ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 226–231
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 226–231

УДК 517.53

ОБМЕЖЕНІСТЬ $l - M$-ІНДЕКСУ АНАЛІТИЧНИХ КРИВИХ

Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Для аналітичної в $D_R = \{z : |z| < R\}$, $0 < R \leq +\infty$, кривої $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ введено поняття обмеженості $l - M$-індексу. Досліджено зростання таких кривих. Зазначено умови на l, за яких з обмеженості $l - M$-індексу кривої F випливає обмеженість $l - M$-індексу її компонент.

Ключові слова: аналітична крива, $l - M$-індекс.

Нехай $0 < R \leq +\infty$, $D_R = \{z : |z| < R\}$ і $m \in \mathbb{N}$, а $F = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$ – аналітична крива в D_R, тобто $F : D_R \to \mathbb{C}^m$ є векторнозначною функцією, де кожна з функцій f_j – аналітична в D_R. Приймемо $F^{(n)} = (f_1^{(n)}, f_2^{(n)}, \ldots, f_m^{(n)})$, і нехай $||F(z)||_S = \max\{|f_j(z)| : 1 \leq j \leq m\}$ – sup-норма, а

$$||F(z)||_E = \sqrt{|f_1(z)|^2 + |f_2(z)|^2 + \cdots + |f_m(z)|^2}$$

– евклідова норма.

Нехай l – додатна неперервна на $[0, R)$ функція така, що

$$l(r) > \frac{\beta}{R - r} \quad (0 \leq r < R), \quad \beta > 1. \tag{1}$$

Для цілих кривих ($R = +\infty$) умова (1) зайва.

Аналітична крива F називається [1] кривою обмеженого l-індексу за sup-нормою (за евклідовою нормою), якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{||F^{(n)}(z)||}{n! l^n(|z|)} \leq \max\left\{\frac{||F^{(k)}(z)||}{k! l^k(|z|)} : 0 \leq k \leq N\right\} \tag{2}$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $z \in D_R$, де $||\cdot|| = ||\cdot||_S$ (відповідно, $||\cdot|| = ||\cdot||_E$). Найменше з таких чисел N називається l-індексом за sup-нормою (за евклідовою нормою) і позначається через $N_S(l; F)$ (відповідно, $N_E(l; F)$).

Як і в [2, с. 71] для $\beta > 1$ через $Q_\beta(D_R)$ позначимо клас додатних неперервних на $[0, R)$ функцій l, які задовольняють умову (1) і для всіх $t \in [0, \beta]$

$$0 < \inf\left\{\frac{l(r)}{l(r_0)} : |r-r_0| \le \frac{t}{l(r_0)}, 0 \le r_0 < R\right\} \le$$
$$\le \sup\left\{\frac{l(r)}{l(r_0)} : |r-r_0| \le \frac{t}{l(r_0)}, 0 \le r_0 < R\right\} < +\infty.$$

В [1] доведено, що за умови $l \in Q_\beta(D_R)$ аналітична в D_R крива F є обмеженого l-індексу за sup-нормою тоді і тільки тоді, коли вона є обмеженого l-індексу за евклідовою нормою, а можливе зростання такої кривої засвідчує така теорема.

Теорема 1. *Нехай $0 < R \le +\infty$, а додатна аналітична функція l дійсної змінної $t \in [0, R)$ задовольняє умову (1) і $(-l'(t))^+ = o(l^2(t))$, $t \uparrow R$, де $a^+ = \max\{a, 0\}$. Якщо аналітична в D_R крива F є обмеженого l-індексу за sup-нормою, то*

$$\varlimsup_{r\uparrow R} \frac{\ln M(r, ||F||_S)}{L(r)} \le N_S(l; F) + 1, \tag{3}$$

де $M(r, ||F||_S) = \max\{||F(z)||_S : |z| = r\}$ і $L(r) = \int_0^r l(t)dt$.

Тут доведено, що у теоремі 1 умову аналітичності функції l можна замінити її неперервною диференційовністю. Для цього введемо поняття обмеженості $l-M$-індексу кривої F.

Нехай $M(r, f_j) = \max\{|f_j(z)| : |z| = r\}$ і $||M(r, F)||_S = \max\{M(r, f_j) : 1 \le j \le m\}$. Аналітичну в D_R криву F називатимемо кривою обмеженого $l-M$-індексу за sup-нормою, якщо існує $N \in \mathbb{Z}_+$ таке, що

$$\frac{||M(r, F^{(n)})||_S}{n! l^n(r)} \le \max\left\{\frac{||M(r, F^{(k)})||_S}{k! l^k(|z|)} : 0 \le k \le N\right\} \tag{4}$$

для всіх $n \in \mathbb{Z}_+$ і $r \in [0, R)$. Найменше з таких чисел N будемо називати $l-M$-індексом кривої F за sup-нормою і позначатимемо через $N_S(l-M; F)$.

Якщо $N_S(l; F) < +\infty$, то для $|z| = r$ і $1 \le j \le m$

$$|f_j^{(n)}(z)| \le \max\{|f_j^{(n)}(z)| : 1 \le j \le m\} \le$$
$$\le n! l^n(r) \max\left\{\frac{||F^{(k)}(z)||_S}{k! l^k(|z|)} : 0 \le k \le N_S(l; F)\right\} \le$$
$$\le n! l^n(r) \max\left\{\frac{||M(r, F^{(k)})||_S}{k! l^k(|z|)} : 0 \le k \le N_S(l; F)\right\},$$

звідки

$$\frac{||M(r, F^{(n)})||_S}{n! l^n(r)} \le \max\left\{\frac{||M(r, F^{(k)})||_S}{k! l^k(|z|)} : 0 \le k \le N_S(l; F)\right\},$$

тобто $N_S(l-M; F) \le N_S(l; F)$. Тому теорема 1 випливає з такої теореми.

Теорема 2. *Нехай $0 < R \le +\infty$, а додатна неперервно диференційовна на $[0, R)$ функція l задовольняє умову (1) і*

$$\varlimsup_{r\uparrow R} \frac{(-l'(r))^+}{l^2(r)} = q < +\infty. \tag{5}$$

Якщо аналітична в D_R крива F є обмеженого $l-M$-індексу за sup-нормою, то

$$\overline{\lim_{r\uparrow R}}\frac{\ln ||M(r,F)||_S}{L(r)}\leq (q+1)(N_S(l-M;F)+1). \tag{6}$$

У доведенні цієї теореми буде використано таке твердження [2, с. 82].

Лема 1. *Нехай $g_1,\dots,g_n$ – додатні та абсолютно неперервні на $[a,\,b]$ функції, а $g(x)=\max\{g_k(x):\,1\leq k\leq n\}$, φ – додатна і неперервна на $[a,\,b]$ функція. Якщо для майже всіх $x\in[a,\,b]$*

$$g_k'(x)\leq\varphi(x)g(x),\quad 1\leq k\leq n,$$

то для всіх $x\in[a,\,b]$

$$\ln\, g(x)\leq \ln\, g(a)+\int\limits_a^x\varphi(t)dt.$$

Доведення теореми 2. Приймемо $g_{j,k}(r)=\dfrac{M(r,f_j^{(k)})}{k!l^k(r)}$ і $g(r)=\max\{g_{j,k}(r):\,0\leq$ $\leq k\leq N_S(l-M;F),\,1\leq j\leq m\}$. Використовуючи нерівність $M'(r,f)\leq M(r,f')$ і враховуючи (5), отримаємо

$$g_{j,k}'(r)=\frac{M'(r,f_j^{(k)})}{k!l^k(r)}-\frac{M(r,f_j^{(k)})}{k!l^{k+1}(r)}kl'(r)\leq$$

$$\leq\frac{M(r,f_j^{(k+1)})}{(k+1)!l^{k+1}(r)}(k+1)l(r)+\frac{M(r,f_j^{(k)})}{k!l^k(r)}k\frac{(-l'(r))^+}{l(r)}\leq$$

$$\leq g(r)(N_S(l-M;F)+1)\left(l(r)+\frac{(-l'(r))^+}{l(r)}\right).$$

Тому за лемою 1

$$\ln\, g(r)\leq\ln\, g(0)+\int\limits_0^r(N_S(l-M;F)+1)\left(l(t)+\frac{(-l'(t))^+}{l(t)}\right)dt=$$

$$=\ln\, g(0)+(N_S(l-M;F)+1)(1+q+o(1))\int\limits_0^r l(t)dt,\quad r\uparrow R.$$

Звідси, враховуючи нерівність $||M(r,F)||_S\leq g(r)$, легко отримуємо (6). Теорему 2 доведено.

Приймемо $||M(r,F)||_E=\sqrt{M^2(r,f_1)+\dots+M^2(r,f_m)}$ й аналітичну в D_R криву F називатимемо кривою обмеженого $l-M$-індексу за евклідовою нормою, якщо існує $N\in\mathbb{Z}_+$ таке, що для всіх $n\in\mathbb{Z}_+$ і $r\in[0,\,R)$ правильна нерівність (4) з $||M(r,F)||_E$ замість $||M(r,F)||_S$. Найменше з таких чисел N будемо називати $l-M$-індексом кривої F за евклідовою нормою і позначатимемо через $N_E(l-M;F)$. З теореми 2 випливає таке твердження.

Наслідок 1. *Якщо функція l задовольняє умови теореми 2 і аналітична в D_R крива F є обмеженого $l-M$-індексу за евклідовою нормою, то*

$$\varlimsup_{r\uparrow R}\frac{\ln||M(r,F)||_E}{L(r)}\le (q+1)(N_E(l-M;F)+1)\sqrt{m}.$$

Справді, оскільки $||\cdot||_S\le||\cdot||_E\le\sqrt{m}||\cdot||_S$, то для $n\ge N+1$, $N=N_E(l-M;F)$, одержимо

$$\frac{||M(r,F^{(n)})||_S}{n!(\sqrt{m}l(r))^n}\le\frac{1}{(\sqrt{m})^{N+1}}\frac{||M(r,F^{(n)})||_E}{n!l^n(r)}\le$$

$$\le\frac{1}{(\sqrt{m})^{N+1}}\max\left\{\frac{||M(r,F^{(k)})||_E}{k!l^k(r)}:\,0\le k\le N\right\}\le\max\left\{\frac{||M(r,F^{(k)})||_S}{k!(\sqrt{m}l(r))^k}:\,0\le k\le N\right\},$$

тобто $N_S(l_*-M;F)\le N$, де $l_*(r)=\sqrt{m}l(r)$. Тому за теоремою 2

$$\ln||M(r,F^{(n)})||_E\le\ln||M(r,F^{(n)})||_S+\ln\sqrt{m}\le$$

$$\le(1+o(1))(1+q)(N+1)\int\limits_0^r l_*(t)dt=(1+o(1))(1+q)(N+1)\sqrt{m}L(r),\quad r\uparrow R,$$

звідки випливає потрібна нерівність.

Якщо $m=1$, то $||M(r,F)||_S=||M(r,F)||_E=M(r,F)=M(r,f_1)$ і з означення $l-M$-індексу аналітичної в D_R кривої F випливає означення $l-M$-індексу аналітичної в D_R функції $F=f_1$ (див. [2], с. 74).

Твердження 1. *Якщо всі компоненти f_j аналітичної в D_R кривої F є обмеженого $l-M$-індексу $N(l-M;f_j)$, то крива F є обмеженого $l-M$-індексу за sup-нормою і $N_S(l-M;F)\le N=\max\{N(l-M;f_j):\,1\le j\le m\}$.*

Справді,

$$\frac{||M(r,F^{(n)})||_S}{n!l^n(r)}=\max\left\{\frac{|M(r,f_j^{(n)})|}{n!l^n(r)}:\,1\le j\le m\right\}\le$$

$$\le\max\left\{\frac{|M(r,f_j^{(k)})|}{k!l^k(r)}:\,0\le k\le N,\,1\le j\le m\right\}=\max\left\{\frac{||M(r,F^{(k)})||_S}{k!l^k(r)}:\,0\le k\le N\right\},$$

звідки випливає потрібна нерівність.

Комбінуючи доведення твердження 1 і наслідку з теореми 2, отримуємо твердження.

Твердження 2. *Якщо всі компоненти f_j аналітичної в D_R кривої F є обмеженого $l-M$-індексу $N(l-M;f_j)$, то крива F є обмеженого l_*-M-індексу за евклідовою нормою і $N_S(l_*-M;F)\le N=\max\{N(l-M;f_j):\,1\le j\le m\}$, де $l_*(r)=\sqrt{m}l(r)$.*

Відомо [3, 4], що навіть у випадку $l(r)\equiv1$ з обмеженості l-індексу цілої кривої F як за sup-нормою, так і за евклідовою нормою не випливає обмеженість l-індексу її компонент. Виникає питання, чи правильне таке саме твердження для $l-M$-індексу. Природним є також питання про еквівалентність обмеженості $l-M$-індексу за sup-нормою й обмеженості $l-M$-індексу за евклідовою нормою. Щоб відповісти на ці питання, використовуватимемо деякі результати з [2].

Нехай $-\infty < A \le +\infty$, а $\Omega(A)$ – клас додатних необмежених на $(-\infty, A)$ функцій Φ таких, що похідна Φ' є неперервно диференційовною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, A)$ функцією. Нехай $\Psi(x) = x - \Phi(x)/\Phi'(x)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном, а Ψ^{-1} – обернена до Ψ. Приймемо $\beta(x) = \dfrac{\ln \Phi'(\Psi^{-1}(x))}{\Phi'(\Psi^{-1}(x))}$ і будемо говорити, що $\Phi \in \Omega^*(A)$, якщо $\Phi \in \Omega(A)$:

1) $x + \beta(x) < A$ для $x \in [x_0, A)$ і $\Phi'(\Psi^{-1}(x + \beta(x))) = O(\Phi'(x))$ при $x \uparrow A$;
2) $\Phi'(x + l/\Phi'(x)) = O(\Phi'(x))$ при $x \uparrow A$ для кожного $l \in [0, +\infty)$;
3) існує $\alpha > 1$ таке, що $\Phi'(x) > \alpha/(A - x)$ для всіх $x \in (-\infty, A)$.

Правильна така лема (див. [2], с. 85).

Лема 2. *Нехай $\Phi \in \Omega^*(\ln R)$, $0 < R \le +\infty$, а $l(r) = \Phi'(\ln r)/r$ на $[r_0, R)$ і $l(r) = \Phi'(\ln r_0)/r_0$ на $[0, r_0]$, де $r_0 \in [0, R)$ – довільне фіксоване число. Для того, щоб аналітична в D_R функція f була обмеженого $l - M$-індексу, необхідно і достатньо, щоб $\ln M(r, f) = O(\ln R)$ при $r \uparrow R$.*

Використовуючи цю лему, неважко довести таку теорему.

Теорема 3. *Нехай $\Phi \in \Omega^*(\ln R)$, $0 < R \le +\infty$, а функція l така, як у лемі 2, а F – аналітична в D_R крива. Тоді такі твердження є рівносильними:*

а) F є обмеженого $l - M$-індексу за sup-нормою;
б) $\ln ||M(r, F)||_S = O(\Phi(\ln r))$ при $r \uparrow R$;
в) $\ln ||M(r, F)||_E = O(\Phi(\ln r))$ при $r \uparrow R$;
г) F є обмеженого $l - M$-індексу за евклідовою нормою;
д) кожна компонента f_j кривої F є обмеженого $l - M$-індексу.

Доведення. Оскільки $\Phi''(x) \ge 0$ і $\frac{l'(r)}{l^2(r)} = \frac{\Phi''(\ln r)}{(\Phi'(\ln r))^2} - \frac{1}{\Phi'(\ln r)}$, то $\overline{\lim\limits_{r \uparrow R}} \frac{(-l'(r))^+}{l^2(r)} = 0$, а оскільки $\dfrac{\ln R - \ln r}{R - r} \le \dfrac{1}{r}$, то з умови (3) означення класу $\Omega^*(\ln R)$ випливає умова (1). Якщо $N_S(l_* - M; F) < +\infty$, то за теоремою 2

$$\ln ||M(r, F)||_S = O(L(r)) = O\left(\int\limits_{r_0}^{r} \frac{\Phi'(\ln t)}{t} dt\right) = O(\Phi(\ln r)), \quad r \uparrow R,$$

тобто з *а* випливає *б*. Еквівалентність тверджень *б* і *в* очевидна. З *б* випливає, що $\ln M(r, f_j) = O(\Phi(\ln r))$, $r \uparrow R$, тобто за лемою 2 всі f_j є обмеженого $l - M$-індексу, тобто маємо твердження *д*. За цією лемою з обмеженості $l - M$-індексу функції f_j випливає обмеженість $l^* - M$-індексу цієї функції з $l^*(r) = l(r)/\sqrt{m}$, і за твердженням 2 $N_E(l_* - M; F) < +\infty$, тобто з *д* випливає *г*. Нарешті, якщо $N_E(l_* - M; F) < +\infty$, то за наслідком 1, як вище, маємо $\ln M(r, f_j) = O(\Phi(\ln r))$, $r \uparrow R$, для кожного j, тобто всі f_j є обмеженого $l - M$-індексу і за твердженням 1 $N_S(l_* - M; F) < +\infty$. Теорему 3 доведено.

Список використаної літератури

1. *Bordulyak M.T.* Boundedness of l-index of analytic curves / *Bordulyak M.T., Sheremeta M.M.* // Matem. Studii. – 2011. – Vol. 36, №2. – P. 152-161.

2. *Sheremeta M.M.* Analytic functions of bounded index / *Sheremeta M.M.* – Lviv: VNTL Publishers, 1999.
3. *Heath L.F.* Vector-valued entire functions of bounded index satisfying a differential equation / *Heath L.F.* // J. Res. Nat. Bur. Standarts. – 1978. – Vol. 83, №1. – P. 73-79.
4. *Roy R.* Vector-valued entire functions of bounded index satisfying a differential equation / *Roy R., Shah S.M.* // J. Mat. Anal. Appl. – 1986. – Vol. 116. – P. 349-368.

Стаття: надійшла до редакції 08.09.2011
прийнята до друку 14.12.2011

BOUNDEDNESS OF $l-M$-INDEX OF ANALYTIC CURVES

Myroslav SHEREMETA

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

For an analytic curve $F=(f_1,f_2,\dots,f_m)$ in $D_R=\{z:|z|<R\}$, $0<R\le+\infty$, a concept of boundedness of $l-M$-index is introduced. The growth of such curves is investigated. It is indicated conditions on l, under which the boundedness of $l-M$-index of the curve F implies the boundedness of $l-M$-index of its components.

Key words: analitic curve, $l-M$-index.

ОГРАНИЧЕННОСТЬ $l-M$-ИНДЕКСА АНАЛИТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Мирослав ШЕРЕМЕТА

Львовский национальный университет им. Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Для аналитической в $D_R=\{z:|z|<R\}$, $0<R\le+\infty$, кривой $F=(f_1,f_2,\dots,f_m)$ введено понятие ограниченности $l-M$-индекса. Исследовано рост таких кривых. Указано условия на l, при выполнении которых из ограниченности $l-M$-индекса кривой F следует ограниченность $l-M$-индекса ёё компонент.

Ключевые слова: аналитическая кривая, $l-M$-индекс.