–18.
4. *Довбня К.М.* Вплив зміцнення матеріалу на напруженний стан пружно-пластичної оболонки з внутрішньою тріщиною / К.М. Довбня, І.В. Дмитрієва // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2011. – 54, № 2. – С. 123–128.
5. *Довбня К.М.* Напружений стан пружно-пластичної ізотропної оболонки з наскрізною тріщиною з урахуванням зміцнення матеріалу / К.М. Довбня, В.В. Яртемик, І.В. Гур'єва // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2010. – 53, № 4. – С. 127–131.
6. *Кир'ян В.І.* Механіка руйнування зварних з'єднань металоконструкцій / В.І. Кир'ян, В.А. Осадчук, М.М. Николишин – Львів: СПОЛОМ. – 2007.
7. *Костюшко І.А.* Пружнопластична пластина з тріщиною нормального відриву / І.А. Костюшко, В.А. Куземко // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2001. – 44, № 2. – С. 123–126.
8. *Кривень В.А.* Зони пластичності в околі вершин двох близьких паралельних тріщин за поздовжнього зсуву / В.А. Кривень // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2001. – 44, № 2. – С. 127–134.
9. *Кушнир Р.М.* Взаимодействие систем произвольно ориентированных трещин в упругопластической цилиндрической оболочке / Р.М. Кушнир, М.М. Николишин, Н.И. Ростун, Ю.П. Фещук // Теор. и прикл. механика. – 2005. – Вып. 41. – С. 134–140.
10. *Кушнір Р.М.* Пружний та пружно-пластичний граничний стан оболонок з дефектами / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, В.А. Осадчук – Львів: СПОЛОМ. – 2003.
11. *Кушнір Р.М.* Пружно-пластична сферична оболонка з системою довільно орієнтованих тріщин / Р.М. Кушнір, М.М. Николишин, М.Й. Ростун // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 2006. – 49, № 1. – С. 155–163.
12. *Мусхелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории пружности / Н.И. Мусхелишвили – М.: Наука. – 1966.

13. *Николишин М.* Гранична рівновага трансверсально-ізотропної пружно-пластичної сферичної оболонки з двома колінеарними тріщинами / М. Николишин, Є. Федюк, Ю. Фещук // Машинознавство. – 2005. – № 7. – С. 17–21.

14. *Николишин М.М.* Двовісний розтяг однорідної ізотропної пластини з двома рівними співвісними тріщинами з урахуванням пластичних зон біля їх вершин / М.М. Николишин, В.В. Опанасович, Л.Р. Куротчин, М.С. Слободян // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 2009. – Т. 52, № 1. – С. 115–121.

15. *Николишин М.М.* Двовісний розтяг кусково-однорідної ізотропної пластини з тріщиною на прямолінійній межі поділу матеріалів з урахуванням пластичних зон біля їх вершин / М.М. Николишин, В.В. Опанасович, Л.Р. Куротчин // Прикл. проблеми мех. і мат. – 2006. – Вип. 4 – С. 101–108.

16. *Николишин М.М.* Раскрытие несквозных трещин в пластине / М.М. Николишин // Мат. методи та фіз. мех. поля. – 1987. – № 26. – С. 29–31.

17. *Острик В.І.* Контакт з тертям берегів міжфазної тріщини за розтягу та зсуву / В.І. Острик // Фізико-хімічна механіка матеріалів. – 2003. – Т. 39, № 2. – С. 58–65.

18. *Острик В.І.* Тріщина на межі розподілу півплощин з різних матеріалів / В.І. Острик, А.Ф. Улітко // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2000. – Т. 43, № 2. – С. 119–126.

19. *Панасюк В.В.* Распределение напряжений около трещин в пластинах и оболочках / В.В. Панасюк, М.П. Саврук, А.П. Дацышин // К.: Наук. думка. – 1976.

20. *Прусов И.А.* Метод сопряжения в теории плит / И.А. Прусов // Минск: Изд-во Белорус. ун-та. – 1975.

21. *Саврук М.П.* Численний анализ в плоских задачах теории трещин / М.П. Саврук, П.Н. Осив, И.В. Прокопчук – К.: Наук. думка. – 1989.

22. *Сулим Г.Т.* Основи математичної теорії термопружності рівноваги деформівних твердих тіл з тонкими включеннями / Г.Т. Сулим – Львів: Дослідно-видавничий центр НТШ. – 2007.

23. *Харун І.В.* Міжфазні тріщини з зонами контакту в полі зосереджених сил і моментів / І.В. Харун, В.В. Лобода // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2002. – Т. 45, №2. – С. 103–113.

24. *Bhargava R.R.* The Dugdale Solution for two unegual straight cracks weakening in an infinite / R.R. Bhargava, Hasan Shehzad //Indian Academy of Sciences. – 2010. – Vol. 35, Part. 1. – P. 19–29.

25. *Castro et alii J.T.P.* Characterization of crack tip stress fields / Castro et alii J.T.P. // Forni di Sopra (UD). – 2011. – P. 58–65.

26. *Dong Y.F.* Computational modeling of elastic and plastic multiple cracks by the fundamental solutions / Y.F. Dong, M. Denda //Finite elements in analysis and design. – 1996. – 23, – P. 115–132.

27. *James R. Rice.* The elastic-plastic mechanics of crack extension. / R. Rice James // International Journal of Fracture Mechanics. – 1968. – 4 – P. 41–49.

28. *Jong-Min Kim.* Crack interaction effects of in-plane surface cracks using elastic and elastic-plastic finite element analyses / Kim Jong-Min, Huhon Nam-Su // Nuclear engineering and technology. – 2010. – Vol. 42, No. 6. – P. 680–689.

29. *Nikishkovi G.P.* Three-dimensional elastic-plastic J-integral calculations for semielliptical surface cracks in a tensile plate / G.P. Nikishkovi, S.N. Atluris // Engineering fracture mechanics. – 1988. – Vol. 29, No. 1. – P. 81–87.

30. *Swedlow J. L.* Elasto-plastic cracked plates in plane strain / J.L. Swedlow // Int. Journ. of Fracture Mech. – 1969. – 5 – P. 33–44.

31. *Williams M.L.* Stress singularities resulting from various foundary conditious in angular corners or plates in extension / M.L. Williams //Trans. ASME. J.Appl. Mech. – 1952. – 19, № 4. – P. 526–535.

ДВУХОСНОЕ РАСТЯЖЕНИЕ КУСОЧНО-ОДНОРОДНОЙ ИЗОТРОПНОЙ ПЛАСТИНЫ С ПРЯМОЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЦЕЙ РАЗДЕЛА МАТЕРИАЛОВ И НЕСКВОЗНОЙ ТРЕЩИНОЙ В НЕЙ С УЧЕТОМ ПЛАСТИЧЕСКИХ ЗОН У ЕЕ ВЕРШИН

Мирон НИКОЛИШИН[1], **Виктор ОПАНАСОВИЧ**[2],

Леся КУРОТЧИН[1], **Николай СЛОБОДЯН**[2]

[1] *Институт прикладных проблем механики и математики им. Я. С. Пидстригача НАН Украины, ул. Научная, 3б 79060 Львов, Украина*
[2] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко, ул. Университетская, 1 79000 Львов, Украина*

Рассмотрена задача о двухосном растяжении кусочно-однородной изотропной пластины с прямолинейной границей раздела материалов и с несквозной трещиной. Предполагают, что берега трещины свободны от внешней нагрузки, а у ее вершин на продолжении трещины образуются пластические зоны, где выполняются условия пластичности Треска в виде поверхностного пластического слоя. Поскольку трещина несквозная, то решение задачи разбиваем на задачу растяжения и изгиба пластины, используя классическую теорию изгиба. Найдено напряженное состояние пластины на границе раздела материалов. Проведено численный анализ задачи и определены длины пластических зон и раскрытие трещины на ее фронте.

Ключевые слова: растяжение, пластина, трещина, пластические зоны, комплексные потенциалы, условие пластичности Треска, раскрытие трещины.

BIAXIAL TENSION OF PIECEWISE-HOMOGENEOUS ISOTROPIC PLATE WITH A STRAIGHT BOUNDARY BETWEEN MATERIAL AND NON-THROUGH CRACK IN IT, TAKING INTO ACCOUNT THE PLASTIC ZONE AT ITS EDGES

Miron NIKOLISHIN[1], Victor OPANASOVYCH[2],

Lesya KUROTCHYN[1], Mykola SLOBODYAN[2]

[1]Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics
Ukrainian National Academy of Sciences,
Naukova Str., 3b 79060 Lviv, Ukraine
[2] Ivan Franko National University of Lviv,
Universitetska Str., 1 79000 Lviv, Ukraine

The problem of the biaxial tension piecewise-homogeneous isotropic plate with a straight boundary between material and non-through crack. It is believed that the edges of the crack are free from external loading, and at its vertices on the continuation of the crack plastic zones are formed, where the conditions of Tresca plasticity in the form of the surface of the plastic layer. Because crack is not through, then divide the solution to the problem of stretching and bending of the plate, using the classical theory of bending. We found the state of stress at the interface of the plate material. A numerical analysis of the problem and determined the length of the plastic zone and crack opening at its front.

Key words: tension, plate, crack, plastic zone, the complex potentials, the condition of Tresca plasticity.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.2011
Прийнята до друку 31.05.2012