

УДК 517.9

ІНТЕГРУВАННЯ СКАЛЯРНОЇ ІЄРАРХІЇ КАДОМЦЕВА-ПЕТВІАШВІЛІ МЕТОДОМ ІНТЕГРАЛЬНИХ ПЕРЕТВОРЕНЬ ТИПУ ДАРБУ

Юрій СИДОРЕНКО, Олександр ЧВАРТАЦЬКИЙ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: alex.chvartatskyu@gmail.com*

Запропоновано конструктивний метод побудови точних розв'язків для деяких нелінійних систем математичної фізики на підставі перетворень типу Дарбу. Використовуючи цей підхід, отримано розв'язки нелінійного рівняння Шредінгера, моделі Яджими-Ойкави, Дрінфельда-Соколова та узагальнення моделі Бусинеска. Досліджено також їхні багатокomпонентні (векторні) узагальнення.

Ключові слова: інтегральні перетворення, нелінійне рівняння Шредінгера, модель Яджими-Ойкави, модель Дрінфельда-Соколова, узагальнення моделі Бусинеска.

1. Вступ. У сучасній теорії нелінійних інтегрованих систем математичної та теоретичної фізики значну роль відіграють алгебричні конструкції, які є результатом роботи великої групи дослідників, зокрема московської та лєнінградської шкіл С.П. Новікова і Л.Д. Фаддєєва, а також В.Є. Захарова, А.Б. Шабата, І.М. Гельфанда, Л.А. Дікого, Ю.І. Маніна, В.М. Дрінфельда, М. Адлера, Р. Хіроті, Дж. Вільсона та багатьох інших (детальний огляд див. в [1]). При побудові точних розв'язків солітонних систем використовується метод одягання Захарова-Шабата [2, 3, 4], метод В.А. Марченка [5], а також метод перетворень Дарбу-Крама-Матвєєва [6, 7, 8, 9]. Узагальнення перетворень Дарбу класичного типу [6, 7, 8] та бінарного [9] проведено в [10] для лінійних еволюційних операторів довільної матричної розмірності. Огляд різних версій перетворень типу Дарбу та ефективність їхнього використання для інтегрування нелінійних моделей теорії солітонів досліджується в [11]. Алгебризовані підходи дають підстави уникати тонких аналітичних питань, які виникають у разі формулювання та дослідження прямих і обернених задач розсіювання для інтегрування нелінійних моделей математичної фізики, зокрема дослідження інтегральних рівнянь Марченка-Гельфанда-Лєвітана.

Значний внесок у розуміння алгебричних методів інтегрування нелінійних моделей теорії солітонів зробила Кіотська група японських математиків (Сато, Міва,

Джимбо, Охта, Сатсума) [12, 13]. Зокрема, вони запропонували конструкцію скалярних і матричних нескінченних ієрархій інтегровних рівнянь типу Кадомцева-Петвіашвілі (КП).

Ієрархія КП з нелокальними в'язями, що становить нескінченну послідовність нелінійних диференціальних рівнянь з частинними похідними, досліджували в [14]. Для відповідних інтегровних рівнянь Лакса-Захарова-Шабата та їхніх $(2+1)$ -вимірних узагальнень (див. також [15]) знайдено широкі класи точних розв'язків методом одягаючих перетворень. У цьому разі як одягаючий оператор використовували оператор класичних перетворень Дарбу. Вперше ієрархію КП з нелокальними в'язями було введено в працях [16, 17, 18, 19, 20], а її багатокомпонентне (векторне) узагальнення у [21, 22]. Серед інтегровних систем цієї ієрархії міститься велика частина моделей, які були відомі раніше, а також їхні узагальнення. Накладання додаткових умов (редукцій) типу ермітового спряження дає змогу отримати з ієрархії КП із нелокальними в'язями відомі та цікаві з фізичного погляду системи рівнянь теорії солітонів (нелінійні рівняння Шредінгера, модифіковані рівняння Кортевега-Вріза, модель Яджими-Ойкави та інші) (див. [11]), а також будувати їхні розв'язки за допомогою методу одягаючих перетворень ([23, 24]).

Мета нашої праці – побудувати точні розв'язки нелінійних інтегровних систем теорії солітонів за допомогою інваріантних перетворень інтегро-диференціальних та еволюційних операторів.

Стаття написана так. Другий розділ – вступний, у ньому подано необхідні поняття та позначення. У третьому розділі запропоновано метод побудови точних розв'язків деяких нелінійних моделей математичної фізики, які містяться в ієрархії КП з нелокальними в'язями, за допомогою інваріантних перетворень еволюційних та інтегро-диференціальних виразів. У наступних чотирьох розділах виконано побудову точних розв'язків нелінійного рівняння Шредінгера, системи Яджими-Ойкави та їхніх векторних узагальнень, а також моделей Бусинеска та Дрінфельда-Соколова.

У завершальних зауваженнях підсумовано отримані результати та розглянуто можливість застосування методу інтегральних перетворень для інтегрування інших нелінійних моделей математичної фізики.

2. Вихідні положення. Розглянемо над полем \mathbf{C} лінійний простір ζ мікродиференціальних операторів (МДО) (формальних символів) [1, 13] вигляду

$$L \in \zeta = \left\{ \sum_{i=-\infty}^{n(L)} a_i D^i \quad : \quad i, n(L) \in \mathbf{Z} \right\}, \quad (1)$$

де коефіцієнти a_i – матричні $N \times N$ – функції “просторової” змінної $x = t_1$ і еволюційних параметрів t_2, t_3, \dots . Матричні коефіцієнти $a_i(t)$, $t = (t_1, t_2, \dots)$ вважаються гладкими функціями векторної змінної t , яка має скінчену кількість компонент, і належать деякому функціональному простору A , який є диференціальною алгеброю стосовно звичайних арифметичних дій, а оператор диференціювання $D := \frac{\partial}{\partial x}$.

Операції додавання і множення операторів на скаляри (елементи поля \mathbf{C}) вводяться так:

$$\lambda_1 L_1 \pm \lambda_2 L_2 = \sum_{i=-\infty}^{N_1} \lambda_1 a_{1i} D^i \pm \sum_{i=-\infty}^{N_2} \lambda_2 a_{2i} D^i = \sum_{i=-\infty}^{\max\langle N_1, N_2 \rangle} (\lambda_1 a_{1i} \pm \lambda_2 a_{2i}) D^i, \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{C}.$$

Структура алгебри Лі на лінійному просторі ζ (1) визначається комутатором Лі $[\cdot, \cdot] : \zeta \times \zeta \rightarrow \zeta$, $[L_1, L_2] = L_1 L_2 - L_2 L_1$, де композиція (операторне множення) МДО L_1 та L_2 індукується загальним правилом Лейбніца

$$D^n f := \sum_{j=0}^{\infty} \binom{n}{j} f^{(j)} D^{n-j}, \quad (2)$$

$n \in \mathbf{Z}$, $f \in A \subset \zeta$, $f^{(j)} := \frac{\partial^j f}{\partial x^j} \in A \subset \zeta$, $D^n D^m = D^m D^n = D^{n+m}$, $n, m \in \mathbf{Z}$, де $\binom{n}{0} := 1$, $\binom{n}{j} := \frac{n(n-1)\dots(n-j+1)}{j!}$. Формула (2) задає композицію оператора $D^n \in \zeta$ і оператора множення на функцію $f \in A \subset \zeta$ (як оператора нульового порядку) на відміну від позначення $D^k \{f\} := \frac{\partial^k f}{\partial x^k} \in A$, $k \in \mathbf{Z}_+$. Порядком оператора

$$L = \sum_{i=-\infty}^{n(L)} a_i D^i, \text{ де } a_{n(L)} \neq 0, \text{ називається ціле число } n(L): \text{ord } L = n(L).$$

В теорії Сато одним із вихідних об'єктів є мікродиференціальний оператор Лакса

$$L := W D W^{-1} = D + \sum_{i=1}^{\infty} U_i D^{-i}, \quad (3)$$

який параметризується нескінченною кількістю динамічних змінних $u_i = u_i(t_1, t_2, t_3, \dots)$, $i \in \mathbb{N}$, що залежать від довільної (скінченої) кількості незалежних змінних $t_1 := x, t_2, t_3, \dots$, і диференціально виражаються через функціональні коефіцієнти формального одягаючого оператора (оператора перетворення) Захарова – Шабата

$$W = I + \sum_{i=1}^{\infty} w_i D^{-i}. \quad (4)$$

Обернений до формального оператора W є оператор вигляду

$$W^{-1} = I + \sum_{i=1}^{\infty} a_i D^{-i}, \quad (5)$$

де перші три коефіцієнти набули такого вигляду:

$$\begin{aligned} a_1 &= -w_1, \\ a_2 &= -w_2 + w_1^2, \\ a_3 &= -w_3 - w_1 w_{1x} + w_1 w_2 + w_2 w_1 - w_1^3. \end{aligned} \quad (6)$$

Перші коефіцієнти U_i (3) в термінах коефіцієнтів w_i оператора W виражаються так:

$$\begin{aligned} U_1 &= -w_{1x}, \quad U_2 = -w_{2x} + w_{1x} w_1, \\ U_3 &= -w_{3x} - (w_{1x})^2 + w_{1x} w_2 + w_{2x} w_1 + w_2 w_{1x} - w_{1x} w_1^2 - w_1^2 w_{1x}. \end{aligned} \quad (7)$$

У скалярному випадку ієрархія Кадомцева-Петвіашвілі – це комутативна сім'я еволюційних рівнянь Лакса для оператора L (3)

$$\alpha_i L_{t_i} = [B_i, L], \quad (8)$$

де $\alpha_i \in \mathbb{C}$, $i \in \mathbb{N}$, а оператор $B_i := (L^i)_+$ є диференціальною частиною i -го степеня мікродиференціального символу L . Рівняння Захарова-Шабата виникають у цьому підході внаслідок комутативності двох довільних потоків (8) при $i = m$ та $i = n$

$$L_{t_m t_n} = L_{t_n t_m} \Rightarrow [\alpha_n \partial_{t_n} - B_n, \alpha_m \partial_{t_m} - B_m] = \alpha_m B_{n t_m} - \alpha_n B_{m t_n} + [B_n, B_m] = 0. \quad (9)$$

Накладаючи на оператор L (3) редукцію Гельфанда – Дікого

$$L^k = (L^k)_+ := B_k, \quad (10)$$

як наслідок рівняння Лакса (8), отримуємо таке рівняння Лакса для диференціальних операторів:

$$\alpha_i B_{k t_i} = [B_i, B_k]. \quad (11)$$

Перші три оператори $B_n = (L^n)_+$ в термінах коефіцієнтів U_i (3) набули такого вигляду:

$$\begin{aligned} B_1 &= D, \\ B_2 &= D^2 + 2U_1 =: D^2 + 2u, \\ B_3 &= D^3 + 3U_1 D + 3U_2 + 3(U_1)_x =: D^3 + 3uD + u_0, \end{aligned} \quad (12)$$

або в термінах w_i (див. формули (3), (7))

$$B_1 = D, \quad B_2 = D^2 - 2w_{1x}, \quad B_3 = D^3 - 3w_{1x}D + 3(w_{1x}w_1 - w_{2x}) - 3w_{1xx}. \quad (13)$$

Симетричні редукції Конопельченка-Сидоренка-Штрамппа (КСШ) [17, 18, 22] є нелокальними узагальненнями k -редукцій Гельфанда-Дікого (10) і на рівні оператора Лакса L (3) набудуть вигляду

$$(L^k)_- := (L^k)_{<0} = \mathbf{q} \mathcal{M}_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top, \quad (14)$$

де $\text{Mat}_{l \times l}(\mathbb{C}) \ni \mathcal{M}_0$ є сталою матрицею, а вектор-функції $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$, $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_l)$ є фіксованими розв'язками системи лінійних рівнянь

$$\begin{cases} \alpha_n \mathbf{q}_{t_n} = B_n \{\mathbf{q}\}, \\ \alpha_n \mathbf{r}_{t_n} = -B_n^\top \{\mathbf{r}\}, \end{cases} \quad (15)$$

де $n \in \mathbb{N}$.

Функції \mathbf{q} , \mathbf{r} називаються власними та спряженими власними функціями ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі (8) і є нелокальними функціоналами від коефіцієнтів оператора Лакса L . Редукційні обмеження (14) накладають нелокальні в'язи на функціональні коефіцієнти оператора L і розв'язки еволюційних рівнянь (15), сумісні з динамікою на підставі рівнянь Лакса (8). Редуковані потоки (8), (14), (15) допускають операторне зображення Лакса вигляду

$$[L_k, M_n] = 0, \quad \text{де } L_k = B_k + \mathbf{q} \mathcal{M}_0 D^{-1} \mathbf{r}^\top, \quad M_n = \alpha_n \partial_{t_n} - B_n, \quad (16)$$

і є $(1 + 1)$ -вимірними інтегровними системами для коефіцієнтів U_i , $i = \overline{1, k-1}$ і власних та спряжених власних функцій \mathbf{q}, \mathbf{r}

$$\begin{cases} U_{it_n} = P_{in}[U_1, U_2, \dots, U_{k-1}, \mathbf{q}, \mathbf{r}], \\ \mathbf{q}_{t_n} = B_n[U_i, \mathbf{q}, \mathbf{r}]\{\mathbf{q}\}, \\ \mathbf{r}_{t_n} = -B_n^T[U_i, \mathbf{q}, \mathbf{r}]\{\mathbf{r}\}, \end{cases} \quad (17)$$

де $i = \overline{1, k-1}$, P_{in} , B_n – диференціальні поліноми стосовно динамічних змінних, які зазначені в квадратних дужках.

Розглянемо приклади рівнянь (16)-(17) для деяких k та n .

1. $k = 1, n = 2$: $L_1 = D + \mathbf{q}\mathcal{M}_0D^{-1}\mathbf{r}^\top$, $M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - D^2 - 2v$,

$$\begin{cases} v = \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, \\ M_2\{\mathbf{q}\} = 0, \\ M_2^T\{\mathbf{r}\} = 0. \end{cases} \quad (18)$$

При накладанні на оператори L_1 та M_2 додаткових обмежень (редукцій) вигляду $L_1^* = -L_1$ ($\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}$, $\mathcal{M}_0^* = \mathcal{M}_0$); $M_2^* = M_2$ ($\alpha \in i\mathbf{R}$) система (18) набуває вигляду

$$\begin{cases} v = \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*, \\ \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)\mathbf{q}. \end{cases} \quad (19)$$

2. $k = 1, n = 3$: $L_1 = D + \mathbf{q}\mathcal{M}_0D^{-1}\mathbf{r}^\top$, $M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - 3v_1D - v_0$,

$$\begin{cases} v_1 = \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, \\ v_0 = 3\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top, \\ M_3\{\mathbf{q}\} = 0, \\ M_3^T\{\mathbf{r}\} = 0. \end{cases} \quad (20)$$

Якщо редукція $L_1^* = -L_1$ ($\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}$, $\mathcal{M}_0^* = \mathcal{M}_0$); $M_3^* = -M_3$ ($\alpha_3 \in \mathbf{R}$), то отримаємо

$$\begin{cases} v_1 = \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*, \\ v_0 = 3\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*, \\ \alpha_3\mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)\mathbf{q}_x + 3(\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)\mathbf{q}. \end{cases} \quad (21)$$

3. $k = 2, n = 2$: $L_2 = D^2 + 2u + \mathbf{q}\mathcal{M}_0D^{-1}\mathbf{r}^\top$, $M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - D^2 - 2v$,

$$\begin{cases} v = u, \\ \alpha_2u_{t_2} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x, \\ M_2\{\mathbf{q}\} = 0, \\ M_2^T\{\mathbf{r}\} = 0. \end{cases} \quad (22)$$

При редукції $L_2^* = L_2$ ($\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}$, $\mathcal{M}_0^* = -\mathcal{M}_0$, $u = u^*$); $M_2^* = M_2$ ($\alpha_2 \in i\mathbf{R}$) отримаємо

$$\begin{cases} v = u \\ \alpha_2u_{t_2} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x, \\ \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2u\mathbf{q}. \end{cases} \quad (23)$$

4. $k = 2, n = 3$: $L_2 = D^2 + 2u + \mathbf{q}\mathcal{M}_0D^{-1}\mathbf{r}^\top$, $M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - 3v_1D - v_0$,

$$\begin{cases} v_1 = u, \\ v_0 = \frac{3}{2}(u_x + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top), \\ \alpha_3 u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + \frac{3}{4}(\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top - \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}_x^\top)_x, \\ M_3\{\mathbf{q}\} = 0, \\ M_3^\top\{\mathbf{r}\} = 0. \end{cases} \quad (24)$$

Редукція ермітового спряження $L_2^* = L_2$ ($\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}$, $\mathcal{M}_0^* = -\mathcal{M}_0$, u – дійсна функція); $M_3^* = -M_3$ ($\alpha_3 \in \mathbf{R}$), приводить систему (24) до вигляду

$$\begin{cases} v_1 = u, \\ v_0 = \frac{3}{2}(u_x + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*), \\ \alpha_3 u_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3u\mathbf{q}_x + \frac{3}{2}u_x\mathbf{q} + \frac{3}{2}\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*\mathbf{q}, \\ \alpha_3 u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + \frac{3}{4}(\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^* - \mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}_x^*)_x. \end{cases} \quad (25)$$

5. $k = 3, n = 2$: $L_3 = D^3 + 3uD + u_0 + \mathbf{q}\mathcal{M}_0D^{-1}\mathbf{r}^\top$, $M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - D^2 - 2v$.

$$\begin{cases} u = v, \\ 3\alpha_2 u_{t_2} = -3u_{xx} + 2u_{0x}, \\ \alpha_2 u_{0t_2} = -2u_{xxx} - 6uu_x + u_{0xx} + 2(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x, \\ M_2\{\mathbf{q}\} = 0, \\ M_2^\top\{\mathbf{r}\} = 0. \end{cases} \quad (26)$$

Якщо редукція $L_3^* = -L_3$ ($\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}$, $\mathcal{M}_0^* = \mathcal{M}_0$, u – дійсна функція, $\text{Re } u_0 = \frac{3}{2}u_x$, $\text{Im } u_0 =: p$), $M_2^* = M_2$ ($\alpha_2 \in i\mathbf{R}$), то систему (26) перепишемо так:

$$\begin{cases} u = v, \\ -3i\alpha_2 u_{t_2} = 2p_x, \\ i\alpha_2 p_{t_2} = -\frac{1}{2}u_{xxx} - 6uu_x + 2(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x, \\ \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} - \mathbf{q}_{xx} - 2u\mathbf{q} = 0. \end{cases} \quad (27)$$

Диференціальним наслідком системи (27) є нелінійна модель вигляду

$$\begin{cases} 3\alpha_2^2 u_{t_2 t_2} = (-u_{xx} - 6u^2 + 4(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*))_{xx}, \\ \alpha_2\mathbf{q}_{t_2} - \mathbf{q}_{xx} - 2u\mathbf{q} = 0, \end{cases} \quad (28)$$

яка є узагальненням моделі Бусинеска.

6. $k = 3, n = 3$: $L_3 = D^3 + 3uD + u_0 + \mathbf{q}\mathcal{M}_0D^{-1}\mathbf{r}^\top$, $M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - 3v_1D - v_0$,

$$\begin{cases} v_1 = u, \\ v_0 = u_0, \\ \alpha_3 u_{0t_3} = 3(\mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x, \\ \alpha_3 u_{t_3} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{r}^\top)_x, \\ M_3\{\mathbf{q}\} = 0, \\ M_3^\top\{\mathbf{r}\} = 0. \end{cases} \quad (29)$$

При допустимій редукції $L_3^* = -L_3$ ($\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}$, $\mathcal{M}_0^* = \mathcal{M}_0$, $\text{Re } u_0 = \frac{3}{2}u_x$, $\text{Im } u_0 =: p$, u – дійсна функція); $M_3^* = -M_3$ ($\alpha_3 \in \mathbf{R}$) систему (29) запишемо так:

$$\begin{cases} v_1 = u, \\ v_0 = u_0, \\ \alpha_3 \mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3u\mathbf{q}_x + \left(\frac{3}{2}u_x + ip\right)\mathbf{q}, \\ \alpha_3 p_{t_3} = \frac{3}{2}i(\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}_x^* - \mathbf{q}_x\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x, \\ \alpha_3 u_{t_3} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^*)_x, \end{cases} \quad (30)$$

Якщо редукція $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{q}}$, $p = 0$ дійсна, то система (30) набуде вигляду

$$\begin{cases} \alpha_3 \mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3u\mathbf{q}_x + \frac{3}{2}u_x\mathbf{q}, \\ \alpha_3 u_{t_3} = (\mathbf{q}\mathcal{M}_0\mathbf{q}^\top)_x. \end{cases} \quad (31)$$

Система (31) є векторним узагальненням системи Дрінфельда-Соколова.

3. Інваріантні перетворення лінійних інтегро-диференціальних та еволюційних рівнянь. У [24] розглядали перетворення лінійних диференціальних виразів за допомогою формальних інтегро-диференціальних символів. Наша мета – знайти зв'язок між алгеброю формальних символів і побудовою точних розв'язків певних класів нелінійних рівнянь математичної фізики.

Твердження 1. *Нехай функції φ та ψ є фіксованими $(1 \times K)$ -матричними розв'язками лінійних еволюційних рівнянь: $M_2\{\varphi\} = 0$, $M_2^T\{\psi\} = 0$, де*

$$M_2 = \alpha_2 \partial_{t_2} - D^2 - 2v, \quad M_2^T = -\alpha_2 \partial_{t_2} - D^2 - 2v, \quad \alpha_2 \in \mathbb{R} \cup i\mathbb{R}; \quad (32)$$

$v = v(x, t_2)$ – скалярні коефіцієнти, а функції $f(x, t_2)$, $g(x, t_2)$ є довільними скалярними розв'язками рівнянь: $M_2\{f\} = 0$, $M_2^T\{g\} = 0$.

Тоді функції $F := f - \varphi \Delta_2^{-1} \Omega_2[\psi, f]$, $\Phi := \varphi \Delta_2^{-1}$, $G := g - \psi \Delta_2^{-1, \top} (\Omega_2[g, \varphi])^\top$, $\Psi := \psi \Delta_2^{-1, \top}$, де

$$\begin{aligned} \Delta_2 &= C + \Omega_2[\psi, \varphi], \quad \Omega_2[g, f] = \int_{(x_0, t_2^0)}^{(x, t_2)} P_2 dx + Q_2 dt_2, \\ P_2 &= g^\top f, \quad Q_2 = \alpha_2^{-1} (g^\top f_x - g_x^\top f), \quad (P_2)_{t_2} = (Q_2)_x, \end{aligned} \quad (33)$$

C – довільна стала матриця розмірності $(K \times K)$, задовольняють лінійні еволюційні рівняння

$$\begin{aligned} \hat{M}_2\{F\} &= 0, \quad \hat{M}_2\{\Phi\} = 0, \quad \hat{M}_2^T\{G\} = 0, \quad \hat{M}_2^T\{\Psi\} = 0, \\ \hat{M}_2 &= \alpha_2 \partial_{t_2} - D^2 - 2((\varphi \Delta_2^{-1} \psi^\top)_x + v) =: \alpha_2 \partial_{t_2} - D^2 - 2\hat{v}, \\ \hat{M}_2^T &= -\alpha_2 \partial_{t_2} - D^2 - 2((\varphi \Delta_2^{-1} \psi^\top)_x + v) = -\alpha_2 \partial_{t_2} - D^2 - 2\hat{v}. \end{aligned} \quad (34)$$

Подібне твердження правильне для оператора \hat{M}_3 третього порядку.

Твердження 2. *Нехай функції φ та ψ є фіксованими $(1 \times K)$ -матричними розв'язками лінійних еволюційних рівнянь: $M_3\{\varphi\} = 0$, $M_3^T\{\psi\} = 0$, де*

$$M_3 = \alpha_3 \partial_{t_3} - D^3 - 3v_1 D - v_0, \quad M_3^T = -\alpha_3 \partial_{t_3} + D^3 + 3Dv_1 - v_0; \quad (35)$$

$v = v(x, t_3)$ – скалярні коефіцієнти, а функції $f(x, t_3)$, $g(x, t_3)$ є довільними скалярними розв'язками рівнянь: $M_3\{f\} = 0$, $M_3^T\{g\} = 0$.

Тоді функції $F := f - \varphi \Delta_3^{-1} \Omega[\psi, f]$, $\Phi := \varphi \Delta_3^{-1}$, $G := g - \psi \Delta_3^{-1, \top} (\Omega[g, \varphi])^\top$, $\Psi := \psi \Delta_3^{-1, \top}$, де

$$\begin{aligned} \Delta_3 &= C + \Omega_3[\psi, \varphi], \quad \Omega_3[g, f] = \int_{(x_0, t_3^0)}^{(x, t_3)} P_3 dx + Q_3 dt_3, \\ P_3 &= g^\top f, \quad Q_3 = \alpha_3^{-1} (g_{xx}^\top f + g^\top f_{xx} - g_x^\top f_x + 3g^\top v_1 f), \end{aligned} \quad (36)$$

C – довільна стала матриця розмірності $(K \times K)$, задовольняють лінійні еволюційні рівняння

$$\hat{M}_3\{F\} = 0, \quad \hat{M}_3\{\Phi\} = 0, \quad \hat{M}_3^\top\{G\} = 0, \quad \hat{M}_3^\top\{\Psi\} = 0,$$

де

$$\hat{M}_3 = \alpha_3 \partial_{t_3} - D^3 - 3\hat{v}_1 D - \hat{v}_0, \quad \hat{M}_3^\top = -\alpha_3 \partial_{t_3} + D^3 + 3D\hat{v}_1 - \hat{v}_0; \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \hat{v}_1 &= v_1 + (\varphi \Delta_3^{-1} \psi^\top)_x, \quad \hat{v}_0 = \frac{3}{2} \{(\varphi \Delta_3^{-1} \psi^\top)_{xx} + \varphi_{xx} \Psi^\top - \Phi \psi_{xx}^\top + \\ &+ \Phi(\psi_x^\top \varphi - \psi^\top \varphi_x) \Psi^\top\} + v_0. \end{aligned} \quad (38)$$

Розглянемо пари операторів L_k, M_n , $k = \overline{1, 3}$; $n = \overline{2, 3}$. Нехай

$$L_1 = D + \mathbf{q} M_0 \Omega_2[\mathbf{r}, \cdot], \quad M_2 = \alpha_2 \partial_{t_2} - D^2 - 2v, \quad (39)$$

де функції $v, \mathbf{q}, \mathbf{r}$ задовольняють систему (18). Оператор L_1 діє у просторі розв'язків рівняння $M_2\{f\} = 0$: $L_1\{f\} = f_x + \mathbf{q} M_0 \Omega_2[\mathbf{r}, f]$, де

$$\Omega_2[\mathbf{r}, f] = \int_{(x_0, t_2^0)}^{(x, t_2)} \mathbf{r}^\top f dx + \alpha_2^{-1} (\mathbf{r}^\top f_x - \mathbf{r}_x^\top f) dt_2 = C + \int_{(x_0, t_2^0)}^{(x, t_2)} P_2 dx + Q_2 dt_2,$$

$((P_2)_{t_2} = (Q_2)_x)$. Правильне таке твердження.

Твердження 3. Нехай

1. Функції φ, ψ є фіксованими розв'язками рівнянь: $M_2\{\varphi\} = 0$, $M_2^\top\{\psi\} = 0$, $L_1\{\varphi\} = \varphi \Lambda_1$, $L_1^\top\{\psi\} = \psi \tilde{\Lambda}_1$, де оператори L_1, M_2 мають вигляд (39) і коефіцієнти яких задовольняють систему (18), $\Lambda_1, \tilde{\Lambda}_1$ є сталими $(K \times K)$ матрицями.

2. Функції f, g є довільними розв'язками рівнянь $M_2\{f\} = 0$, $M_2^\top\{g\} = 0$, $L_1\{f\} = f\lambda$, $L_1^\top\{g\} = g\tilde{\lambda}$, де $\lambda, \tilde{\lambda} \in \mathbb{C}$.

Тоді

1. Функції $F := f - \varphi \Delta_2^{-1} \Omega_2[\psi, f]$, $\Phi := \varphi \Delta_2^{-1}$, $G := g - \psi \Delta_2^{-1, \top} (\Omega_2[g, \varphi])^\top$, $\Psi := \psi \Delta_2^{-1, \top}$, де Δ_2 та потенціал $\Omega_2[\cdot, \cdot]$ визначаються формулою (33), задовольняють рівняння

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \Phi M \Delta_2^{-1} - \hat{\mathbf{q}} M_0 \Omega_2[\mathbf{r}, \varphi] \Delta_2^{-1} + \Phi \tilde{\Lambda}_1^\top, \\ \Psi_x^\top &= \Delta_2^{-1} M \Psi^\top - \Delta_2^{-1} \Omega_2[\psi, \mathbf{q}] M_0 \mathbf{r}^\top - \Lambda \Psi^\top. \end{aligned} \quad (40)$$

$$\begin{aligned} F_x &= F\lambda - \hat{\mathbf{q}} M_0 \Omega_2[\hat{\mathbf{r}}, F] - \Phi M \Omega_2[\Psi, F] - \Phi[(\psi^\top f)(x_0, t_2^0)], \\ G_x^\top &= -\tilde{\lambda}^\top G^\top - \Omega_2[G, \hat{\mathbf{q}}] M_0 \hat{\mathbf{r}}^\top - \Omega_2[G, \Phi] M \Psi - [(g^\top \psi)(x_0, t_2^0)] \Psi^\top, \end{aligned} \quad (41)$$

$$\hat{M}_2\{F\} = 0, \quad \hat{M}_2\{\Phi\} = 0, \quad \hat{M}_2^\top\{G\} = 0, \quad \hat{M}_2^\top\{\Psi\} = 0.$$

де матриця M та функції $\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{r}}$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} M &= C \Lambda_1 - \tilde{\Lambda}_1^\top C - \psi^\top \varphi(x_0, t_2^0), \quad \hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} - \varphi \Delta_2^{-1} \Omega_2[\psi, \mathbf{q}], \\ \hat{\mathbf{r}} &:= \mathbf{r} - \psi \Delta_2^{-1, \top} (\Omega_2[\mathbf{r}, \varphi])^\top, \end{aligned} \quad (42)$$

а оператори $\hat{M}_2, \hat{M}_2^\top$ мають вигляд (34).

2. Для функцій $\Phi, \Psi, \hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{v}$ виконуються рівняння

$$\hat{M}_2\{\Phi\} = 0, \quad \hat{M}_2^\tau\{\Psi\} = 0, \quad \hat{M}_2\{\hat{\mathbf{q}}\} = 0, \quad \hat{M}_2^\tau\{\hat{\mathbf{r}}\} = 0, \quad \hat{v} = \Phi\mathcal{M}\Psi^\top + \hat{\mathbf{q}}\mathcal{M}_0\hat{\mathbf{r}}^\top. \quad (43)$$

За умов $\psi = \bar{\varphi}, \mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}, \mathcal{M}_0^* = \mathcal{M}_0, \mathcal{M} = \mathcal{M}^*, \alpha_3 \in \mathbf{R}$, що відповідає редукції $L_1^* = -L_1, M_3^* = -M_3$, отримуємо як наслідок такі рівняння:

$$\begin{aligned} \alpha_2 \hat{\mathbf{q}}_{t_2} &= \hat{\mathbf{q}}_{xx} + 2(\hat{\mathbf{q}}\mathcal{M}_0\hat{\mathbf{q}}^* + \Phi\mathcal{M}\Phi^*)\mathbf{q}, \\ \alpha_2 \Phi_{t_2} &= \Phi_{xx} + 2(\hat{\mathbf{q}}\mathcal{M}_0\hat{\mathbf{q}}^* + \Phi\mathcal{M}\Phi^*)\Phi, \end{aligned} \quad (44)$$

які при позначеннях $\tilde{\Phi} := (\Phi, \hat{\mathbf{q}}), \tilde{\mathcal{M}} := \begin{pmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_0 \end{pmatrix}$ запишемо так:

$$\alpha_2 \tilde{\Phi}_{t_2} = \tilde{\Phi}_{xx} + 2(\tilde{\Phi}\mathcal{M}\tilde{\Phi}^*)\tilde{\Phi}. \quad (45)$$

Рівняння (45) є векторним узагальненням нелінійного рівняння Шредінгера.

Зуваження 1. Рівняння (41) відповідають рівнянням $\hat{L}_1\{F\} = F\lambda, \hat{L}_1^\tau\{G\} = G\tilde{\lambda}$, а співвідношення (43) відповідають рівнянню Лакса $[\hat{L}_1, \hat{M}_2] = 0$ в алгебрі формальних символів (див. [24]).

Тепер сформулюємо загальне твердження для решти випадків.

Розглянемо пари операторів L_k, M_n , які відповідають формальним символам 1.-6. зі вступу:

1) $k = 1, n = 3$:

$$L_1 = D + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\Omega_3[\mathbf{r}, \cdot], \quad M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - 3v_1D - v_0; \quad (46)$$

2) $k = 2, n = 2$:

$$L_2 = D^2 + 2u + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\Omega_2[\mathbf{r}, \cdot], \quad M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - D^2 - 2v; \quad (47)$$

3) $k = 2, n = 3$:

$$L_2 = D^2 + 2u + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\Omega_3[\mathbf{r}, \cdot], \quad M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - 3v_1D - v_0; \quad (48)$$

4) $k = 3, n = 2$:

$$L_3 = D^3 + 3uD + u_0 + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\Omega_2[\mathbf{r}, \cdot], \quad M_2 = \alpha_2\partial_{t_2} - D^2 - 2v; \quad (49)$$

5) $k = 3, n = 3$:

$$L_3 = D^3 + 3uD + u_0 + \mathbf{q}\mathcal{M}_0\Omega_3[\mathbf{r}, \cdot], \quad M_3 = \alpha_3\partial_{t_3} - D^3 - 3v_1D - v_0. \quad (50)$$

Оператори L_k діють у просторі розв'язків рівняння $M_n\{f\} = 0$. Правильне таке твердження.

Твердження 4. Нехай

1. Функції φ, ψ є фіксованими розв'язками рівнянь: $M_n\{\varphi\} = 0, M_n^\tau\{\psi\} = 0, L_k\{\varphi\} = \varphi\Lambda_k, L_k^\tau\{\psi\} = \psi\tilde{\Lambda}_k$, де оператори L_k, M_n мають відповідний вигляд (46)-(50), залежно від вибору k та n , і коефіцієнти яких задовольняють відповідну з систем (20), (22), (24), (26), (29), $\Lambda_k, \tilde{\Lambda}_k$ є сталими $(K \times K)$ матрицями.

2. Функції f, g є довільними розв'язками рівнянь $M_n\{f\} = 0, M_n^\tau\{g\} = 0, L_k\{f\} = f\lambda, L_k^\tau\{g\} = g\tilde{\lambda}$.

Тоді

1. Функції $F := f - \varphi \Delta_n^{-1} \Omega_n[\psi, f]$, $\Phi := \varphi \Delta_n^{-1}$, $G := g - \psi \Delta_n^{-1, \top} (\Omega_n[g, \varphi])^\top$, $\Psi := \psi \Delta_n^{-1, \top}$, де Δ_n , $\Omega_n[\cdot, \cdot]$ визначаємо формулою (33) або (36) (залежно від n), задовольняють рівняння:

1) $k = 1$, $n = 3$:

$$\begin{aligned} \Phi_x &= \Phi \tilde{\Lambda}_1^\top + \Phi \mathcal{M} \Delta_3^{-1} - \hat{\mathbf{q}} \mathcal{M}_0 \Omega_3[\mathbf{r}, \varphi] \Delta_2^{-1}, \\ \Psi_x^\top &= -\Lambda_1 \Psi^\top + \Delta_3^{-1} \mathcal{M} \Psi^\top - \Delta_3^{-1} \Omega_3[\psi, \mathbf{q}] \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top. \end{aligned} \quad (51)$$

$$\begin{aligned} F_x &= F \lambda - \Phi \mathcal{M} \Omega_3[\Psi, F] - \hat{\mathbf{q}} \mathcal{M}_0 \Omega_3[\hat{\mathbf{r}}, F] - (\psi^\top f)(x_0, t_3^0), \\ G_x^\top &= -\tilde{\lambda}^\top G^\top - \Omega_3[G, \hat{\mathbf{q}}] \mathcal{M}_0 \hat{\mathbf{r}}^\top + \Omega_3[G, \Phi] \mathcal{M} \Psi^\top - (g^\top \varphi)(x_0, t_3^0) \Psi^\top, \end{aligned} \quad (52)$$

де матриця \mathcal{M} та функції $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{r}}$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= C \Lambda_1 - \tilde{\Lambda}_1^\top C - (\psi^\top \varphi)(x_0, t_3^0), \\ \hat{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} - \varphi \Delta_2^{-1} \Omega_2[\psi, \mathbf{q}], \quad \hat{\mathbf{r}} := \mathbf{r} - \psi \Delta_2^{-1, \top} (\Omega_2[\mathbf{r}, \varphi])^\top. \end{aligned}$$

а оператори \hat{M}_3 , \hat{M}_3^\top виглядають як (37);

2) $k = 2$, $n = 2$:

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} &= \Phi \mathcal{M} \Delta_2^{-1} - \hat{\mathbf{q}} \mathcal{M}_0 \Omega_2[\mathbf{r}, \varphi] \Delta_2^{-1} - 2\hat{u} \Phi + \Phi \tilde{\Lambda}_2^\top, \\ \Psi_{xx}^\top &= -\Delta_2^{-1} \mathcal{M} \Psi^\top - \Delta_2^{-1} \Omega_2[\psi, \mathbf{q}] \mathcal{M}_0 \mathbf{r}^\top - 2\Psi^\top \hat{u} - \Lambda_2 \Psi^\top. \end{aligned} \quad (53)$$

$$\begin{aligned} F_{xx} &= F \lambda - \hat{u} F - \Phi \mathcal{M} \Omega_2[\Psi, F] - \hat{\mathbf{q}} \mathcal{M}_0 \Omega_2[\hat{\mathbf{r}}, F] - \Phi[(\psi^\top f_x - \psi_x^\top f)(x_0, t_2^0)], \\ G_{xx}^\top &= \tilde{\lambda}^\top G^\top - G^\top \hat{u} + \Omega_2[G, \hat{\mathbf{q}}] \mathcal{M}_0 \hat{\mathbf{r}}^\top + \Omega_2[G, \Phi] \mathcal{M} \Psi^\top + [(g^\top \varphi_x - g_x^\top \varphi)(x_0, t_2^0)] \Psi^\top, \end{aligned} \quad (54)$$

де матриця \mathcal{M} та функції $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{r}}$ та \hat{u} мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= C \Lambda_2 - \tilde{\Lambda}_2^\top C - (\psi^\top \varphi_x - \psi_x^\top \varphi)(x_0, t_2^0), \\ \hat{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} - \varphi \Delta_2^{-1} \Omega_2[\psi, \mathbf{q}], \quad \hat{\mathbf{r}} := \mathbf{r} - \psi \Delta_2^{-1, \top} (\Omega_2[\mathbf{r}, \varphi])^\top, \\ \hat{u} &= ((\varphi \Delta_2^{-1} \psi^\top)_x + u), \end{aligned} \quad (55)$$

а оператори \hat{M}_2 , \hat{M}_2^\top виглядають як (34);

3) $k = 2$, $n = 3$:

$$\begin{aligned} \Phi_{xx} &= \Phi \tilde{\Lambda}_2^\top + \Phi \mathcal{M} \Delta_3^{-1} - \hat{\mathbf{q}} \mathcal{M}_0 \Omega_3[\mathbf{r}, \varphi] \Delta_3^{-1} - 2\hat{u} \Phi, \\ \Psi_{xx}^\top &= \Lambda_2 \Psi^\top - \Delta_3^{-1} \mathcal{M} \Psi^\top + \Delta_3^{-1} \Omega_3[\psi, \mathbf{q}] \mathcal{M}_0 \hat{\mathbf{r}}^\top - 2\Psi^\top \hat{u}. \end{aligned} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} F_{xx} &= F \lambda - 2\hat{u} F - \Phi \mathcal{M} \Omega_3[\Psi, F] - \hat{\mathbf{q}} \mathcal{M}_0 \Omega_3[\hat{\mathbf{r}}, F] - \Phi K_1, \\ G_{xx}^\top &= \tilde{\lambda}^\top G^\top - 2G^\top \hat{u} + \Omega_3[G, \hat{\mathbf{q}}] \mathcal{M}_0 \hat{\mathbf{r}}^\top + \Omega_3[G, \Phi] \mathcal{M} \Psi^\top + K_2 \Psi^\top, \end{aligned} \quad (57)$$

де матриця K_1 , K_2 , \mathcal{M} , \hat{u} та функції $\hat{\mathbf{q}}$, $\hat{\mathbf{r}}$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} K_1 &= (\psi^\top f_x - \psi_x^\top f)(x_0, t_3^0), \\ K_2 &= (g^\top \varphi_x - g_x^\top \varphi)(x_0, t_3^0), \\ \mathcal{M} &= C \Lambda_2 - \tilde{\Lambda}_2^\top C - (\psi^\top \varphi_x - \psi_x^\top \varphi)(x_0, t_2^0), \\ \hat{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} - \varphi \Delta_3^{-1} \Omega_3[\psi, \mathbf{q}], \quad \hat{\mathbf{r}} := \mathbf{r} - \psi \Delta_3^{-1, \top} (\Omega_3[\mathbf{r}, \varphi])^\top, \\ \hat{u} &= (\varphi \Delta_3^{-1} \psi)_x + u. \end{aligned}$$

а оператори \hat{M}_3 , \hat{M}_3^\top виглядають як (37);

4) $k = 3, n = 2$:

$$\begin{aligned}\Phi_{xxx} &= \Phi \tilde{\Lambda}_3^\top + \Phi \mathcal{M} \Delta_2^{-1} - \hat{\mathbf{q}} \mathcal{M}_0 \Omega_2[\mathbf{r}, \varphi] \Delta_2^{-1} - 3\hat{u} \Phi_x - \hat{u}_0 \Phi, \\ \Psi_{xxx}^\top &= -\Lambda_3 \Psi^\top + \Delta_2^{-1} \mathcal{M} \Psi^\top - \Delta_2^{-1} \Omega_2[\psi, \mathbf{q}] \mathcal{M}_0 \hat{\mathbf{r}}^\top - 3(\Psi^\top \hat{u})_x + \Psi^\top \hat{u}_0.\end{aligned}\quad (58)$$

$$\begin{aligned}F_{xxx} &= F\lambda - 3\hat{u}F_x - \hat{u}_0F - \Phi \mathcal{M} \Omega_2[\Psi, F] - \hat{\mathbf{q}} \mathcal{M}_0 \Omega_2[\hat{\mathbf{r}}, F] - \Phi K_1, \\ G_{xxx}^\top &= \tilde{\lambda}^\top G^\top - 3(G^\top \hat{u})_x + G^\top \hat{u}_0 + \Omega_2[G, \hat{\mathbf{q}}] \mathcal{M}_0 \hat{\mathbf{r}}^\top + \Omega_2[G, \Phi] \mathcal{M} \Psi^\top + K_2 \Psi^\top,\end{aligned}\quad (59)$$

де матриця K_1, K_2, \mathcal{M} та функції $\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{u}, \hat{u}_0$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}K_1 &= (\psi_{xx}^\top f + \psi^\top f_{xx} - \psi_x^\top f_x + \psi^\top u_1 f)(x_0, t_2^0), \\ K_2 &= (g_{xx}^\top \varphi + g^\top \varphi_{xx} - g_x^\top \varphi_x + g^\top u_1 \varphi)(x_0, t_2^0), \\ \mathcal{M} &= C\Lambda_3 - \tilde{\Lambda}_3^\top C - (\psi_{xx}^\top \varphi + \psi^\top \varphi_{xx} - \psi_x^\top \varphi_x + \psi^\top u_1 \varphi)(x_0, t_2^0), \\ \hat{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} - \varphi \Delta_2^{-1} \Omega_2[\psi, \mathbf{q}], \quad \hat{\mathbf{r}} := \mathbf{r} - \psi \Delta_2^{-1, \top} (\Omega_2[\mathbf{r}, \varphi])^\top, \\ \hat{u} &= u + (\varphi \Delta_2^{-1} \psi^\top)_x, \quad \hat{u}_0 = \frac{3}{2} \{ (\varphi \Delta_2^{-1} \psi^\top)_{xx} + \varphi_{xx} \Psi^\top - \Phi \psi_{xx}^\top + \\ &\quad + \Phi (\psi_x^\top \varphi - \psi^\top \varphi_x) \Psi^\top \} + u_0.\end{aligned}\quad (60)$$

а оператори $\hat{M}_2, \hat{M}_2^\top$ виглядають як (34).

5) $k = 3, n = 3$:

$$\begin{aligned}\Phi_{xxx} &= \Phi \tilde{\Lambda}_3^\top + \Phi \mathcal{M} \Delta_3^{-1} - \hat{\mathbf{q}} \mathcal{M}_0 \Omega_3[\mathbf{r}, \varphi] \Delta_3^{-1} - 3\hat{u} \Phi_x - \hat{u}_0 \Phi, \\ \Psi_{xxx}^\top &= -\Lambda_3 \Psi^\top + \Delta_3^{-1} \mathcal{M} \Psi^\top - \Delta_3^{-1} \Omega_3[\psi, \mathbf{q}] \mathcal{M}_0 \hat{\mathbf{r}}^\top - 3(\Psi^\top \hat{u})_x + \Psi^\top \hat{u}_0.\end{aligned}\quad (61)$$

$$\begin{aligned}F_{xxx} &= F\lambda - 3\hat{u}F_x - \hat{u}_0F - \Phi \mathcal{M} \Omega_3[\Psi, F] - \hat{\mathbf{q}} \mathcal{M}_0 \Omega_3[\hat{\mathbf{r}}, F] - \Phi K_1, \\ G_{xxx}^\top &= \tilde{\lambda}^\top G^\top - 3(G^\top \hat{u})_x + G^\top \hat{u}_0 + \Omega_3[G, \hat{\mathbf{q}}] \mathcal{M}_0 \hat{\mathbf{r}}^\top + \Omega_3[G, \Phi] \mathcal{M} \Psi^\top - K_2 \Psi^\top,\end{aligned}\quad (62)$$

де матриця K_1, K_2, \mathcal{M} та функції $\hat{\mathbf{q}}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{u}_1, \hat{u}_0$ мають такий вигляд:

$$\begin{aligned}K_1 &= (\psi_{xx}^\top f + \psi^\top f_{xx} - \psi_x^\top f_x + \psi^\top u_1 f)(x_0, t_3^0), \\ K_2 &= (g_{xx}^\top \varphi + g^\top \varphi_{xx} - g_x^\top \varphi_x + g^\top u_1 \varphi)(x_0, t_3^0), \\ \mathcal{M} &= C\Lambda_3 - \tilde{\Lambda}_3^\top C - (\psi_{xx}^\top \varphi + \psi^\top \varphi_{xx} - \psi_x^\top \varphi_x + \psi^\top u_1 \varphi)(x_0, t_3^0), \\ \hat{\mathbf{q}} &= \mathbf{q} - \varphi \Delta_3^{-1} \Omega_3[\psi, \mathbf{q}], \quad \hat{\mathbf{r}} := \mathbf{r} - \psi \Delta_3^{-1, \top} (\Omega_3[\mathbf{r}, \varphi])^\top, \\ 3\hat{u} &= u + (\varphi \Delta_3^{-1} \psi^\top)_x, \quad \hat{u}_0 = \frac{3}{2} \{ (\varphi \Delta_3^{-1} \psi^\top)_{xx} + \varphi_{xx} \Psi^\top - \Phi \psi_{xx}^\top + \\ &\quad + \Phi (\psi_x^\top \varphi - \psi^\top \varphi_x) \Psi^\top \} + u_0.\end{aligned}\quad (63)$$

а оператори $\hat{M}_3, \hat{M}_3^\top$ виглядають як (37).

II. Введемо позначення $\tilde{\Phi} := (\Phi, \hat{\mathbf{q}}), \tilde{\Psi} := (\Psi, \hat{\mathbf{r}}), \tilde{\mathcal{M}} := \begin{pmatrix} \mathcal{M} & 0 \\ 0 & \mathcal{M}_0 \end{pmatrix}$.

Для функцій $\tilde{\Phi}, \tilde{\Psi}$, матриці $\tilde{\mathcal{M}}$, коефіцієнтів операторів \hat{M}_n та для коефіцієнтів \hat{u}, \hat{u}_0 виконуються рівності.

1. $k = 1, n = 3$:

$$\begin{cases} \hat{v}_1 = \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top, \\ \hat{v}_0 = 3(\tilde{\Phi}_x \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top), \\ \hat{M}_3 \{ \tilde{\Phi} \} = 0, \\ \hat{M}_3^\top \{ \tilde{\Psi} \} = 0. \end{cases}\quad (64)$$

За додаткових умов $\psi = \bar{\varphi}, \mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}, \tilde{\mathcal{M}} = \tilde{\mathcal{M}}^*, \alpha_3 \in \mathbf{R}$, що у формальних символах відповідає редукції $\hat{L}_1^* = -\hat{L}_1, \hat{M}_3^* = -\hat{M}_3$, наслідком системи (64) є нелінійне рівняння:

$$\alpha_3 \tilde{\Phi}_{t_3} = \tilde{\Phi}_{xxx} + 3(\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Phi}^*) \tilde{\Phi}_x + 3(\tilde{\Phi}_x \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Phi}^*) \tilde{\Phi}, \quad (65)$$

яке є векторним узагальненням модифікованого рівняння Кортевега-де Вріза (mKdV).

2. $k = 2, n = 2$:

$$\begin{cases} \hat{M}_2\{\tilde{\Phi}\} = 0, \hat{M}_2^T\{\tilde{\Psi}^\top\} = 0, \\ \hat{v} = \hat{u}, \\ \alpha_2 \hat{u}_{t_2} = (\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top)_x. \end{cases} \quad (66)$$

За умов $\psi = \bar{\varphi}$, $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}$, $\tilde{\mathcal{M}}^* = -\tilde{\mathcal{M}}$, $u = u^*$, $\alpha_2 \in i\mathbf{R}$, що відповідають редукції $\hat{M}_2 = \hat{M}_2^*$, $\hat{L}_2 = \hat{L}_2^*$, як наслідок системи (66), отримуємо векторне узагальнення моделі Яджими-Ойкави

$$\begin{cases} \alpha_2 \hat{u}_{t_2} = (\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Phi}^*)_x; \\ \alpha_2 \tilde{\Phi}_{t_2} = \tilde{\Phi}_{xx} + 2\hat{u}\tilde{\Phi}. \end{cases} \quad (67)$$

3. $k = 2, n = 3$:

$$\begin{cases} \hat{v}_1 = \hat{u} \\ \hat{v}_0 = \frac{3}{2}(\hat{u}_x + \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top), \\ \alpha_3(\hat{u})_{t_3} = \frac{1}{4}\hat{u}_{xxx} + 3\hat{u}\hat{u}_x + \frac{3}{4}(\tilde{\Phi}_x \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top - \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}_x^\top), \\ \hat{M}_3\{\tilde{\Phi}\} = 0, \\ \hat{M}_3^T\{\tilde{\Psi}\} = 0. \end{cases} \quad (68)$$

При додаткових припущеннях $\psi = \bar{\varphi}$, $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}$, $\tilde{\mathcal{M}}^* = -\tilde{\mathcal{M}}$, $u = u^*$, $\alpha_3 \in \mathbf{R}$, що відповідають редукції $\hat{L}_1^* = -\hat{L}_1$, $\hat{M}_3^* = -\hat{M}_3$, з рівнянь (68) як наслідок отримуємо систему Мельникова

$$\begin{cases} \alpha_3 \tilde{\Phi}_{t_3} = \tilde{\Phi}_{xxx} + 3u\tilde{\Phi}_x + \frac{3}{2}u_x\tilde{\Phi} + \frac{3}{2}\tilde{\Phi}\tilde{\mathcal{M}}\tilde{\Phi}^*\tilde{\Phi} \\ \alpha_3 u_{t_3} = \frac{1}{4}u_{xxx} + 3uu_x + \frac{3}{4}(\tilde{\Phi}_x \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Phi}^* - \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Phi}_x^*)_x, \end{cases} \quad (69)$$

яка є вищим потоком Яджими-Ойкави.

4. $k = 3, n = 2$:

$$\begin{cases} \hat{u} = \hat{v} \\ 3\alpha_2 \hat{u}_{t_2} = -3\hat{u}_{xx} + 2\hat{u}_0x; \\ \alpha_2(\hat{u}_0)_{t_2} = -2\hat{u}_{xxx} - 6\hat{u}\hat{u}_x + \hat{u}_0xx + 2(\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top)_x; \\ \hat{M}_2\{\tilde{\Phi}\} = 0; \\ \hat{M}_2^T\{\tilde{\Psi}\} = 0. \end{cases} \quad (70)$$

За умов $\psi = \bar{\varphi}$, $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}$, $\tilde{\mathcal{M}}^* = \tilde{\mathcal{M}}$, $u = u^*$, $\text{Re } u_0 = \frac{3}{2}u_x$, що відповідають редукції $\hat{L}_3^* = -\hat{L}_3$, $\hat{M}_2^* = \hat{M}_2$ ($\alpha_2 \in i\mathbf{R}$), як наслідок системи (70) отримуємо рівняння

$$\begin{cases} -3i\alpha_2 \hat{u}_{t_2} = 2\hat{p}_x; \\ i\alpha_2 \hat{p}_{t_2} = -\frac{1}{2}\hat{u}_{xxx} - 6\hat{u}\hat{u}_x + 2(\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Phi}^*)_x; \quad (\text{Im } \hat{u}_0 =: \hat{p}) \\ \alpha_2 \tilde{\Phi}_{t_2} - \tilde{\Phi}_{xx} - 2\hat{u}\tilde{\Phi} = 0. \end{cases} \quad (71)$$

Диференціальним наслідком системи (71) є нелінійна модель вигляду

$$\begin{cases} 3\alpha_2^2 \hat{u}_{t_2 t_2} = (-\hat{u}_{xx} - 6\hat{u}^2 + 4(\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Phi}^*))_{xx}; \\ \alpha_2 \tilde{\Phi}_{t_2} - \tilde{\Phi}_{xx} - 2\hat{u} \tilde{\Phi} = 0, \end{cases} \quad (72)$$

яка є узагальненням моделі Бусинеска.

5. $k = 3, \quad n = 3$:

$$\begin{cases} \hat{v}_1 = \hat{u} \\ \hat{v}_0 = \hat{u}_0, \\ \alpha_3 \hat{u}_{0t_3} = 3(\tilde{\Phi}_x \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top)_x, \\ \alpha_3 \hat{u}_{t_3} = (\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top)_x, \\ \hat{M}_3 \{\tilde{\Phi}\} = 0, \\ \hat{M}_3^\top \{\tilde{\Psi}\} = 0. \end{cases} \quad (73)$$

При додаткових припущеннях $\mathbf{r} = \bar{\mathbf{q}}, \tilde{\mathcal{M}}^* = \tilde{\mathcal{M}}, \operatorname{Re} u_0 = \frac{3}{2} u_x, u = u^*, \alpha_3 \in \mathbf{R}$, що відповідають редукції $L_3^* = -L_3, \hat{M}_3^* = -\hat{M}_3$, наслідком системи (73) буде рівняння

$$\begin{cases} \alpha_3 \tilde{\Phi}_{t_3} = \tilde{\Phi}_{xxx} + 3\hat{u} \tilde{\Phi}_x + \left(\frac{3}{2} \hat{u}_x + i\hat{p}\right) \tilde{\Phi} \\ \alpha_3 \hat{p}_{t_3} = \frac{3}{2} i (\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Phi}_x^* - \tilde{\Phi}_x \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Phi}^*)_x, \\ \alpha_3 u_{t_3} = (\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Phi}^*)_x, \end{cases} \quad (\operatorname{Im} \hat{u}_0 =: \hat{p}). \quad (74)$$

У дійсному випадку ($\hat{p} = 0, \tilde{\Phi} = \bar{\tilde{\Phi}}$) система (74) набуде вигляду

$$\begin{cases} \alpha_3 \tilde{\Phi}_{t_3} = \tilde{\Phi}_{xxx} + 3\hat{u} \tilde{\Phi}_x + \frac{3}{2} \hat{u}_x \tilde{\Phi} \\ \alpha_3 u_{t_3} = (\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Phi}^\top)_x, \end{cases} \quad (75)$$

Твердження 5. Нехай

1. Функції φ, ψ є фіксованими розв'язками рівнянь: $M_n \{\varphi\} = 0, M_n^\top \{\psi\} = 0, n = 2, 3; L_1 \{\varphi\} = \varphi \Lambda_1, L_1^\top \{\psi\} = \psi \tilde{\Lambda}_1$, де оператори L_1, M_n мають вигляд (39) та (46) відповідно, і коефіцієнти яких задовольняють системи (18), (20); $\Lambda_1, \tilde{\Lambda}_1$ є сталими $(K \times K)$ матрицями.

2. Функції f, g є довільними розв'язками рівнянь $M_n \{f\} = 0, M_n^\top \{g\} = 0, L_1 \{f\} = f \lambda, L_1^\top \{g\} = g \tilde{\lambda}$.

Тоді

Функції $F := f - \varphi \Delta_{23}^{-1} \Omega_{23} [\psi, f], \Phi := \varphi \Delta_{23}^{-1}, G := g - \psi \Delta_{23}^{-1, \top} (\Omega_{23} [g, \varphi])^\top, \Psi := \psi \Delta_{23}^{-1, \top}$, де

$$\begin{aligned} \Delta_{23} &= C + \Omega_{23} [\psi, \varphi], \quad \Omega_{23} [g, f] = \int_{(x_0, t_2^0, t_3^0)}^{(x, t_2, t_3)} P dx + Q dt_2 + R dt_3, \\ P &= g^\top f, \quad Q = \alpha_2^{-1} (g^\top f_x - g_x^\top f), \quad R = \alpha_3^{-1} (g_{xx}^\top f + g^\top f_{xx} - g_x^\top f_x + 3g^\top v_1 f), \end{aligned} \quad (76)$$

задовольняють рівняння (40), (41), (51), (52), а перетворені оператори \hat{M}_2 та \hat{M}_3 (див. твердження 2.1, 2.2) мають вигляд

$$M_3 = \alpha_3 \partial_{t_3} - D^3 - 3\hat{v}_1 D - \hat{v}_0, \quad M_2 = \alpha_2 \partial_{t_2} - D^2 - 2\hat{v}, \quad (77)$$

де

$$\begin{aligned}\hat{v} &= v + (\varphi \Delta_{23}^{-1} \psi^\top)_x, \\ \hat{v}_1 &= v_1 + (\varphi \Delta_{23}^{-1} \psi^\top)_x, \\ \hat{v}_0 &= \frac{3}{2} \{ (\varphi \Delta_{23}^{-1} \psi^\top)_{xx} + \varphi_{xx} \Psi^\top - \Phi \psi_{xx}^\top + \Phi (\psi_x^\top \varphi - \psi^\top \varphi_x) \Psi^\top \} + v_0.\end{aligned}\quad (78)$$

Коефіцієнти перетворених операторів \hat{M}_2 та \hat{M}_3 задовольнятимуть систему:

$$\begin{cases} \hat{v} = \hat{v}_1, \\ 2\hat{v}_{0x} = 3(\alpha_2 \hat{v}_{t_2} + \hat{v}_{xx}), \\ (2\alpha_3 \hat{v}_{t_3} - \frac{1}{2} \hat{v}_{xxx} - 6\hat{v} \hat{v}_x) = \frac{1}{2} \alpha_2 (2\hat{v}_{0t_2} - 3\hat{v}_{xt_2}); \end{cases}\quad (79)$$

наслідком якої є рівняння Кадомцева-Петвіашвілі (КП)

$$(2\alpha_3 \hat{v}_{t_3} - \frac{1}{2} \hat{v}_{xxx} - 6\hat{v} \hat{v}_x)_x = \frac{3}{2} \alpha_2^2 \hat{v}_{t_2 t_2}.\quad (80)$$

Зробимо заміну $V = -2\hat{v}$ та підставимо $\alpha_3 = -\frac{1}{4}$. Це зведе рівняння КП (80) до вигляду

$$(V_{t_3} + V_{xxx} - 6VV_x)_x = -3\alpha_2^2 V_{t_2 t_2}.\quad (81)$$

Доведення. З тверджень 2.3 та 2.4 (системи (43) та (64)) випливає, що для коефіцієнтів операторів \hat{M}_2 та \hat{M}_3 виконуються рівності: $\hat{v} = \hat{v}_1 = \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top$, $\hat{v}_0 = 3(\tilde{\Phi}_x \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top)$. Крім того, з тверджень 2.1-2.4 випливає, що $\hat{M}_2 \{ \tilde{\Phi} \} = 0$, $\hat{M}_2^\top \{ \tilde{\Psi} \} = 0$, де $\tilde{\Phi} = (\hat{\Phi}, \hat{\mathbf{q}})$, $\tilde{\Psi} = (\hat{\Psi}, \hat{\mathbf{r}})$. Відповідно,

$$\begin{aligned}2\hat{v}_{0x} - 3(\alpha_2 \hat{v}_{t_2} + \hat{v}_{xx}) &= 2\hat{v}_{0x} - 3\hat{v}_{xx} - 3\alpha_2 \hat{v}_{t_2} = \\ &= 6(\tilde{\Phi}_x \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top)_x - 3(\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top)_{xx} - 3\alpha_2 (\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top)_{t_2} = \\ &= 3(\tilde{\Phi}_{xx} - \alpha_2 \tilde{\Phi}_{t_2}) \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top + 3\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} (\alpha_2 \tilde{\Psi}_{t_2}^\top - \tilde{\Psi}_{xx}^\top) = \\ &= 6(-\tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top + \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top) = 0.\end{aligned}\quad (82)$$

Тепер розглянемо комутатор: $[\hat{M}_2, \hat{M}_3] := \hat{M}_2 \hat{M}_3 - \hat{M}_3 \hat{M}_2 = 6(\hat{v}_{1x} - \hat{v}_x) D^2 + (2\hat{v}_{0x} - 3(\alpha_2 \hat{v}_{t_2} + \hat{v}_{xx})) D + (2\alpha_3 \hat{v}_{t_3} - 2\hat{v}_{xxx} - 6\hat{v} \hat{v}_x + \hat{v}_{0xx} - \alpha_2 \hat{v}_{0t_2}) = 0D^2 + 0D + (2\alpha_3 \hat{v}_{t_3} - 2\hat{v}_{xxx} - 6\hat{v} \hat{v}_x + \hat{v}_{0xx} - \alpha_2 \hat{v}_{0t_2})$.

Оскільки за твердженнями 2.1-2.4 функція $\tilde{\Phi}$ є в ядрі операторів M_n , $n = 2, 3$, то виконується рівність $[\hat{M}_2, \hat{M}_3] \{ \tilde{\Phi} \} = 0$. З іншого боку, $[\hat{M}_2, \hat{M}_3] \{ \tilde{\Phi} \} = (2\alpha_3 \hat{v}_{t_3} - 2\hat{v}_{xxx} - 6\hat{v} \hat{v}_x + \hat{v}_{0xx} - \alpha_2 \hat{v}_{0t_2}) \tilde{\Phi}$. Отож, якщо хоча б одна компонента вектора $\tilde{\Phi}$ не є тотожним нулем, то $(2\alpha_3 \hat{v}_{t_3} - 2\hat{v}_{xxx} - 6\hat{v} \hat{v}_x + \hat{v}_{0xx} - \alpha_2 \hat{v}_{0t_2}) = 0$. До того ж $\tilde{\Phi} \equiv 0 \iff \hat{v} = \tilde{\Phi} \tilde{\mathcal{M}} \tilde{\Psi}^\top \equiv 0$. Отож,

$$(2\alpha_3 \hat{v}_{t_3} - 2\hat{v}_{xxx} - 6\hat{v} \hat{v}_x + \hat{v}_{0xx} - \alpha_2 \hat{v}_{0t_2}) = 0.\quad (83)$$

Використавши рівності (82) та (83), отримаємо систему (79), що й треба було довести. \square

Аналогічні твердження правильні для пар (L_2, M_2) , (L_2, M_3) і для пар (L_3, M_2) , (L_3, M_3) .

Твердження 6. *Зафіксуємо $k = 2$ або $k = 3$. Нехай*

1. *Функції φ, ψ є фіксованими розв'язками рівнянь: $M_n\{\varphi\} = 0, M_n^\tau\{\psi\} = 0, n = 2, 3; L_k\{\varphi\} = \varphi\Lambda_k, L_k^\tau\{\psi\} = \psi\tilde{\Lambda}_k$, де оператори $L_k, M_n, n = 2, 3$, мають вигляд (47) та (48) для $k = 2$ ((49) та (50) для $k = 3$), і коефіцієнти яких задовольняють системи (66), (68) для $k = 2$ ((70), (73) для $k = 3$). $\Lambda_k, \tilde{\Lambda}_k$ є сталими $(K \times K)$ матрицями.*

2. *Функції f, g є довільними розв'язками рівнянь $M_n\{f\} = 0, M_n^\tau\{g\} = 0, n = 2, 3; L_k\{f\} = f\lambda, L_k^\tau\{g\} = g\tilde{\lambda}_k$.*

Тоді

Функції $F := f - \varphi\Delta_{23}^{-1}\Omega_{23}[\psi, f], \Phi := \varphi\Delta_{23}^{-1}, G := g - \psi\Delta_{23}^{-1, \top}(\Omega_{23}[g, \varphi])^\top, \Psi := \psi\Delta_{23}^{-1, \top}$, де потенціал Δ_{23} виглядає як (76), задовольняють рівняння (53), (54), (56), (57) для $k = 2$ ((58), (59), (61), (62) для $k = 3$), а перетворені оператори \hat{M}_2 та \hat{M}_3 та їхні коефіцієнти мають вигляд (77), (78) та задовольняють систему (79), наслідком якої є рівняння КП (80).

4. Побудова точних розв'язків нелінійного рівняння Шредінгера. Розглянемо побудову розв'язків нелінійного рівняння Шредінгера (НРШ) та його векторного узагальнення. Для цього прийемо у твердженні 2.3 $\alpha_2 = i, \mathbf{q} = \bar{\mathbf{r}} = 0, \psi = \bar{\varphi}$.

У цьому разі рівняння (44) набуде вигляду

$$i\Phi_{t_2} = \Phi_{xx} + 2(\Phi M \Phi^*) \Phi. \quad (84)$$

4.1. *Скалярний випадок твердження 2.3 ($\mathbf{K} = 1$).* При $K = 1$ функція $\Phi := \varphi\Delta_2^{-1}$ буде розв'язком НРШ (84)

$$i\Phi_{t_2} = \Phi_{xx} + 2\mu|\Phi|^2\Phi \quad (\mu := M \in \mathbb{R}), \quad (85)$$

де φ – розв'язок рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_x = \varphi\Lambda_1, & \Lambda_1 \in \mathbb{C} \\ i\varphi_y = \varphi_{xx}. \end{cases} \quad (86)$$

У потенціалі Δ_2 (33) прийемо $(x_0, t_2^0) = (0, 0)$, а розв'язок системи (86) виберемо так: $\varphi = e^{\lambda_{11}x - i\lambda_{12}^2 t_2} = e^{(\lambda_{11} + i\lambda_{12})x - i(\lambda_{11} + i\lambda_{12})^2 t_2}$ ($\lambda_{11} = \text{Re}\Lambda_1, \lambda_{12} = \text{Im}\Lambda_1$). Розглянемо два можливі випадки: $\lambda_{11} = 0$ та $\lambda_{11} \neq 0$.

1. $\lambda_{11} \neq 0$.

Функція $\mathbf{q} = \Phi$ та скаляр μ набудуть, відповідно, вигляду

$$\mathbf{q} = \Phi = \frac{2\lambda_{11}e^{\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}t_2}}{2C\lambda_{11} - 1 + e^{2\lambda_{11}x + 4\lambda_{11}\lambda_{12}t_2}} e^{i(\lambda_{12}x + (\lambda_{12}^2 - \lambda_{11}^2)t_2)}, \quad \mu = 2C\lambda_{11} - 1, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (87)$$

($\lambda_{11} \neq 0$). Прийемо $C = \frac{1}{\lambda_{11}}$ у формулі (87). Тоді функція \mathbf{q} (87) виглядатиме так:

$$\mathbf{q} = \frac{\lambda_{11}}{\text{ch}(\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}t_2)} e^{i(\lambda_{12}x + (\lambda_{12}^2 - \lambda_{11}^2)t_2)} \quad (88)$$

і задовольнятиме нелінійне рівняння Шредінгера (85) з $\mu = 1$.

На рис. 1 зображено графіки функцій $|\mathbf{q}|$ та $\text{Re } \mathbf{q}$ при $\Lambda_1 = 1 + i$ та $t := t_2 = -5, 0, 5$, відповідно.

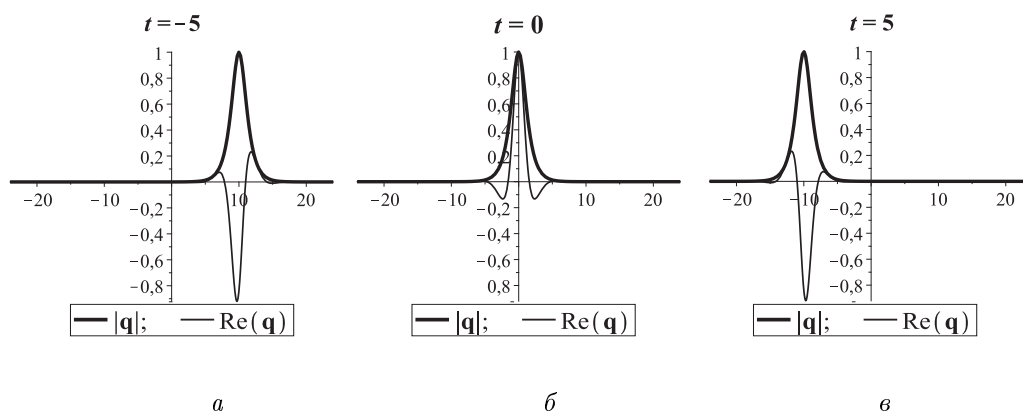


Рис. 1

Функція \mathbf{q} описує поширення пакета коротких хвиль, а $|\mathbf{q}|$ є обвідною хвильового пакета. Параметр λ_{11} дорівнює висоті хвилі $|\mathbf{q}|$, а параметр λ_{12} відповідає за швидкість v руху хвилі $|\mathbf{q}|$ з часом ($v = 2\lambda_{12}$).

Окремо виділимо стаціонарний стан, коли $|\mathbf{q}|$ не залежить від часу. Це буде у випадку, коли $\lambda_{12} = 0$ і функція $|\mathbf{q}|$ набуде вигляду

$$|\mathbf{q}| = \frac{|\lambda_{11}|}{\text{ch}(\lambda_{11}x)}. \quad (89)$$

Якщо у формулі (87) прийняти $C = 0$, то \mathbf{q} буде сингулярним розв'язком рівняння Шредінгера (85) з $\mu = -1$ і набуде такого вигляду:

$$\mathbf{q} = \frac{\lambda_{11}}{\text{sh}(\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}t_2)} e^{i(\lambda_{12}x + (\lambda_{12}^2 - \lambda_{11}^2)t_2)}. \quad (90)$$

Графіки функцій $|\mathbf{q}|$ та $\text{Re } \mathbf{q}$ (90) зображені на рис. 2 при $\Lambda_1 = 1 + i$, $t := t_2 = -5, 0, 5$, відповідно.

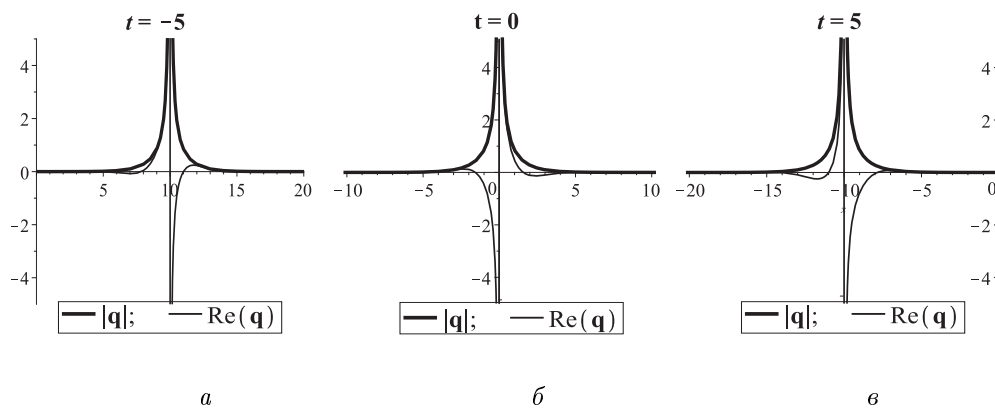


Рис. 2

Функція $|\mathbf{q}|$ матиме розрив другого роду у точці $x = -2\lambda_{12}t_2$. Параметр λ_{12} відповідає за швидкість руху хвилі.

При $\lambda_{12} = 0$ функція $|\mathbf{q}|$ (90) буде незалежною від часу

$$|\mathbf{q}| = \frac{|\lambda_{11}|}{\text{sh}(\lambda_{11}x)}. \quad (91)$$

2. $\lambda_{11} = 0$.

Функція \mathbf{q} у цьому випадку набуде вигляду

$$\mathbf{q} = \frac{e^{i(\lambda_{12}x + \lambda_{12}^2 t_2)}}{(C + x + 2\lambda_{12}t_2)}, \quad C \in \mathbb{R}, \quad (92)$$

і буде розв'язком НРШ з $\mu = -1$.

Графіки функцій $|\mathbf{q}|$ та $\text{Re } \mathbf{q}$ (92) зображені на рис. 3 при $C = 1$, $\Lambda_1 = i$, $t := t_2 = -5, 0, 5$, відповідно.

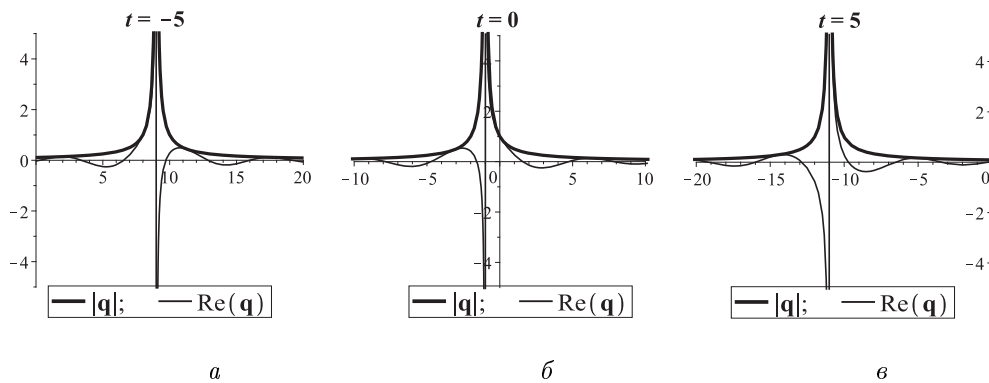


Рис. 3

Функція $|\mathbf{q}|$ має особливість у точці $x = -2\lambda_{12}t_2$. Параметр λ_{12} характеризує швидкість руху хвилі.

При $\lambda_{12} = 0$ функція $|\mathbf{q}|$ набуде вигляду

$$|\mathbf{q}| = \frac{1}{|C + x|}, \quad C \in \mathbb{R}. \quad (93)$$

4.2. Векторний випадок твердження 2.3 ($K > 1$). Матриця Λ_1 – діагональна. Для побудови розв'язків НРШ у випадку $K > 1$ використовуватимемо такі твердження з теорії матриць [25].

Твердження 7. Ермітова матриця A розмірності $(K \times K)$ унітарно подібна до діагональної матриці її власних значень. Тобто, існує унітарна (ортогональна) $(K \times K)$ матриця U така, що $A = UBU^{-1} = UBU^*$, де $B = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_K)$.

Твердження 8. Дійсна симетрична матриця ортогонально подібна до діагональної матриці її власних значень.

З твердження 3.1. отримуємо такий наслідок.

Наслідок 1. Нехай ермітова $(K \times K)$ матриця A має ранг $l \leq K$. Тоді існує матриця \tilde{U} розмірності $(K \times l)$ така, що $A = \tilde{U}B_l\tilde{U}^*$, де $B_l = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_l)$ – діагональна матриця ненульових власних значень матриці A . Зокрема, якщо $l = 1$, то $A = \pm\tilde{U}\tilde{U}^*$, залежно від знака єдиного ненульового власного значення.

Доведення. Нехай B – діагональна матриця власних значень матриці A . Тоді

$$B = \left(\begin{array}{c|c} B_l & O_{l,K-l} \\ \hline O_{K-l,l} & O_{K-l} \end{array} \right), \quad (94)$$

де B_l – діагональна матриця ненульових власних значень, а $O_{K-l}, O_{l,K-l}, O_{K-l,l}$ – нульові матриці відповідних розмірностей. За твердженням 3.1. $A = UBU^*$, де U – унітарна $(K \times K)$ -матриця. Розіб'ємо U на блоки так: $U = (U_{K,l}^1 | U_{K,K-l}^2) =: (\tilde{U} | U_{K,K-l}^2)$. Відповідно,

$$A = UBU^* = (\tilde{U} | U_{K,K-l}^2) \left(\begin{array}{c|c} B_l & O_{l,K-l} \\ \hline O_{K-l,l} & O_{K-l} \end{array} \right) \begin{pmatrix} \tilde{U}^* \\ (U_{K,K-l}^2)^* \end{pmatrix} = \tilde{U} B_l \tilde{U}^*. \quad (95)$$

□

Для побудови розв'язків НРШ корисним також буде зауваження, яке впливає безпосередньо з наслідку 1.

Зауваження 2. Нехай у рівнянні (84) матриця M має ранг $l \leq K$ і всі її власні значення невід'ємні. Тоді M допускає зображення $M = AA^*$, де A – матриця розмірності $(K \times l)$, а вектор-функція $\mathbf{q} := \Phi A$ буде розв'язком векторного узагальнення НРШ

$$i\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2(\mathbf{q}\mathbf{q}^*)\mathbf{q}. \quad (96)$$

Зокрема, при $l = 1$ отримаємо скалярне НРШ

$$i\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2|\mathbf{q}|^2\mathbf{q}. \quad (97)$$

Для роботи з матричними функціями буде потрібний такий факт з алгебри.

Твердження 9. Нехай α – довільне комплексне число, φ, ψ – вектор-стрічки довжини K . Δ – невироджена $(K \times K)$ матриця. Тоді правильна формула

$$\alpha - \varphi\Delta^{-1}\psi^\top = \frac{\det \begin{pmatrix} \Delta & \psi^\top \\ \varphi & \alpha \end{pmatrix}}{\det \Delta}. \quad (98)$$

Як безпосередній наслідок твердження 9 отримуємо.

Твердження 10. Нехай $\varphi := \varphi(x, t)$, $\psi := \psi(x, t)$ – векторні функції розмірності $(1 \times K)$; Δ – $(K \times K)$ матрична функція така, що $(\Delta)_x = \psi^\top \varphi$; $\Phi := \varphi\Delta^{-1}$. Тоді

$$\Phi_i = -\frac{\det \begin{pmatrix} \Delta & e_i^\top \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}}{\det(\Delta)}, \quad i = \overline{1, K}; \quad \mathbf{q} := \sum_{i=1}^K \Phi_i = -\frac{\det \begin{pmatrix} \Delta & \mathbf{1}^\top \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}}{\det \Delta}, \quad (99)$$

$$u := (\varphi\Delta^{-1}\psi^\top)_x = -\left[\det \begin{pmatrix} \Delta & \psi^\top \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} (\det \Delta)^{-1} \right]_x = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \Delta, \quad (100)$$

де e_i – вектор-стрічка довжини K з одиницею на i -му місці та нулями на решті місць.

Зауваження 3. Починаючи з формули (99), і надалі під символом $\mathbf{1}$ розумітимемо вектор-стрічку довжини K такого вигляду:

$$\mathbf{1} := (1, \dots, 1). \quad (101)$$

Для побудови розв'язку НРШ виберемо матрицю $\Lambda_1 \in \text{Mat}_{K \times K}(\mathbb{C})$ та розв'язок φ розмірності $(1 \times K)$ системи

$$\begin{cases} \varphi_x = \varphi \Lambda_1, \\ i\varphi_{t_2} = \varphi_{xx}, \end{cases} \quad (102)$$

у такому вигляді:

$$\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_K), \quad \lambda_{j1} := \text{Re}\lambda_j, \quad \lambda_{j2} := \text{Im}\lambda_j, \quad j = \overline{1, K}. \quad (103)$$

$$\varphi_j = \gamma_j e^{\lambda_{j1}x + 2\lambda_{j1}\lambda_{j2}t_2 + i(\lambda_{j2}x - (\lambda_{j1}^2 - \lambda_{j2}^2)t_2)}, \quad \gamma_j = e^{k_j + i\theta_j}, \quad k_j, \theta_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, K}. \quad (104)$$

З формули (42) для матриці \mathcal{M} отримуємо

$$\mathcal{M} = C\Lambda_1 + \Lambda_1^*C - \varphi^*\varphi(x_0, t_2^0), \quad C = C^*. \quad (105)$$

Починаючи з формули (105), прийемо $(x_0, t_2^0) = (0, 0)$.

Вважатимемо, що $(\lambda_{j1} \neq 0)$ та $((|\lambda_{j1}| \neq |\lambda_{s1}|) \vee (\lambda_{j2} \neq \lambda_{s2}))$, для всіх $j, s = 1, j \neq s$. Розглянемо два характерні випадки.

1. Задамо сталу матрицю C так, щоб $\mathcal{M} = \mathbf{1}^\top \mathbf{1}$.

Тобто матриця C виражатиметься через матрицю Λ_1 так:

$$C = \left(\frac{\bar{\gamma}_j \gamma_s + 1}{\lambda_s + \bar{\lambda}_j} \right)_{j,s=1}^K = \left(\frac{\bar{\gamma}_j \gamma_s + 1}{\lambda_{s1} + \lambda_{j1} + i(\lambda_{s2} - \lambda_{j2})} \right)_{j,s=1}^K. \quad (106)$$

Відповідно, з формул (33) та (106) отримуємо

$$\Delta_2 = C + \Omega_2[\bar{\varphi}, \varphi] = \left(\frac{1}{\lambda_s + \bar{\lambda}_j} (\bar{\varphi}_j \varphi_s + 1) \right)_{j,s=1}^K. \quad (107)$$

Тоді

$$\Phi = \varphi \Delta_2^{-1}, \quad \mathbf{q} = \Phi \mathbf{1}^\top = \sum_{i=0}^K \Phi_i = - \frac{\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \mathbf{1} \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}}{\det(\Delta_2)}. \quad (108)$$

Регулярна скалярна функція \mathbf{q} (108) буде розв'язком нелінійного рівняння Шредінгера (97).

2. Прийемо

$$C = \left(\frac{\bar{\gamma}_j \gamma_s - 1}{\lambda_s + \bar{\lambda}_j} \right)_{j,s=1}^K = \left(\frac{\bar{\gamma}_j \gamma_s - 1}{\lambda_{s1} + \lambda_{j1} + i(\lambda_{s2} - \lambda_{j2})} \right)_{j,s=1}^K. \quad (109)$$

Тоді $\mathcal{M} = C\Lambda_1 + \Lambda_1^*C - \varphi^*\varphi(0, 0) = -\mathbf{1}^\top \mathbf{1}$.

З формул (33) та (106) отримуємо

$$\Delta_2 = C + \Omega_2[\bar{\varphi}, \varphi] = \left(\frac{1}{\lambda_s + \bar{\lambda}_j} (\bar{\varphi}_j \varphi_s - 1) \right)_{j,s=1}^K. \quad (110)$$

Відповідно,

$$\Phi = \varphi \Delta_2^{-1}, \quad \mathbf{q} = \Phi \mathbf{1}^\top = \sum_{i=0}^K \Phi_i = -\frac{\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \mathbf{1}^\top \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}}{\det(\Delta_2)}. \quad (111)$$

Сингулярна скалярна функція \mathbf{q} (111) буде розв'язком НРШ (85) з $\mu = -1$

$$i\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} - 2|\mathbf{q}|^2\mathbf{q}. \quad (112)$$

4.3. Векторний випадок твердження 2.3 ($K = 2$). Матриця Λ_1 – діагональна. Нехай Λ_1 є діагональною матрицею вигляду (103), функція φ виглядає як (104). Розглянемо два характерні випадки, залежно від вибору матриці C .

I. Матрицю C визначаємо формулою (106) при $K = 2$.

Можливі такі ситуації, залежно від значень λ_j , $j=1,2$.

1. $\lambda_{11} \neq 0$, $\lambda_{21} \neq 0$.

1.1. $((|\lambda_{11}| \neq |\lambda_{21}|) \vee (\lambda_{12} \neq \lambda_{22}))$.

З формул (107) та (108) при $K = 2$ отримуємо

$$\Delta_2 = C + \Omega_2[\bar{\varphi}, \varphi] = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\lambda_{11}}(|\varphi_1^2| + 1) & \frac{1}{\lambda_{11} + \lambda_{21} + i(\lambda_{22} - \lambda_{12})}(\bar{\varphi}_1\varphi_2 + 1) \\ \frac{1}{\lambda_{11} + \lambda_{21} - i(\lambda_{22} - \lambda_{12})}(\bar{\varphi}_2\varphi_1 + 1) & \frac{1}{2\lambda_{21}}(|\varphi_2^2| + 1) \end{pmatrix}; \quad (113)$$

$$\Phi(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = \varphi \Delta_2^{-1}, \quad \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_1 + \Phi_2. \quad (114)$$

На рис. 4 зображено графіки функцій $|\mathbf{q}|$ та $\text{Re } \mathbf{q}$ при $\gamma_1 = e^{4+i}$, $\gamma_2 = e^{2i}$, $\lambda_1 = 2 + i$, $\lambda_2 = 1 + 1.5i$ та $t := t_2 = -6, 2, 12$, відповідно.

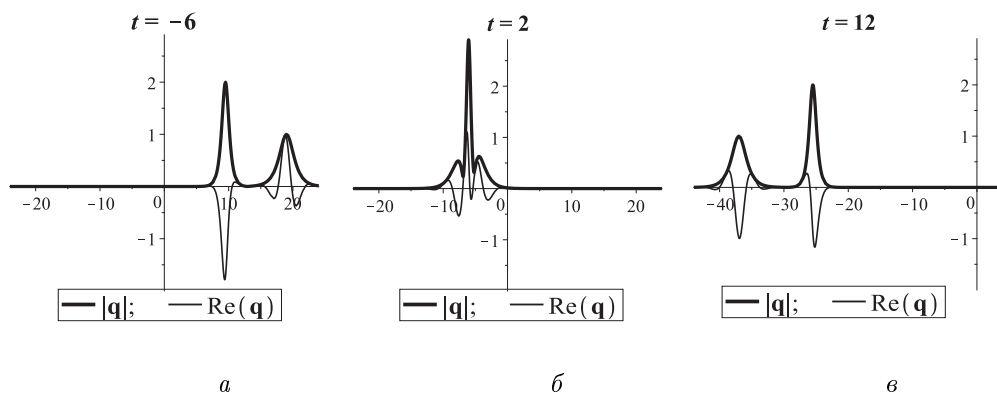


Рис. 4

Функція \mathbf{q} описує поширення та взаємодію двох пакетів коротких хвиль, а $|\mathbf{q}|$ є обвідною цих пакетів, яка зображає поширення та взаємодію двох довгих хвиль. Параметри λ_{11} та λ_{21} відповідають за висоти кожної з довгих хвиль, а параметри λ_{12} , λ_{22} відповідають за швидкості руху (довга хвиля з висотою λ_{11} рухається зі швидкістю $2\lambda_{12}$, а довга хвиля з висотою λ_{21} – зі швидкістю $2\lambda_{22}$).

1.2 $\lambda_{11} = -\lambda_{21}$, $\lambda_{12} = \lambda_{22}$.

Формула для визначника $\det(\Delta_2)$ (113) стає некоректною. Згідно з формулою (114) приймемо

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{12}) &:= \lim_{\lambda_{21} \rightarrow -\lambda_{11}} \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = \\ &= \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \lim_{\lambda_{21} \rightarrow -\lambda_{11}} \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (115)$$

1.3 $\lambda_{11} = \lambda_{21}$, $\lambda_{12} = \lambda_{22}$.

У цьому випадку $\Delta_2 \equiv 0$ і формула для розв'язку (108) стає некоректною.

Задамо функції $\Phi(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{12})$ і $\mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{12})$ подібно, як і у випадку 1.2

$$\begin{aligned} \Phi_j(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{12}) &:= \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \lim_{\lambda_{21} \rightarrow \lambda_{11}} \Phi_j(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = \\ &= \lim_{\lambda_{21} \rightarrow \lambda_{11}} \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \Phi_j(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (116)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{12}) &:= \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \lim_{\lambda_{21} \rightarrow \lambda_{11}} \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = \\ &= \lim_{\lambda_{21} \rightarrow \lambda_{11}} \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (117)$$

Зауважимо, що при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ отримаємо $\Phi_j = 0$ і, відповідно, $\mathbf{q} = 0$. Тому розглянемо випадок, коли $\gamma_1 = \gamma_2$.

На рис. 5 зображено графіки функцій $|\mathbf{q}|$ та $\text{Re } \mathbf{q}$ при $\gamma_1 = \gamma_2 = e^4$, $\lambda_{11} = 1$, $\lambda_{12} = 1.5$ та $t := t_2 = -100, 0, 100$ відповідно.

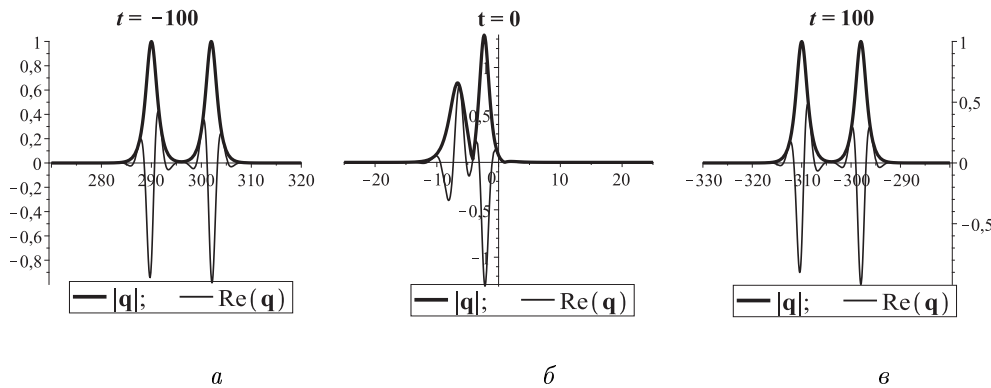


Рис. 5

Функція $\text{Re } \mathbf{q}$ описує поширення та взаємодію двох пакетів коротких хвиль, які рухаються поруч. Графік $|\mathbf{q}|$ зображає обвідну двох пакетів у формі довгих хвиль, які рухаються одна за другою. Це так званий зв'язаний стан. Параметр λ_{11} відповідає за висоту кожної з довгих хвиль, а параметр λ_{12} – за їхню швидкість. У момент часу $t_2 = 0$ відбувається взаємодія хвильових пакетів.

2. $\lambda_{11} = 0$, $\lambda_{21} \neq 0$.

У цьому випадку приймемо $C = 0$, $\gamma_j = 1$, $j = 1, 2$. Формула для потенціалу $\Delta_2[\bar{\varphi}, \varphi]$ набуде вигляду

$$\Delta_2[\bar{\varphi}, \varphi] = \Omega_2[\bar{\varphi}, \varphi] = \left(\frac{x + 2\lambda_{12}t_2}{\frac{1}{\lambda_{21} - i(\lambda_{22} - \lambda_{12})}(\bar{\varphi}_2\varphi_1 - 1)} \quad \frac{1}{\lambda_{21} + i(\lambda_{22} - \lambda_{12})}(\bar{\varphi}_1\varphi_2 - 1) \right). \quad (118)$$

Скалярна функція \mathbf{q} визначатиметься формулою (111) і буде сингулярним розв'язком рівняння Шредінгера з $\mu = -1$ (112).

3. $\lambda_{11} = 0, \lambda_{21} = 0$.

Прийmemo $C = 0, \gamma_j = 1, j = 1, 2$. Потенціал $\Delta_2[\bar{\varphi}, \varphi]$ набуде вигляду

$$\Delta_2[\bar{\varphi}, \varphi] = \Omega_2[\bar{\varphi}, \varphi] = \begin{pmatrix} x + 2\lambda_{12}t_2 & \frac{-i}{(\lambda_{22}-\lambda_{12})}(\bar{\varphi}_1\varphi_2 - 1) \\ \frac{i}{(\lambda_{22}-\lambda_{12})}(\bar{\varphi}_2\varphi_1 - 1) & x + 2\lambda_{22}t_2 \end{pmatrix}. \quad (119)$$

Скалярна функція \mathbf{q} визначатиметься формулою (111) і буде сингулярним розв'язком рівняння Шредінгера з $\mu = -1$ (112). Зауважимо, що функція $|\mathbf{q}|$ у цьому разі буде раціональною.

4.4. Векторний випадок твердження 2.3 ($K = 2$). Матриця Λ_1 – верхня трикутна. Нехай $\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$, а вектор-функція φ розмірності (1×2) задовольняє рівняння (102). Виберемо розв'язок φ рівняння (102) так:

$$\varphi_1 = \gamma_1 e^{\lambda x - i\lambda^2 t_2}; \quad \varphi_2 = (\varphi_1)_\lambda = \gamma_1 (x - 2i\lambda t_2) e^{\lambda x - i\lambda^2 t_2}, \quad \gamma_1 = e^{k_1 + i\theta_1}, \quad k_1, \theta_1 \in \mathbb{R}. \quad (120)$$

Розглянемо два характерні випадки.

1. $\lambda_{11} = \text{Re} \lambda \neq 0$.

Матрицю C задаємо через Λ_1 так, щоб $M = \mathbf{1}^\top \mathbf{1}$. Тобто,

$$C = \begin{pmatrix} \frac{e^{2k_1+1}}{\lambda_{11}} & \frac{\lambda_{11} - e^{2k_1-1}}{2\lambda_{11}^2} \\ \frac{\lambda_{11} - e^{2k_1-1}}{2\lambda_{11}^2} & \frac{e^{2k_1+1} + \lambda_{11}^2 - \lambda_{11} + 1}{2\lambda_{11}^3} \end{pmatrix}. \quad (121)$$

Відповідно, $\Delta_2 = C + \Omega[\bar{\varphi}, \varphi]$.

Функція Φ і розв'язок \mathbf{q} НРШ (84) набудуть вигляду

$$\Phi = \varphi \Delta_2^{-1}, \quad \mathbf{q} = \Phi \mathbf{1}^\top = \Phi_1 + \Phi_2. \quad (122)$$

Функція \mathbf{q} є регулярним розв'язком НРШ (97).

На рис. 6 зображено графіки функцій $|\mathbf{q}|$ та $\text{Re} \mathbf{q}$ при $\gamma_1 = e^{-10} \lambda = 1 - i$, та $t := t_2 = -115, 0, 115$, відповідно.

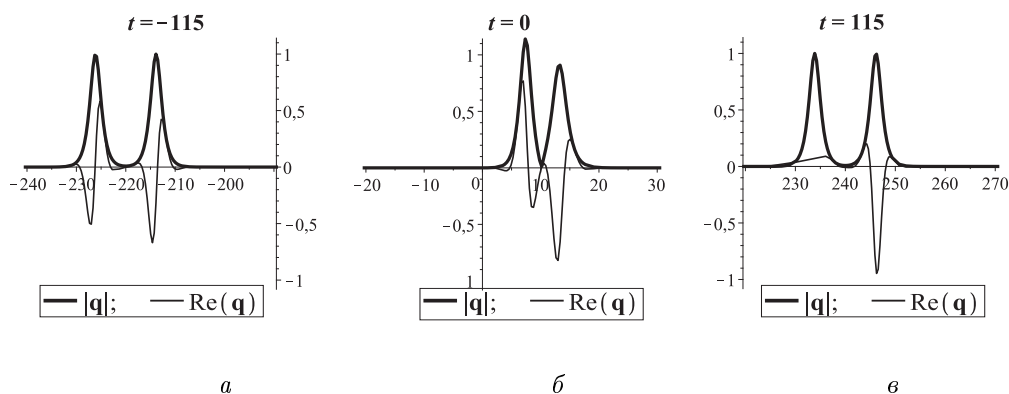


Рис. 6

Поведінка графіків функцій подібна до рис. 5. Функція \mathbf{q} описує зв'язаний стан. Параметр λ_{11} відповідає за висоту довгих хвиль, які характеризуються обвідною $|\mathbf{q}|$, а параметр λ_{12} – за їхню швидкість. У момент часу $t_2 = 0$ відбувається взаємодія хвильових пакетів.

2. $\lambda_{11} = \text{Re}\lambda = 0$.

Прийmemo $C = 0$.

$$\Phi = \varphi \Delta_2^{-1} = \varphi \Omega_2[\bar{\varphi}, \varphi]^{-1}, \quad \mathbf{q} = \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_1 + \Phi_2. \quad (123)$$

Сингулярна функція \mathbf{q} буде розв'язком НРШ (112).

4.5. Векторний випадок твердження 2.3 ($K = 3$). Матриця Λ_1 – діагональна.

Формули для цього випадку можна отримати, підставивши $K = 3$ в загальному випадку для $K > 1$. Зокрема, коли $M = \mathbf{1}^T \mathbf{1}$, то отримаємо регулярний розв'язок \mathbf{q} НРШ (97). На рис. 7 зображено графіки функції $|\mathbf{q}|$ при $\gamma_1 = e^{13}$, $\gamma_2 = e^{10}$, $\gamma_3 = e^5$, $\lambda_1 = 1.5 + i$, $\lambda_2 = 1 + 2i$, $\lambda_3 = 2.5 + 2.5i$ та $t := t_2 = -9$, $t := t_2 = -1$, $t := t_2 = 2$, $t := t_2 = 4$, $t := t_2 = 8$, $t := t_2 = 15$, відповідно.

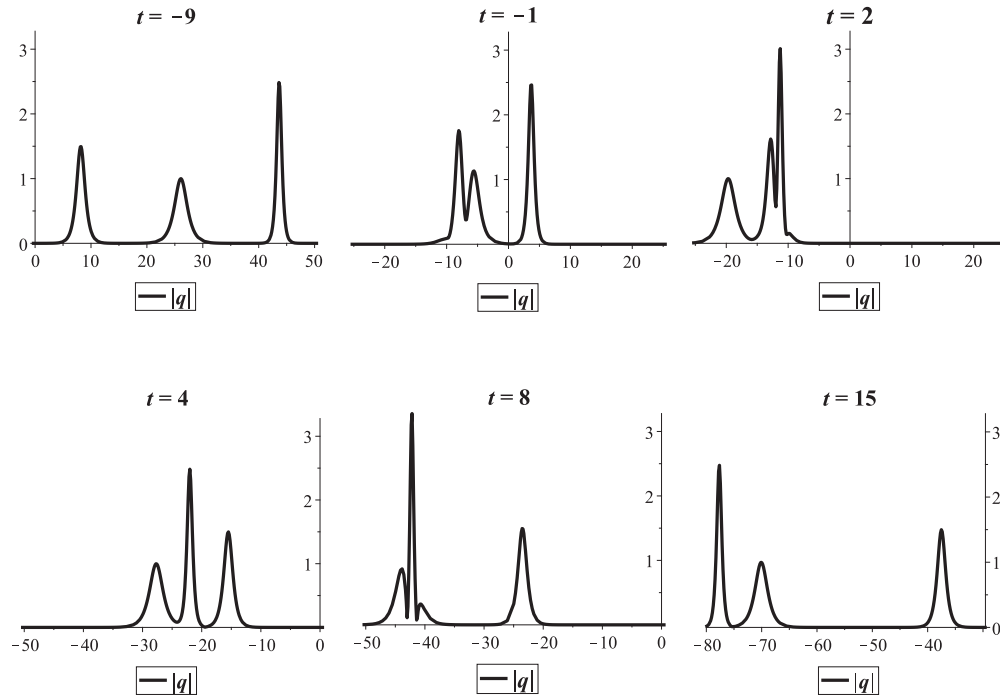


Рис. 7

Графік функції $|\mathbf{q}|$ зображає поширення та взаємодію трьох довгих хвиль. Параметри γ_j , $j = \overline{1, 3}$ відповідають за початкове розташування хвиль. Дійсні частини $\text{Re}\lambda_j$ відповідають за висоту хвилі з номером j , а уявні $\text{Re}\lambda_j$ відповідають за швидкість хвилі з номером j . На рис. 7 зображено поширення та взаємодію довгих хвиль з часом.

У випадку, коли стала матриця C визначається формулою (109), $M = -\mathbf{1}^\top \mathbf{1}$, і, відповідно, ми отримуємо сингулярний розв'язок \mathbf{q} НРШ (112).

Як і у випадку $K = 2$, коли матриця Λ_1 – діагональна, розглянемо окремо ситуацію, коли $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Приймемо $C = 0$, $\gamma_j = 1$, $j = \overline{1,3}$. Отже,

$$\Phi = \varphi \Delta_2^{-1} = \varphi \Omega_2[\bar{\varphi}, \varphi]^{-1}, \quad \mathbf{q} = \Phi \mathbf{1}^\top = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3. \quad (124)$$

Функція \mathbf{q} є сингулярним розв'язком НРШ (112). Особливість цього випадку полягає у тому, що функція $|\mathbf{q}|$ – раціональна.

4.6. Векторний випадок твердження 2.3 ($K = 3$). Матриця Λ_1 – верхня трикутна. 1. Нехай

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}. \quad (125)$$

Виберемо розв'язок φ рівняння (102) так:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \gamma_1 e^{\lambda x - i\lambda^2 t_2}, & \varphi_2 &= \gamma_1 (x - 2i\lambda t_2) e^{\lambda x - i\lambda^2 t_2}, \\ \varphi_3 &= \gamma_1 \left(\frac{x^2}{2} - 2i\lambda_1 x t_2 - 2\lambda^2 t_2^2 - it_2 \right) e^{\lambda x - i\lambda^2 t_2}, \end{aligned} \quad (126)$$

$$\operatorname{Re} \lambda := \lambda_{11}, \quad \operatorname{Im} \lambda := \lambda_{12}, \quad \gamma_1 = e^{k_1 + i\theta_1}, \quad k_1, \theta_1 \in \mathbb{R}.$$

Елементи ермітової матриці C задамо так:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{2} \frac{1 + e^{2k_1}}{\lambda_{11}}; & c_{12} &= \frac{1}{4} \frac{-1 + 2\lambda_{11} - e^{2k_1}}{\lambda_{11}^2}; \\ c_{13} &= \frac{1}{8} \frac{1 - 2\lambda_{11} + 4\lambda_{11}^2 + e^{2k_1}}{\lambda_{11}^3}; & c_{22} &= \frac{1}{4} \frac{2\lambda_{11}^2 + 1 - 2\lambda_{11} + e^{2k_1}}{\lambda_{11}^3}; & c_{21} &= \bar{c}_{12} \\ c_{23} &= \frac{1}{16} \frac{-8\lambda_{11}^2 - 3 + 6\lambda_{11} - 3e^{2k_1} + 8\lambda_{11}^3}{\lambda_{11}^4}; & c_{31} &= \bar{c}_{13}, & c_{32} &= \bar{c}_{23}, \\ c_{33} &= \frac{1}{16} \frac{8\lambda_{11}^4 + 8\lambda_{11}^2 + 3 - 6\lambda_{11} + 3e^{2k_1} - 8\lambda_{11}^3}{\lambda_{11}^5}, \end{aligned} \quad (127)$$

відповідно, $M = C\Lambda_1 + \Lambda_1^* C - \varphi^* \varphi(0, 0) = \mathbf{1}^\top \mathbf{1}$ з формули (42), а функція Φ та розв'язок \mathbf{q} НРШ (84) визначатимуть так:

$$\Phi = \varphi \Delta_2^{-1}, \quad \mathbf{q} = \Phi \mathbf{1}^\top = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3. \quad (128)$$

На рис. 8 зображено графіки функції $|\mathbf{q}|$ при $\gamma_1 = e^{30}$, $\lambda = 1 + i$ та $t := t_2 = -230$, $t := t_2 = 0$, $t := t_2 = 230$, відповідно.

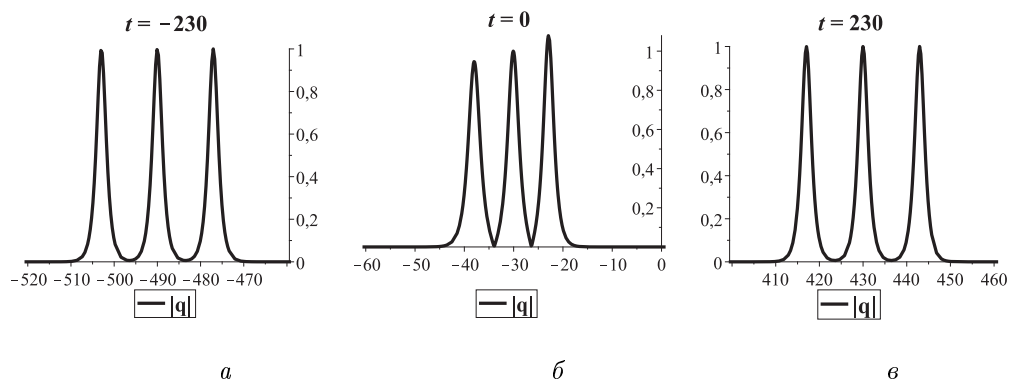


Рис. 8

Графік функції $|\mathbf{q}|$ відображає зв'язані стани, які утворені трьома довгими хвилями. На рис. 8 зображено поведінку $|\mathbf{q}|$ при досить великих за модулем значеннях t , а також момент взаємодії хвиль. Параметр λ відповідає за висоту ($\text{Re}\lambda$) та швидкість ($\text{Im}\lambda$) кожної хвилі.

2.

$$\Lambda_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}. \quad (129)$$

Виберемо розв'язок φ рівняння (102) так:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \gamma_1 e^{\lambda_1 x - i\lambda_1^2 t_2}, & \varphi_2 &= \gamma_1 (x - 2i\lambda_1 t_2) e^{\lambda_1 x - i\lambda_1^2 t_2}, \\ \varphi_3 &= \gamma_3 \left(\frac{x^2}{2} - 2i\lambda_3 x t_2 - 2\lambda_3^2 t_2^2 - it_2 \right) e^{\lambda_3 x - i\lambda_3^2 t_2}, & (130) \\ \text{Re}\lambda_j &:= \lambda_{j1}, & \text{Im}\lambda_j &:= \lambda_{j2}; & \gamma_j &= e^{k_j + i\theta_j}, & k_j, \theta_j &\in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

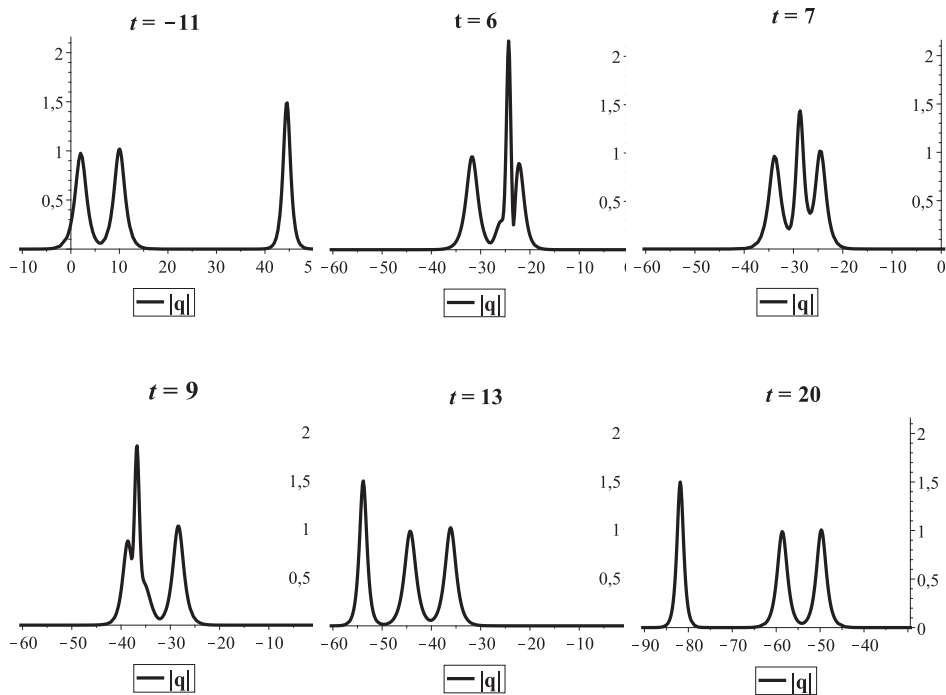


Рис. 9

Задавши матрицю C так:

$$\begin{aligned} c_{11} &= \frac{1}{\lambda_{11}}; & c_{12} &= \frac{-1 + \lambda_{11}}{2\lambda_{11}^2}; \\ c_{13} &= \frac{2(\lambda_{11} - i\lambda_{12} + \lambda_{31} + i\lambda_{32})}{\lambda_{11}^2 + 2i\lambda_{11}\lambda_{32} + 2\lambda_{31}\lambda_{11} - 2i\lambda_{12}\lambda_{31} - 2i\lambda_{11}\lambda_{12} - \lambda_{12}^2 + 2i\lambda_{31}\lambda_{32} + 2\lambda_{32}\lambda_{12} + \lambda_{31}^2 - \lambda_{32}^2}, \\ c_{22} &= \frac{\lambda_{11} + 1 - \lambda_{11}}{2\lambda_{11}^3}; \\ c_{23} &= \frac{-2 + \lambda_{31} + i\lambda_{32} + \lambda_{11} - i\lambda_{12}}{\lambda_{11}^2 + 2i\lambda_{11}\lambda_{32} + 2\lambda_{31}\lambda_{11} - 2i\lambda_{12}\lambda_{31} - 2i\lambda_{11}\lambda_{12} - \lambda_{12}^2 + 2i\lambda_{31}\lambda_{32} + 2\lambda_{32}\lambda_{12} + \lambda_{31}^2 - \lambda_{32}^2}; \\ c_{33} &= \frac{1}{\lambda_{31}}; \end{aligned} \quad (131)$$

з формули (42) отримаємо, що $M = C\Lambda_1 + \Lambda_1^*C - \varphi^*\varphi(0,0) = \mathbf{1}^\top \mathbf{1}$. Функція Φ та розв'язок \mathbf{q} НРШ (84) набудуть вигляду:

$$\Phi = \varphi\Delta_2^{-1}, \quad \mathbf{q} = \Phi\mathbf{1}^\top = \Phi_1 + \Phi_2 + \Phi_3. \quad (132)$$

На рис. 9 зображено графіки функції $|\mathbf{q}|$ при $\gamma_1 = e^{15}$, $\gamma_3 = 1$, $\lambda_1 = 1 + i$, $\lambda_3 = 1.5 + 2i$ та $t := t_2 = -11$, відповідно.

Графік функції $|\mathbf{q}|$ відображає взаємодію зв'язаного стану, утвореного двома довгими хвилями, та відокремленої довгої хвилі. Параметр λ_1 характеризує висоту та швидкість зв'язаного стану, а параметр λ_3 – висоту та швидкість одиначної хвилі.

5. Побудова розв'язків векторного узагальнення нелінійного рівняння Шредінгера. У цьому розділі будуватимемо точні розв'язки векторного узагальнення НРШ (84) у випадку, коли $\mathbf{q} = (q_1, \dots, q_l)$, $M \in Mat_{l \times l}(\mathbb{C})$, $l > 1$. Для побудови скористаємось таким твердженням.

Твердження 11. Нехай у рівнянні (84) матриця M має ранг $l \leq K$. Тоді M допускає зображення $M = AUA^*$, де $A = (a_{k,s})_{k=1,s=1}^{K,l}$ – матриця розмірності $(K \times l)$, $U = \text{diag}(\mu_1, \dots, \mu_l)$ – діагональна матриця ненульових власних значень матриці M . Вектор-функція $q := \Phi A$ буде розв'язком векторного узагальнення НРШ

$$i\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2(\mathbf{q}U\mathbf{q}^*)\mathbf{q}, \quad (133)$$

яке можна переписати в такому вигляді:

$$i(q_j)_{t_2} = (q_j)_{xx} + 2\left(\sum_{s=1}^l \mu_s |q_s|^2\right)q_j, \quad j = \overline{1, l}, \quad (134)$$

$$\text{де } q_j = \sum_{k=1}^K a_{k,j} \Phi_k.$$

Тепер розглянемо реалізацію цього твердження для випадку $l = 2$, зокрема при $K = 2$ та $K = 3$.

5.1. Випадок $l = 2, K = 2$. Задамо матрицю Λ_1 та функцію $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ так, як у випадку $K = 2$ для скалярного НРШ

$$\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2), \quad \lambda_{j1} := \text{Re}\lambda_j, \quad \lambda_{j2} := \text{Im}\lambda_j, \quad j = \overline{1, 2}. \quad (135)$$

$$\varphi_j = \gamma_j e^{\lambda_{j1}x + 2\lambda_{j1}\lambda_{j2}t_2 + i(\lambda_{j2}x - (\lambda_{j1}^2 - \lambda_{j2}^2)t_2)}, \quad \gamma_j = e^{k_j + i\theta_j}, \quad k_j, \theta_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, 2}. \quad (136)$$

Матрицю C задамо так, щоб $M = C\Lambda_1 + \Lambda_1^*C - \varphi^*\varphi(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} =: I$.

Тобто

$$C = \begin{pmatrix} \frac{|\gamma_1|^2 + 1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_1} & \frac{\bar{\gamma}_2 \gamma_1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_2} \\ \frac{\bar{\gamma}_1 \gamma_2}{\lambda_2 + \bar{\lambda}_1} & \frac{|\gamma_2|^2 + 1}{\lambda_2 + \bar{\lambda}_2} \end{pmatrix}. \quad (137)$$

Функція

$$\mathbf{q} = (q_1, q_2) = \Phi = \varphi\Delta_2^{-1} \quad (138)$$

є розв'язком системи (134) з $\mu_1 = \mu_2 = 1$. У цьому разі функції q_1 та q_2 є регулярними.

На рис. 10 зображено графіки функцій $|q_1|$ та $|q_2|$ при $\gamma_1 = e$, $\gamma_2 = e^{10+13i}$, $\lambda_1 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 1 + 2i$ та $t := t_2 = -2, 5, 10$, відповідно.

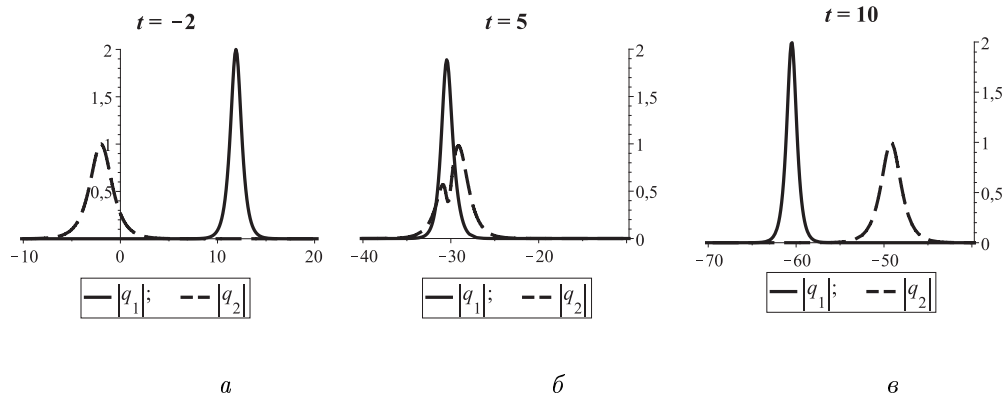


Рис. 10

На рис. 10 зображено поширення та взаємодію двох довгих хвиль, які відповідають функціям $|q_1|$ та $|q_2|$. Параметр λ_1 відповідає за швидкість (уявна частина) та висоту (дійсна частина) довгої хвилі, що зображається графіком функції $|q_1|$, а параметр λ_2 – за швидкість та висоту хвилі, яка відповідає графіку $|q_2|$.

Тепер задамо матрицю C так, щоб власні значення M були протилежні за знаком

$$C = \begin{pmatrix} \frac{|\gamma_1|^2 + 1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_1} & \frac{\bar{\gamma}_2 \gamma_1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_2} \\ \frac{\bar{\gamma}_1 \gamma_2}{\lambda_2 + \bar{\lambda}_1} & \frac{|\gamma_2|^2 - 1}{\lambda_2 + \bar{\lambda}_2} \end{pmatrix} \implies M = C\Lambda_1 + \Lambda_1^* C - \varphi^* \varphi(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (139)$$

У цій ситуації розв'язок НРШ q буде сингулярним. На рис. 11 зображено графіки функцій $|q_1|$ та $|q_2|$ при $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = e^{10+13i}$, $\lambda_1 = 2 + 3i$, $\lambda_2 = 1 + 2i$ та $t := t_2 = -1, 5, 11$, відповідно.

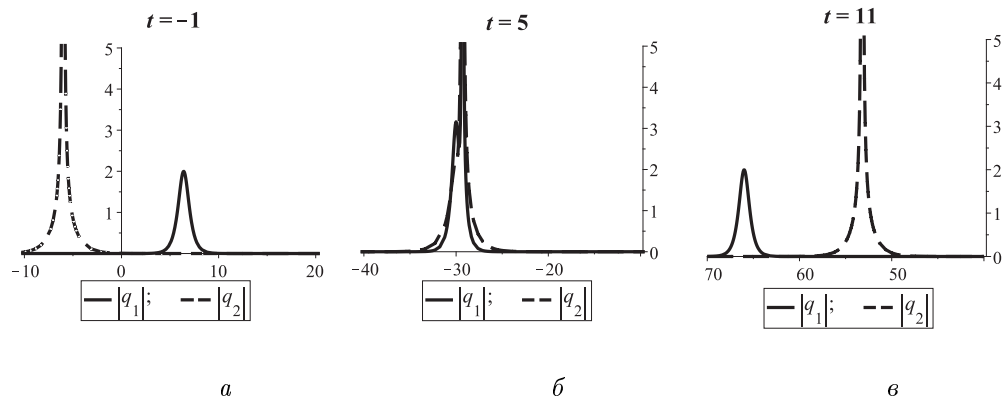


Рис. 11

5.2. Випадок $l = 2$, $K = 3$. Задамо матрицю Λ_1 та функцію $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ так, як у випадку $K = 3$ для скалярного НРШ

$$\Lambda_1 = \text{diag}(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3), \quad \lambda_{j1} := \text{Re}\lambda_j, \quad \lambda_{j2} := \text{Im}\lambda_j, \quad j = \overline{1, 3}, \quad (140)$$

$$\varphi_j = \gamma_j e^{\lambda_{j1}x + 2\lambda_{j1}\lambda_{j2}t_2 + i(\lambda_{j2}x - (\lambda_{j1}^2 - \lambda_{j2}^2)t_2)}, \quad \gamma_j = e^{k_j + i\theta_j}, \quad k_j, \theta_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, 3}. \quad (141)$$

Матрицю C задамо так, щоб

$$M = C\Lambda_1 + \Lambda_1^*C - \varphi^*\varphi(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тобто,

$$C = \begin{pmatrix} \frac{|\gamma_1|^2 + 1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_1} & \frac{\bar{\gamma}_2\gamma_1 + 1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_2} & \frac{\bar{\gamma}_3\gamma_1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_3} \\ \frac{\bar{\gamma}_1\gamma_2 + 1}{\lambda_2 + \bar{\lambda}_1} & \frac{|\gamma_2|^2 + 1}{\lambda_2 + \bar{\lambda}_2} & \frac{\bar{\gamma}_2\gamma_3}{\lambda_2 + \bar{\lambda}_3} \\ \frac{\bar{\gamma}_1\gamma_3}{\lambda_3 + \bar{\lambda}_1} & \frac{\bar{\gamma}_3\gamma_2}{\lambda_2 + \bar{\lambda}_3} & \frac{|\gamma_3|^2}{\lambda_3 + \bar{\lambda}_3} \end{pmatrix}. \quad (142)$$

Функція $\mathbf{q} = (q_1, q_2) = (\Phi_1 + \Phi_2, \Phi_3)$, де $\Phi = \varphi\Delta_2^{-1}$, є розв'язком системи (134) з $\mu_1 = \mu_2 = 1$. У цьому разі функції q_1 та q_2 є регулярними.

6. Побудова точних розв'язків рівняння Яджими-Ойкави. Перейдемо до побудови точних розв'язків моделі Яджими-Ойкави та його векторного узагальнення. Для цього прийемо у твердженні 2.4 (випадок $k = 2, n = 2$) $\alpha_2 = i, \mathbf{q} = \bar{\mathbf{r}} = 0, \psi = \bar{\varphi}$. За таких умов система (67) набуде вигляду

$$\begin{cases} i\Phi_{t_2} = \Phi_{xx} + 2\hat{u}\Phi; \\ i\hat{u}_{t_2} = (\Phi M \Phi^*)_x. \end{cases} \quad (143)$$

6.1. Скалярний випадок твердження 2.4 ($K = 1$). При $K = 1$ пара функцій $\Phi := \varphi\Delta_2^{-1}$ та $u := \hat{u} = (\varphi\Delta_2^{-1}\varphi^*)_x$ буде розв'язком моделі Яджими-Ойкави (143)

$$\begin{cases} i\Phi_{t_2} = \Phi_{xx} + 2u\Phi; \\ iu_{t_2} = (\mu|\Phi|^2)_x, \end{cases} \quad (144)$$

де функція φ є розв'язком рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_{xx} = \varphi\Lambda_2, \\ i\varphi_{t_2} = \varphi_{xx}, \end{cases} \quad \Lambda_2 \in \mathbb{C}, \quad (145)$$

а $\mu = M = C\Lambda_2 - \bar{\Lambda}_2C - (\varphi^*\varphi_x - \varphi_x^*\varphi)(x_0, t_2^0), C \in \mathbb{R}$.

Прийемо $(x_0, t_2^0) = (0, 0), \Lambda_2 := \lambda_1^2$, а розв'язок системи (145) виберемо так: $\varphi = e^{\lambda_1 x - i\lambda_1^2 t_2} = e^{(\lambda_{11} + i\lambda_{12})x - i(\lambda_{11} + i\lambda_{12})^2 t_2}$ ($\lambda_{11} = \text{Re}\lambda_1, \lambda_{12} = \text{Im}\lambda_1$). Розглянемо два можливі випадки: $\lambda_{11} = 0$ та $\lambda_{11} \neq 0$.

1. $\lambda_{11} \neq 0$.

Функція $\mathbf{q} := \Phi, \mu \in i\mathbb{R}$ та u набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &:= \Phi = \frac{2\lambda_{11}e^{\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}t_2}}{2C\lambda_{11} - 1 + e^{2\lambda_{11}x + 4\lambda_{11}\lambda_{12}t_2}} e^{i(\lambda_{12}x + (\lambda_{12}^2 - \lambda_{11}^2)t_2)}, \\ \mu &= C\lambda_2^2 - C\bar{\lambda}_2^2 - (\varphi^*\varphi_x - \varphi_x^*\varphi)(0, 0) = 4iC\lambda_{11}\lambda_{12} - 2i\lambda_{12}, \end{aligned} \quad (146)$$

$$u = (\varphi\Delta_2^{-1}\varphi^*)_x = \left(\frac{2\lambda_{11}e^{2\lambda_{11}x + 4\lambda_{11}\lambda_{12}t_2}}{2C\lambda_{11} - 1 + e^{2\lambda_{11}x + 4\lambda_{11}\lambda_{12}t_2}} \right)_x = |\mathbf{q}|^2(2C\lambda_{11} - 1). \quad (147)$$

Зрозуміло, що в такому випадку функція \mathbf{q} (146) буде також розв'язком НРШ (84) з $\mu = (2C\lambda_{11} - 1)$.

Прийmemo $C = \frac{1}{\lambda_{11}}$ у формулах (146), (147). Тоді функції $q := \Phi$, u та скаляр μ виглядатимуть так:

$$\Phi = \frac{\lambda_{11}}{\operatorname{ch}(\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}t_2)} e^{i(\lambda_{12}x + (\lambda_{12}^2 - \lambda_{11}^2)t_2)}, \quad (148)$$

$$u = \frac{\lambda_{11}^2}{\operatorname{ch}^2(\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}t_2)}, \quad \mu = 2i\lambda_{12} \quad (149)$$

і задовольнятимуть систему Яджими-Ойкави (144):

$$\begin{cases} i\mathbf{q}_{t_2} = \mathbf{q}_{xx} + 2u\mathbf{q}; \\ iu_{t_2} = (\mu|\mathbf{q}|^2)_x, \end{cases} \quad (150)$$

де $\mu := \mathcal{M} = \frac{1}{2\lambda_{12}}$. Зауважимо, що в цьому випадку $u = |\mathbf{q}|^2$ і, відповідно, функція $q := \Phi$ задовольнятиме НРШ (84) з $\mu = 1$. До того ж функція \mathbf{q} повністю збігатиметься з розв'язком НРШ (88).

Якщо у формулах (146) та (147) прийняти $C = 0$, то функції $\mathbf{q} := \Phi$, u (147) та скаляр μ набудуть такого вигляду:

$$\Phi = \frac{\lambda_{11}}{\operatorname{sh}(\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}t_2)} e^{i(\lambda_{12}x + (\lambda_{12}^2 - \lambda_{11}^2)t_2)}, \quad (151)$$

$$u = -\frac{\lambda_{11}^2}{\operatorname{sh}^2(\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}t_2)}, \quad \mu = -2i\lambda_{12}. \quad (152)$$

2. $\lambda_{11} = 0$.

У цьому випадку функції $\mathbf{q} := \Phi$, u та скаляр μ набудуть вигляду

$$\Phi = \frac{e^{i(\lambda_{12}x + \lambda_{12}^2 t_2)}}{(C + x + 2\lambda_{12}t_2)}, \quad C \in \mathbb{R} \quad (153)$$

$$u = -\frac{1}{(C + x + 2\lambda_{12}t_2)^2}, \quad \mu = -2i\lambda_{12}. \quad (154)$$

6.2. Векторний випадок твердження 2.3 ($K > 1$). Матриця Λ_2 – діагональна. Для побудови розв'язку системи Яджими-Ойкави (150) виберемо матрицю $\Lambda_2 \in \operatorname{Mat}_{K \times K}(\mathbb{C})$ та розв'язок φ розмірності $(1 \times K)$ системи

$$\begin{cases} \varphi_{xx} = \varphi \Lambda_2, \\ i\varphi_{t_2} = \varphi_{xx} \end{cases} \quad (155)$$

в такому вигляді:

$$\Lambda_2 := \tilde{\Lambda}_2^2 = \operatorname{diag}(\lambda_1^2, \dots, \lambda_K^2), \quad \lambda_{j1} := \operatorname{Re}\lambda_j, \quad \lambda_{j2} := \operatorname{Im}\lambda_j, \quad j = \overline{1, K}. \quad (156)$$

$$\varphi_j = \gamma_j e^{\lambda_{j1}x + 2\lambda_{j1}\lambda_{j2}t_2 + i(\lambda_{j2}x - (\lambda_{j1}^2 - \lambda_{j2}^2)t_2)}, \quad \gamma_j = e^{k_j + i\theta_j}, \quad k_j, \theta_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, K}. \quad (157)$$

З формули (55) для матриці \mathcal{M} отримуємо

$$\mathcal{M} = C\tilde{\Lambda}_2^2 - (\tilde{\Lambda}_2^2)^* C - (\varphi^* \varphi_x(x_0, t_2^0) - \varphi_x^* \varphi(x_0, t_2^0)), \quad C = C^*. \quad (158)$$

Вважатимемо, що $(\lambda_{j1} \neq 0)$ та $((|\lambda_{j1}| \neq |\lambda_{s1}|) \vee (\lambda_{j2} \neq \lambda_{s2}))$, для всіх $j, s = 1, j \neq s$. Приймемо, починаючи з формули (158) $(x_0, t_2^0) = (0, 0)$.

Розглянемо два характерні випадки.

1. Задамо сталу матрицю C так, щоб $M = i(\mathbf{1}^\top \mathbf{1})$. Тобто матриця C виражатиметься через матрицю $\tilde{\Lambda}_2^2$ так:

$$C = \left(\frac{(\lambda_s - \bar{\lambda}_j) \bar{\gamma}_j \gamma_s + i}{\lambda_s^2 - \bar{\lambda}_j^2} \right)_{j,s=1}^K = \left(\frac{(\lambda_{s1} - \lambda_{j1} + i(\lambda_{s2} + \lambda_{j2})) \bar{\gamma}_j \gamma_s + i}{\lambda_{s1}^2 - \lambda_{s2}^2 - \lambda_{j1}^2 + \lambda_{j2}^2 + 2i(\lambda_{s1} \lambda_{s2} + \lambda_{j1} \lambda_{j2})} \right)_{j,s=1}^K. \quad (159)$$

Відповідно, з формул (33) та (159) отримуємо

$$\Delta_2 = C + \Omega_2[\bar{\varphi}, \varphi] = \left(\frac{1}{\lambda_s^2 - \bar{\lambda}_j^2} ((\lambda_s - \bar{\lambda}_j) \bar{\varphi}_j \varphi_s + i) \right)_{j,s=1}^K. \quad (160)$$

Тоді

$$\Phi = \varphi \Delta_2^{-1}, \quad \mathbf{q} = \Phi \mathbf{1}^\top = \sum_{i=0}^K \Phi_i = - \frac{\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \mathbf{1}^\top \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}}{\det(\Delta_2)}; \quad (161)$$

$$u := (\varphi \Delta_2^{-1} \varphi^*)_x = - \left[\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \varphi^* \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} (\det \Delta_2)^{-1} \right]_x = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \Delta_2. \quad (162)$$

Скалярні функції \mathbf{q} (161) та u (162) будуть розв'язками системи Яджими-Ойкави (150) з $\mu = i$.

2. Прийmemo

$$C = \left(\frac{(\lambda_s - \bar{\lambda}_j) \bar{\gamma}_j \gamma_s - i}{\lambda_s^2 - \bar{\lambda}_j^2} \right)_{j,s=1}^K = \left(\frac{(\lambda_{s1} - \lambda_{j1} + i(\lambda_{s2} + \lambda_{j2})) \bar{\gamma}_j \gamma_s - i}{\lambda_{s1}^2 - \lambda_{s2}^2 - \lambda_{j1}^2 + \lambda_{j2}^2 + 2i(\lambda_{s1} \lambda_{s2} + \lambda_{j1} \lambda_{j2})} \right)_{j,s=1}^K. \quad (163)$$

Тоді $M = C \tilde{\Lambda}_2^2 - (\tilde{\Lambda}_2^2)^* C - (\varphi^* \varphi_x(0,0) - \varphi_x^* \varphi(0,0)) = -i \mathbf{1}^\top \mathbf{1}$.

З формул (33) та (163) одержуємо

$$\Delta_2 = C + \Omega_2[\bar{\varphi}, \varphi] = \left(\frac{1}{\lambda_s^2 - \bar{\lambda}_j^2} ((\lambda_s - \bar{\lambda}_j) \bar{\varphi}_j \varphi_s - i) \right)_{j,s=1}^K. \quad (164)$$

Відповідно,

$$\Phi = \varphi \Delta_2^{-1}, \quad \mathbf{q} = \Phi \mathbf{1}^\top = \sum_{i=0}^K \Phi_i = - \frac{\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \mathbf{1}^\top \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}}{\det(\Delta_2)}; \quad (165)$$

$$u := (\varphi \Delta_2^{-1} \varphi^*)_x = - \left[\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \varphi^* \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} (\det \Delta_2)^{-1} \right]_x = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \Delta_2. \quad (166)$$

Сингулярні скалярні функції \mathbf{q} (165) та u (166) будуть розв'язками системи Яджими-Ойкави (150) з $\mu = -i$.

6.3. Векторний випадок твердження 2.4 ($K = 2$). Матриця Λ_2 - діагональна. Нехай Λ_2 є діагональною матрицею вигляду (156), функція φ виглядає як (157). Розглянемо два характерні випадки, залежно від вибору матриці C .

I. Матриця C визначається формулою (159) при $K = 2$.

Можливі такі ситуації, залежно від значень λ_j , $j=1,2$.

1. $\lambda_{11} \neq 0$, $\lambda_{21} \neq 0$.

1.1. ($(|\lambda_{11}| \neq |\lambda_{21}|) \vee (\lambda_{12} \neq \lambda_{22})$).

З формул (159) та (160) при $K = 2$ отримуємо

$$\Delta_2 = C + \Omega_2[\bar{\varphi}, \varphi] = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_1^2}((\lambda_1 - \bar{\lambda}_1)|\varphi_1|^2 + i) & \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}((\lambda_2 - \bar{\lambda}_1)\bar{\varphi}_1\varphi_2 + i) \\ \frac{1}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}((\lambda_1 - \bar{\lambda}_2)\bar{\varphi}_2\varphi_1 + i) & \frac{1}{\lambda_2^2 - \lambda_2^2}((\lambda_2 - \bar{\lambda}_2)|\varphi_2|^2 + i) \end{pmatrix}; \quad (167)$$

$$\Phi(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = \varphi\Delta_2^{-1}, \quad \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_1 + \Phi_2. \quad (168)$$

Перевіримо, чи є функції \mathbf{q} та u регулярними. Для цього достатньо дослідити чи перетворюється в нуль визначник $\det(\Delta_2)$. Розіб'ємо матрицю Δ_2 на суму так:

$$\Delta_2 = \tilde{\Delta}_2 + \tilde{C}, \quad (169)$$

де

$$\tilde{\Delta}_2 = \begin{pmatrix} \frac{|\varphi_1|^2}{\lambda_1 + \lambda_1} & \frac{\bar{\varphi}_1\varphi_2}{\lambda_2 + \lambda_1} \\ \frac{\bar{\varphi}_2\varphi_1}{\lambda_1 + \lambda_2} & \frac{|\varphi_2|^2}{\lambda_2 + \lambda_2} \end{pmatrix}, \quad \tilde{C} = \begin{pmatrix} \frac{i}{\lambda_1^2 - \lambda_1^2} & \frac{i}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \\ \frac{i}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2} & \frac{i}{\lambda_2^2 - \lambda_2^2} \end{pmatrix}. \quad (170)$$

Обчислимо головні мінори матриць $\tilde{\Delta}_2$ та \tilde{C}

$$(\tilde{C})_{11} = \frac{1}{4\lambda_{11}\lambda_{12}}, \quad \det(\tilde{C}) = \frac{|\lambda_1^2 - \lambda_2^2|^2}{4\lambda_{11}\lambda_{12}\lambda_{21}\lambda_{22}|\lambda_1^2 - \lambda_2^2|^2}.$$

$$(\tilde{\Delta}_2)_{11} = \frac{|\varphi_1|^2}{2\lambda_{11}}, \quad \det(\tilde{\Delta}_2) = \frac{|\varphi_1|^2|\varphi_2|^2|\lambda_1 - \lambda_2|^2}{2\lambda_{11}\lambda_{21}|\lambda_2 + \lambda_1|^2}.$$

У випадку, коли $\lambda_{12} > 0$, $\lambda_{22} > 0$, знаки головних мінорів матриць \tilde{C} та $\tilde{\Delta}_2$ збігаються і безпосередньо з критерію Сільвестра визначеності матриць впливає, що визначник $\det(\Delta_2) = \det(\tilde{\Delta}_2 + \tilde{C}) \neq 0$ для довільних x, t_2 .

На рис. 12 зображено графіки регулярних функцій $|\mathbf{q}|$, $\text{Re } \mathbf{q}$ та u при $\gamma_1 = e^{6+i}$, $\gamma_2 = e^{2i}$, $\lambda_1 = \frac{3}{2} + \frac{1}{4}i$, $\lambda_2 = 1 + 2i$ та $t := t_2 = -3, 1, 5$, відповідно.

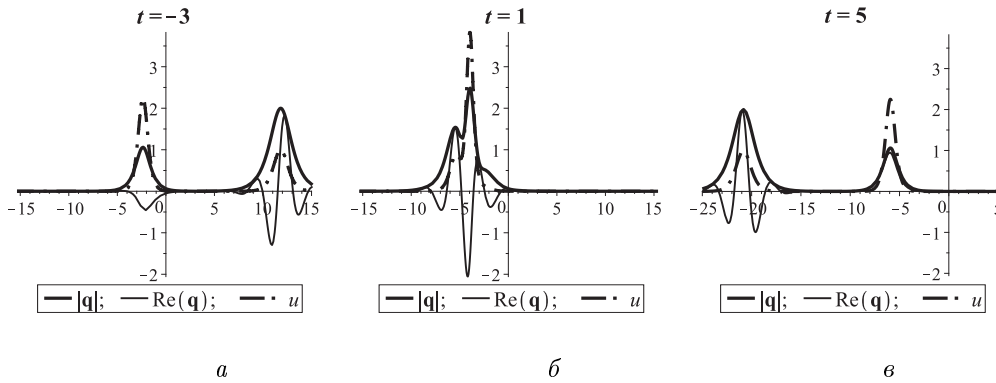


Рис. 12

Функція \mathbf{q} описує поширення та взаємодію двох пакетів коротких хвиль, а $|\mathbf{q}|$ є обвідною хвильових пакетів. Функції $|\mathbf{q}|$ та u зображають поширення та взаємодію двох довгих хвиль. Уявні частини λ_j відповідають за швидкості довгих хвиль. Дійсні частини λ_j відповідають за висоти хвиль для графіка $|\mathbf{q}|$.

При $\gamma_1 = e^{6+i}$, $\gamma_2 = e^{2i}$, $\lambda_1 = \frac{3}{2} - \frac{1}{4}i$, $\lambda_2 = 1 + 2i$ функції $|\mathbf{q}|$, $\text{Re } \mathbf{q}$ та u будуть сингулярними. На рис. 13 зображено їхні графіки при $t := t_2 = -3, 1, 3$, відповідно.

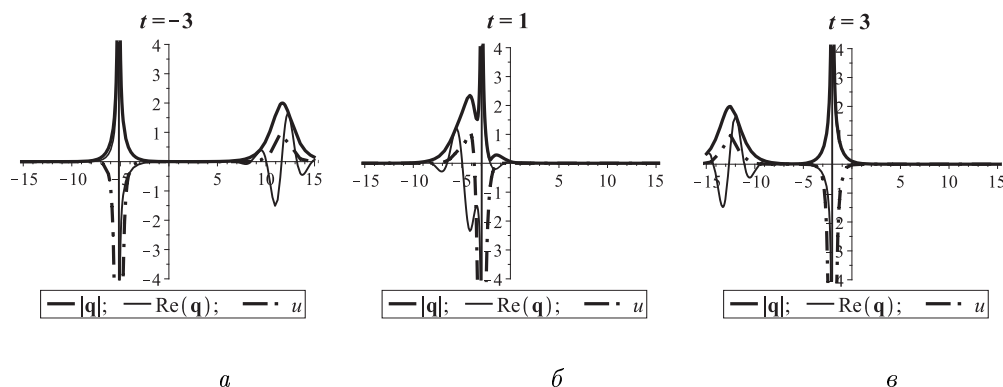


Рис. 13

Функція \mathbf{q} описує поширення та взаємодію двох пакетів коротких хвиль. Графіки $|\mathbf{q}|$ та u зображають взаємодію і поширення двох довгих хвиль. Параметри λ_{12} , λ_{22} відповідають за швидкості руху кожної з хвиль, а сталі γ_j відповідають за їхнє розташування.

1.2 $\lambda_{11} = -\lambda_{21}$, $\lambda_{12} = \lambda_{22}$.

У цьому випадку формула для визначника $\det(\Delta_2)$ (167) стає некоректною. Згідно з формулою (168) приймемо

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{12}) &:= \lim_{\lambda_{21} \rightarrow -\lambda_{11}} \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = \\ &= \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \lim_{\lambda_{21} \rightarrow -\lambda_{11}} \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (171)$$

Аналогічно,

$$\begin{aligned} u(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{12}) &:= \lim_{\lambda_{21} \rightarrow -\lambda_{11}} \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} u(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = \\ &= \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \lim_{\lambda_{21} \rightarrow -\lambda_{11}} u(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = 0. \end{aligned} \quad (172)$$

1.3 $\lambda_{11} = \lambda_{21}$, $\lambda_{12} = \lambda_{22}$.

У цьому випадку $\Delta_2 \equiv 0$ і формула для розв'язку (168) стає некоректною.

Задамо функції $\Phi(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{12})$ і $\mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{12})$ подібно, як і у випадку 1.2

$$\begin{aligned} \Phi_j(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{12}) &:= \lim_{\lambda_{21} \rightarrow \lambda_{11}} \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \Phi_j(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = \\ &= \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \lim_{\lambda_{21} \rightarrow \lambda_{11}} \Phi_j(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (173)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{12}) &:= \lim_{\lambda_{21} \rightarrow \lambda_{11}} \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = \\ &= \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \lim_{\lambda_{21} \rightarrow \lambda_{11}} \mathbf{q}(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (174)$$

$$\begin{aligned} u(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{11}, \lambda_{12}) &:= \lim_{\lambda_{21} \rightarrow \lambda_{11}} \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} u(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}) = \\ &= \lim_{\lambda_{22} \rightarrow \lambda_{12}} \lim_{\lambda_{21} \rightarrow \lambda_{11}} u(x, t_2, \lambda_{11}, \lambda_{12}, \lambda_{21}, \lambda_{22}), \quad j = 1, 2. \end{aligned} \quad (175)$$

Зауважимо, що при $\gamma_1 \neq \gamma_2$ отримаємо $\Phi_j = 0$ і, відповідно, $\mathbf{q} = 0$, а також $u = 0$. Тому розглянемо випадок, коли $\gamma_1 = \gamma_2$.

На рис. 14 зображено графіки функцій $|\mathbf{q}|$, $\text{Re } \mathbf{q}$ та u при $\gamma_1 = \gamma_2 = e^{5+2i}$, $\lambda_{11} = 1$, $\lambda_{12} = 2i$ та $t := t_2 = -87, 0, 87$, відповідно.

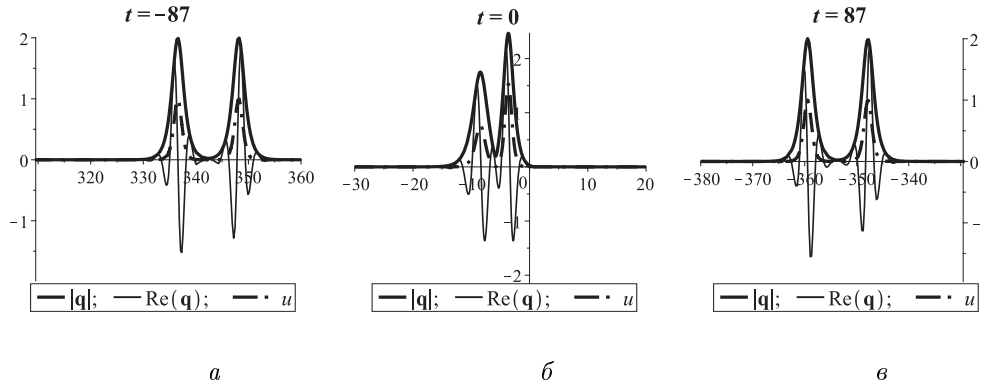


Рис. 14

Функція $\text{Re } \mathbf{q}$ описує поширення та взаємодію двох пакетів коротких хвиль, які рухаються поруч. Графіки $|\mathbf{q}|$ та u зображають дві довгі хвилі, які рухаються одна за другою. Це так званий зв'язаний стан. Параметр λ_{11} відповідає за висоту довгих хвиль для $|\mathbf{q}|$, а параметр λ_{12} – за швидкість хвиль для графіків $|\mathbf{q}|$ та u .

2. $\lambda_{11} = 0$, $\lambda_{21} \neq 0$.

У цьому випадку приймемо $\gamma_j = 1$, $j = 1, 2$;

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \bar{c}_{12} & c_{22} \end{pmatrix}, \quad (176)$$

де $c_{11} = 0$, $c_{12} = \frac{-2i\lambda_{12} + K_{12}}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}$, $c_{22} = \frac{-2i\lambda_{12} + K_{22}}{\lambda_2^2 - \lambda_2^2}$, а $K = (\varphi^* \varphi_x - \varphi_x^* \varphi)(0, 0)$. Відповідно,

$$M = C \tilde{\Lambda}_2^2 - (\tilde{\Lambda}_2^2)^* C - K = -2i\lambda_{12} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}.$$

Скалярні функції \mathbf{q} та u , що визначаються формулами (165) та (166), будуть сингулярними розв'язками системи Яджими-Ойкави з $\mu = -2i\lambda_{12}$ (150).

На рис. 15 зображено графіки функцій $|\mathbf{q}|$, $\text{Re } \mathbf{q}$ та u при $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$, $\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = 1 + 2i$ та $t := t_2 = -7, 0, 7$, відповідно.

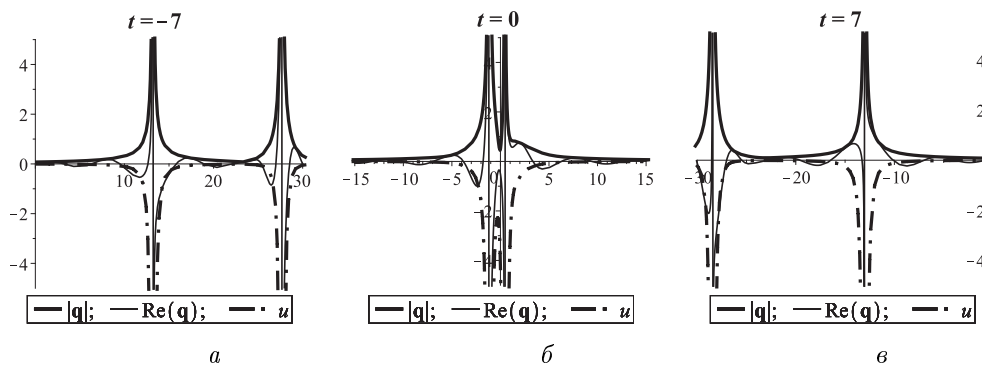


Рис. 15

Графіки $|\mathbf{q}|$ та u відображають поширення та взаємодію двох сингулярних довгих хвиль.

3. $\lambda_{11} = 0, \lambda_{21} = 0.$

У цьому випадку прийнемо $\gamma_j = 1, j = 1, 2;$

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \bar{c}_{12} & c_{22} \end{pmatrix}, \tag{177}$$

де $c_{11} = 0, c_{12} = \frac{-2i\lambda_{12} + K_{12}}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}, c_{22} = 0,$ а $K = (\varphi^* \varphi_x - \varphi_x^* \varphi)(0, 0).$ Відповідно,

$$M = C \tilde{\Lambda}_2^2 - (\tilde{\Lambda}_2^2)^* C - K = -2i\lambda_{12} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} (1 \ 1).$$

Скалярні функції \mathbf{q} та $u,$ які визначаються формулами (165) та (166), будуть сингулярними розв'язками системи Яджими-Ойкави з $\mu = -2i\lambda_{12}$ (150).

6.4. Векторний випадок твердження 2.4 ($K = 2$). Матриця Λ_2 – верхня трикутна. Нехай $\Lambda_2 = \begin{pmatrix} \lambda^2 & 1 \\ 0 & \lambda^2 \end{pmatrix},$ а вектор-функція φ розмірності (1×2) задовольняє систему (155). Виберемо розв'язок φ рівняння (155) так:

$$\begin{aligned} \varphi_1 &= \gamma_1 e^{\lambda x - i\lambda^2 t_2}; \varphi_2 = (\varphi_1)_{\lambda^2} = \frac{\gamma_1(x - 2i\lambda t_2)}{2\lambda} e^{\lambda x - i\lambda^2 t_2}, \\ \gamma_j &= e^{k_j + i\theta_j}, k_j, \theta_j \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{178}$$

Розглянемо два характерні випадки.

1. $\lambda_{11} = \text{Re} \lambda \neq 0.$

Матрицю C задаємо через Λ_1 так, щоб $M = i(1, 1) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$ Тобто,

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ \bar{c}_{12} & c_{22} \end{pmatrix}, \tag{179}$$

$$\begin{aligned} c_{11} &:= \frac{1 + 2e^{2k_1} \lambda_{12}}{4\lambda_{11} \lambda_{12}}, \quad c_{12} := \frac{4\lambda_{11} \lambda_{12}^2 + \lambda_{11} + i\lambda_{12} + 2i\lambda_{12}^2 e^{2k_1} - 4i\lambda_{11}^2 \lambda_{12}}{16\lambda_{11} \lambda_{12} (\lambda_{11} \lambda_{12}^2 - i\lambda_{11}^2 \lambda_{12})}, \\ c_{22} &= \frac{\lambda_{11}^3 \lambda_{12} + \lambda_{11} \lambda_{12}^3 + 8\lambda_{11}^3 \lambda_{12}^5 + 8\lambda_{11}^5 \lambda_{12}^3 + 2\lambda_{12}^4 e^{2k_1} \lambda_{11}}{32\lambda_{11}^2 \lambda_{12}^2 (\lambda_{11}^2 \lambda_{12}^4 + \lambda_{11}^4 \lambda_{12}^2)}. \end{aligned}$$

Відповідно, $\Delta_2 = C + \Omega[\bar{\varphi}, \varphi].$

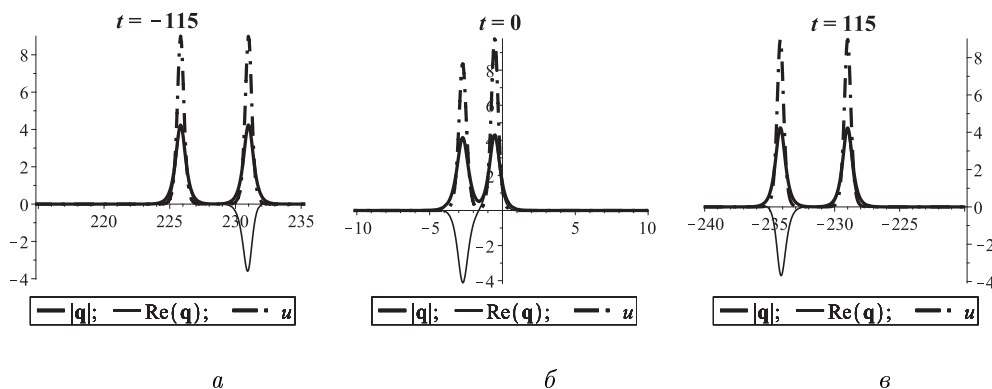


Рис. 16

Функція Φ та розв'язки \mathbf{q} , u моделі Яджими-Ойкави (150) з $\mu = -i$ набудуть вигляду

$$\Phi = \varphi \Delta_2^{-1}, \quad \mathbf{q} = \Phi \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \Phi_1 + \Phi_2.$$

$$u := (\varphi \Delta_2^{-1} \varphi^*)_x = - \left[\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \varphi^* \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} (\det \Delta_2)^{-1} \right]_x = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \Delta_2. \quad (180)$$

При $\lambda_{12} = \text{Im} \lambda > 0$ отримаємо регулярний розв'язок системи Яджими-Ойкави.

На рис. 16 зображено графіки функцій $\text{Re} \mathbf{q}$, $|\mathbf{q}|$ та u при $\gamma_1 = 5 + i$, $\lambda_1 = 3 + i$, та $t := t_2 = -115, 0, 115$, відповідно.

Графіки $|\mathbf{q}|$ та u відображають поширення і взаємодію зв'язаного стану. Дійсна частина λ_1 відповідає висоті хвиль для $|\mathbf{q}|$, а уявна частина λ_1 відповідає за швидкість хвиль.

7. Побудова точних розв'язків узагальнення моделі Бусинеска. У цьому розділі розглянемо скалярний випадок узагальненої моделі Бусинеска. Прийmemo у твердженні 2.4 (випадок $k = 3$, $n = 2$) $\alpha_2 = i$, $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{r}} = 0$, $\psi = \bar{\varphi}$. За таких умов система (72) набуде вигляду

$$\begin{cases} -3\hat{u}_{t_2 t_2} = (-\hat{u}_{xx} - 6\hat{u}^2 + 4(\Phi \mathcal{M} \Phi^*))_{xx}, \\ i\Phi_{t_2} - \Phi_{xx} - 2\hat{u}\Phi = 0. \end{cases} \quad (181)$$

Для побудови розв'язків системи (181) використаємо твердження 2.4, випадок $k = 3$, $n = 2$. Прийmemo $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{r}} = 0$, $\psi = \bar{\varphi}$.

7.1. Скалярний випадок твердження 2.4 ($K = 1$). При $K = 1$ функції $\Phi := \varphi \Delta_2^{-1}$, $u := \hat{u} = (\varphi \Delta_2^{-1} \varphi^*)_x$ будуть розв'язком моделі (181), де функція φ є розв'язком рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_{xxx} = \varphi \Lambda_3, & \Lambda_3 \in \mathbb{C}, \\ i\varphi_{t_2} = \varphi_{xx}, \end{cases} \quad (182)$$

а $\mu = \mathcal{M} = C\Lambda_3 + \bar{\Lambda}_3 C - (\varphi_{xx}^* \varphi + \varphi^* \varphi_{xx} - \varphi_x^* \varphi_x)(x_0, t_3^0)$, $C \in \mathbb{R}$.

Прийmemo $(x_0, t_3^0) = (0, 0)$, $\Lambda_3 := \lambda_1^3$, а розв'язок системи (182) виберемо так: $\varphi = e^{\lambda_1 x - i\lambda_1^2 t_2} = e^{(\lambda_{11} + i\lambda_{12})x - i(\lambda_{11} + i\lambda_{12})^2 t_2}$ ($\lambda_{11} = \text{Re} \lambda_1$, $\lambda_{12} = \text{Im} \lambda_1$). Розглянемо два можливі випадки: $\lambda_{11} = 0$ та $\lambda_{11} \neq 0$.

1. $\lambda_{11} \neq 0$.

Функції $\mathbf{q} := \Phi$, u та скаляр $\mu \in \mathbb{R}$ набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{q} := \Phi &= \frac{2\lambda_{11} e^{\lambda_{11} x + 2\lambda_{11} \lambda_{12} t_2}}{2C\lambda_{11} - 1 + e^{2\lambda_{11} x + 4\lambda_{11} \lambda_{12} t_2}} e^{i(\lambda_{12} x + (\lambda_{12}^2 - \lambda_{11}^2) t_2)}, \\ \mu &= C\lambda_1^3 + C\bar{\lambda}_1^3 - (\varphi_{xx}^* \varphi + \varphi^* \varphi_{xx} - \varphi_x^* \varphi_x)(0, 0) = (\lambda_1^3 + \bar{\lambda}_1^3) \left(C - \frac{1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_1} \right), \end{aligned} \quad (183)$$

$$u = (\varphi \Delta_2^{-1} \varphi^*)_x = \left(\frac{2\lambda_{11} e^{\lambda_{11} x + 2\lambda_{11} \lambda_{12} t_2}}{2C\lambda_{11} - 1 + e^{2\lambda_{11} x + 4\lambda_{11} \lambda_{12} t_2}} \right)_x = |\mathbf{q}|^2 (2\lambda_{11} C - 1). \quad (184)$$

Прийmemo $C = \frac{1}{\lambda_{11}}$ у формулах (183)-(184). Тоді функції $q := \Phi$, u (183)-(184) і скаляр μ виглядатимуть так:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} := \Phi &= \frac{\lambda_{11}}{\text{ch}(\lambda_{11} x + 2\lambda_{11} \lambda_{12} t_2)} e^{i(\lambda_{12} x + (\lambda_{12}^2 - \lambda_{11}^2) t_2)}, \\ u &= (\varphi \Delta_2^{-1} \varphi^*)_x = |\mathbf{q}|^2, \quad \mu = \lambda_{11}^2 - 3\lambda_{12}^2, \end{aligned} \quad (185)$$

і задовольнятимуть узагальнення моделі Бусинеска (181). Якщо у формулах (183)-(184) прийняти $C = 0$, то $q := \Phi$, u (183)-(184) та скаляр μ набудуть вигляду

$$\begin{aligned} \mathbf{q} &:= \Phi = \frac{\lambda_{11}}{\operatorname{sh}(\lambda_{11}x + 2\lambda_{11}\lambda_{12}t_2)} e^{i(\lambda_{12}x + (\lambda_{12}^2 - \lambda_{11}^2)t_2)}, \\ u &= (\varphi \Delta_2^{-1} \varphi^*)_x = -|\mathbf{q}|^2, \quad \mu = -(\lambda_{11}^2 - 3\lambda_{12}^2). \end{aligned} \quad (186)$$

2. $\lambda_{11} = 0$.

У цьому випадку $q := \Phi$, u , p (183)-(184) і скаляр μ виглядатимуть так:

$$\mathbf{q} := \Phi = \frac{e^{i(\lambda_{12}x + \lambda_{12}^2 t_2)}}{(C+x+2\lambda_{12}t_2)}, \quad u = -\frac{1}{(C+x+2\lambda_{12}t_2)^2}, \quad \mu = 3\lambda_{12}^2. \quad (187)$$

7.2. Векторний випадок твердження 2.4 ($K > 1$). Матриця Λ_3 – діагональна. Для побудови розв'язку системи Бусинеска (181) виберемо матрицю $\Lambda_3 \in \operatorname{Mat}_{K \times K}(\mathbb{C})$ і розв'язок φ розмірності $(1 \times K)$ системи

$$\begin{cases} \varphi_{xxx} = \varphi \Lambda_3, \\ i\varphi_{t_2} = \varphi_{xx}, \end{cases} \quad (188)$$

у такому вигляді:

$$\Lambda_3 := \tilde{\Lambda}_3^3 = \operatorname{diag}(\lambda_1^3, \dots, \lambda_K^3), \quad \lambda_{j1} := \operatorname{Re} \lambda_j, \quad \lambda_{j2} := \operatorname{Im} \lambda_j, \quad j = \overline{1, K}. \quad (189)$$

$$\varphi_j = \gamma_j e^{\lambda_j x - i\lambda_j^2 t_2}, \quad \gamma_j = e^{k_j + i\theta_j}, \quad k_j, \theta_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, K}. \quad (190)$$

З формули (60) для матриці \mathcal{M} отримуємо

$$\mathcal{M} = C\Lambda_3 + \Lambda_3^* C - (\varphi_{xx}^* \varphi + \varphi^* \varphi_{xx} - \varphi_x^* \varphi_x)(x_0, t_2^0). \quad (191)$$

Вважатимемо, що $(\lambda_j \neq 0)$ та $((|\lambda_{j1}| \neq |\lambda_{s1}|) \vee (\lambda_{j2} \neq \lambda_{s2}))$, для всіх $j, s = 1, j \neq s$. Прийнемо, починаючи з формули (191), $(x_0, t_2^0) = (0, 0)$.

Розглянемо два характерні випадки.

1. Задамо сталу матрицю C так, щоб $\mathcal{M} = \mathbf{1}^\top \mathbf{1}$. Тобто матриця C виражатиметься через матрицю $\tilde{\Lambda}_3^3$ так:

$$C = \left(\frac{\bar{\gamma}_j \gamma_s}{\lambda_s + \bar{\lambda}_j} + \frac{1}{\lambda_s^3 + \bar{\lambda}_j^3} \right)_{j,s=1}^K. \quad (192)$$

Відповідно, з формул (33) та (192) одержуємо

$$\Delta_2 = C + \Omega_2[\bar{\varphi}, \varphi] = \left(\frac{\bar{\varphi}_j \varphi_s}{\lambda_s + \bar{\lambda}_j} + \frac{1}{\lambda_s^3 + \bar{\lambda}_j^3} \right)_{j,s=1}^K. \quad (193)$$

Тоді

$$\Phi = \varphi \Delta_2^{-1}, \quad \mathbf{q} = \Phi \mathbf{1}^\top = \sum_{i=0}^K \Phi_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \mathbf{1}^\top \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}}{\det(\Delta_2)}; \quad (194)$$

$$u := (\varphi \Delta_2^{-1} \varphi^*)_x = - \left[\det \begin{pmatrix} \Delta_2 & \varphi^* \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} (\det \Delta_2)^{-1} \right]_x = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \Delta_2. \quad (195)$$

Скалярні функції \mathbf{q} (194), u (195) будуть розв'язками узагальненої моделі Бусинеска з $\mu = 1$

$$\begin{cases} -3u_{t_2 t_2} = (-u_{xx} - 6u^2 + 4\mu|\mathbf{q}|^2)_{xx}; \\ i\mathbf{q}_{t_2} - \mathbf{q}_{xx} - 2u\mathbf{q} = 0, \end{cases} \quad (196)$$

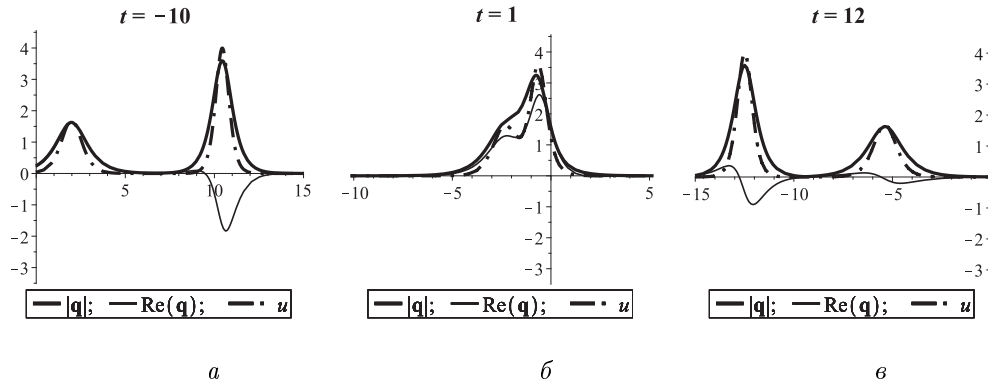


Рис. 17

На рис. 17 у випадку $K = 2$ зображено поведінку графіків функцій $|\mathbf{q}|$, $\text{Re } \mathbf{q}$ (194), u (195) при $\gamma_1 = e^2$, $\gamma_2 = e^{3i}$, $\lambda_1 = 1.3 + 0.2i$, $\lambda_2 = 2 + 0.5i$ та при $t_2 = -10, 1, 12$, відповідно.

2. Прийmemo

$$C = \left(\frac{\bar{\gamma}_j \gamma_s}{\lambda_s + \bar{\lambda}_j} - \frac{1}{\lambda_s^3 + \bar{\lambda}_j^3} \right)_{j,s=1}^K. \quad (197)$$

Тоді за формулою (60) $\mathcal{M} = -\mathbf{1}^T \mathbf{1}$. З формул (33) та (197) отримуємо

$$\Delta_2 = C + \Omega_2[\bar{\varphi}, \varphi] = \left(\frac{\bar{\varphi}_j \varphi_s}{\lambda_s + \bar{\lambda}_j} - \frac{1}{\lambda_s^3 + \bar{\lambda}_j^3} \right)_{j,s=1}^K. \quad (198)$$

Відповідно, функції \mathbf{q} та u набудуть вигляду (194) та (195) з потенціалом Δ_2 (198) і задовольнятимуть узагальнену модель Бусинеска (196) з $\mu = -1$.

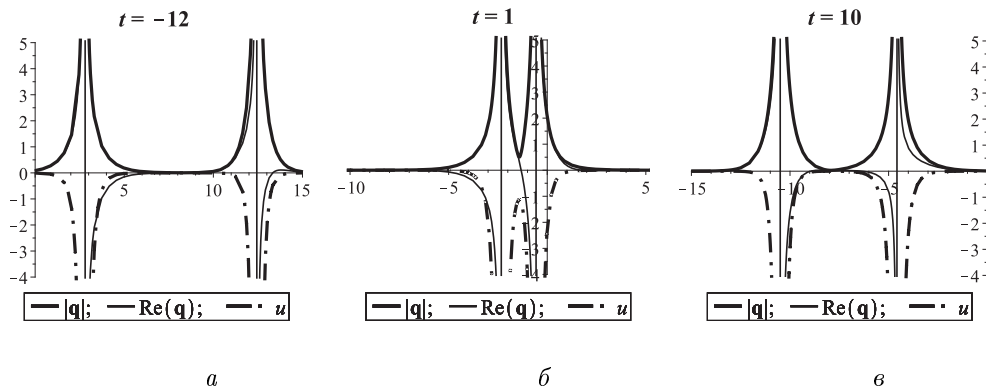


Рис. 18

На рис. 18 у випадку $K = 2$ зображено поведінку графіків функцій $|\mathbf{q}|$, $\text{Re } \mathbf{q}$ (194), u (195) при $\gamma_1 = e^2$, $\gamma_2 = e^{3i}$, $\lambda_1 = 1.3 + 0.2i$, $\lambda_2 = 2 + 0.5i$ та при $t_2 = -10, 1, 12$, відповідно.

8. Побудова точних розв'язків моделі Дрінфельда-Соколова. Розглянемо модель Дрінфельда-Соколова, яку отримуємо з векторного узагальнення (31) ($\alpha_3 = 1$, $\mathcal{M} = \mu \in \mathbb{R}$):

$$\begin{cases} \mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3u\mathbf{q}_x + \frac{3}{2}u_x\mathbf{q}, \\ u_{t_3} = \mu(\mathbf{q}^2)_x. \end{cases} \quad (199)$$

А також комплексне узагальнення моделі (199)

$$\begin{cases} \alpha_3 \mathbf{q}_{t_3} = \mathbf{q}_{xxx} + 3u\mathbf{q}_x + \left(\frac{3}{2}u_x + ip\right)\mathbf{q}, \\ \alpha_3 p_{t_3} = \frac{3}{2}i\mu(\mathbf{q}\mathbf{q}_x^* - \mathbf{q}_x\mathbf{q}^*)_x, \\ \alpha_3 u_{t_3} = \mu|\mathbf{q}|_x^2. \end{cases} \quad (200)$$

Для побудови точних розв'язків моделі (199) та її комплексного узагальнення (200) використаємо твердження 2.4, випадок $k = 3$, $n = 3$. Прийmemo $\mathbf{q} = \bar{\mathbf{r}} = 0$, $\psi = \bar{\varphi}$. Тоді система (74) набуде вигляду

$$\begin{cases} \Phi_{t_3} = \Phi_{xxx} + 3\hat{u}\Phi_x + \left(\frac{3}{2}\hat{u}_x + i\hat{p}\right)\Phi, \\ \alpha_3 \hat{p}_{t_3} = \frac{3}{2}i(\Phi\mathcal{M}\Phi_x^* - \Phi_x\mathcal{M}\Phi^*)_x, \quad (\text{Im } \hat{u}_0 =: \hat{p}). \\ \alpha_3 u_{t_3} = (\Phi\mathcal{M}\Phi^*)_x, \end{cases} \quad (201)$$

8.1. Скалярний випадок твердження 2.4 ($K = 1$). При $K = 1$ трійка функцій $\Phi := \varphi\Delta_3^{-1}$, $u := \hat{u} = (\varphi\Delta_3^{-1}\varphi^*)_x$ та $p := \hat{p} = -\frac{3}{2}i\{(\varphi\Delta_3^{-1}\varphi^*)_{xx} + \varphi_{xx}\Phi^* - \Phi\varphi_{xx}^* + \Phi(\varphi_x^*\varphi - \varphi^*\varphi_x)\Phi^*\}$ буде розв'язком моделі (201), де функція φ є розв'язком рівнянь

$$\begin{cases} \varphi_{xxx} = \varphi\Lambda_3, \quad \Lambda_3 \in \mathbb{C}, \\ \varphi_{t_3} = \varphi_{xxx}, \end{cases} \quad (202)$$

а $\mu = \mathcal{M} = C\Lambda_3 + \bar{\Lambda}_3 C - (\varphi_{xx}^*\varphi + \varphi^*\varphi_{xx} - \varphi_x^*\varphi_x)(x_0, t_3^0)$, $C \in \mathbb{R}$.

Прийmemo $(x_0, t_3^0) = (0, 0)$, $\Lambda_3 := \lambda_1^3$, а розв'язок системи (202) виберемо так: $\varphi = e^{\lambda_1 x + \lambda_1^3 t_3} = e^{(\lambda_{11} + i\lambda_{12})x + (\lambda_{11} + i\lambda_{12})^3 t_3}$ ($\lambda_{11} = \text{Re}\lambda_1$, $\lambda_{12} = \text{Im}\lambda_1$). Розглянемо два можливі випадки: $\lambda_{11} = 0$ та $\lambda_{11} \neq 0$.

1. $\lambda_{11} \neq 0$.

Функції $\mathbf{q} := \Phi$, u , p і скаляр $\mu \in \mathbb{R}$ набудуть вигляду:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} := \Phi &= \frac{2\lambda_{11}e^{\lambda_{11}x + \text{Re}(\lambda_1^3)t_3}}{2C\lambda_{11} - 1 + e^{2\lambda_{11}x + 2\text{Re}(\lambda_1^3)t_3}} e^{i(\lambda_{12}x + \text{Im}(\lambda_1^3)t_2)}, \\ \mu &= C\lambda_1^3 + C\bar{\lambda}_1^3 - (\varphi_{xx}^*\varphi + \varphi^*\varphi_{xx} - \varphi_x^*\varphi_x)(0, 0) = (\lambda_1^3 + \bar{\lambda}_1^3) \left(C - \frac{1}{\lambda_1 + \bar{\lambda}_1}\right), \end{aligned} \quad (203)$$

$$u = (\varphi\Delta_2^{-1}\varphi^*)_x = \left(\frac{2\lambda_{11}e^{2\lambda_{11}x + 2\text{Re}(\lambda_1^3)t_3}}{2C\lambda_{11} - 1 + e^{2\lambda_{11}x + 2\text{Re}(\lambda_1^3)t_3}}\right)_x = |\mathbf{q}|^2(2\lambda_1 C - 1), \quad (204)$$

$$p = -\frac{3}{2}i\{\varphi_{xx}\Phi^* - \Phi\varphi_{xx}^* + \Phi(\varphi_x^*\varphi - \varphi^*\varphi_x)\Phi^*\}. \quad (205)$$

Прийmemo $C = \frac{1}{\lambda_{11}}$ у формулах (203)-(205). Тоді функції $q := \Phi$, u , p (203)-(205) і скаляр μ виглядатимуть так:

$$\begin{aligned} \mathbf{q} := \Phi &= \frac{\lambda_{11}e^{i(\lambda_{12}x + \text{Im}(\lambda_1^3)t_2)}}{\text{ch}(\lambda_{11}x + \text{Re}(\lambda_1^3)t_3)}, \quad u = (\varphi\Delta_3^{-1}\varphi^*)_x = |\mathbf{q}|^2, \\ p &= -\frac{3}{2}i\{\varphi_{xx}\Phi^* - \Phi\varphi_{xx}^* + \Phi(\varphi_x^*\varphi - \varphi^*\varphi_x)\Phi^*\}, \quad \mu = \lambda_{11}^2 - 3\lambda_{12}^2, \end{aligned} \quad (206)$$

і задовольнятимуть модель (200).

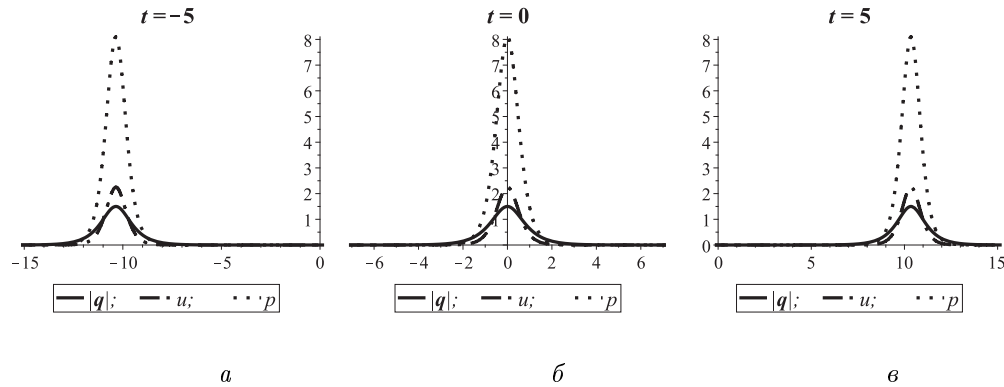


Рис. 19

На рис. 19 у випадку $K = 2$ зображено поведінку графіків функцій $|q|$, u , p (206) при $\lambda_1 = 1.5 + 1.2i$ та при $t_2 = -5, 0, 5$, відповідно.

При $\lambda_1 = \text{Re}\lambda_1 = \lambda_{11}$ (дійсний випадок) отримаємо розв'язок моделі Дрінфельда-Соколова (199)

$$\mathbf{q} := \Phi = \frac{\lambda_1}{\text{ch}(\lambda_1 x + \lambda_1^3 t_3)}, \quad u = (\varphi^2 \Delta_3^{-1})_x = |\mathbf{q}|^2, \quad p = 0, \quad \mu = \lambda_1^2. \quad (207)$$

Якщо у формулах (203)-(205) прийняти $C = 0$, то $q := \Phi$, u , p (203)-(205) та скаляр μ набудуть вигляду

$$\mathbf{q} := \Phi = \frac{\lambda_{11} e^{i(\lambda_{12} x + \text{Im}(\lambda_1^3) t_2)}}{\text{sh}(\lambda_{11} x + \text{Re}(\lambda_1^3) t_3)}, \quad u = (\varphi \Delta_3^{-1} \varphi^*)_x = -|\mathbf{q}|^2, \quad (208)$$

$$p = -\frac{3}{2} i \{ \varphi_{xx} \Phi^* - \Phi \varphi_{xx}^* + \Phi (\varphi_x^* \varphi - \varphi^* \varphi_x) \Phi^* \}, \quad \mu = -(\lambda_{11}^2 - 3\lambda_{12}^2).$$

При $\lambda_1 = \text{Re}\lambda_1 = \lambda_{11}$ розв'язок моделі Дрінфельда-Соколова набуде вигляду

$$\mathbf{q} := \Phi = \frac{\lambda_1}{\text{sh}(\lambda_1 x + \lambda_1^3 t_3)}, \quad u = (\varphi^2 \Delta_3^{-1})_x = -|\mathbf{q}|^2, \quad p = 0, \quad \mu = -\lambda_1^2. \quad (209)$$

2. $\lambda_{11} = 0$.

У цьому випадку $q := \Phi$, u , p (203)-(205) і скаляр μ виглядатимуть так:

$$\mathbf{q} := \Phi = \frac{\lambda_{11} e^{i(\lambda_{12} x + \text{Im}(\lambda_1^3) t_2)}}{(C+x-3\lambda_{12}^2 t_3)}, \quad u = -\frac{1}{(C+x+3\lambda_{12}^2 t_2)^2}, \quad (210)$$

$$p = -\frac{3}{2} i \{ \varphi_{xx} \Phi^* - \Phi \varphi_{xx}^* + \Phi (\varphi_x^* \varphi - \varphi^* \varphi_x) \Phi^* \}, \quad \mu = 3\lambda_{12}^2.$$

8.2. Векторний випадок твердження 2.4 ($K > 1$). Матриця Λ_3 – діагональна. Для побудови розв'язку системи (200) виберемо матрицю $\Lambda_3 \in \text{Mat}_{K \times K}(\mathbb{C})$ та розв'язок φ розмірності $(1 \times K)$ системи

$$\begin{cases} \varphi_{xxx} = \varphi \Lambda_3, \\ \varphi_{t_3} = \varphi_{xx}, \end{cases} \quad (211)$$

у такому вигляді:

$$\Lambda_3 := \tilde{\Lambda}_3^3 = \text{diag}(\lambda_1^3, \dots, \lambda_K^3), \quad \lambda_{j1} := \text{Re}\lambda_j, \quad \lambda_{j2} := \text{Im}\lambda_j, \quad j = \overline{1, K}, \quad (212)$$

$$\varphi_j = \gamma_j e^{\lambda_j x + \lambda_j^3 t_3}, \quad \gamma_j = e^{k_j + i\theta_j}, \quad k_j, \theta_j \in \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, K}. \quad (213)$$

З формули (63) для матриці \mathcal{M} отримуємо

$$\mathcal{M} = C\Lambda_3 + \Lambda_3^*C - (\varphi_{xx}^*\varphi + \varphi^*\varphi_{xx} - \varphi_x^*\varphi_x)(x_0, t_3^0). \quad (214)$$

Вважатимемо, що $(\lambda_{j1} \neq 0)$ та $((|\lambda_{j1}| \neq |\lambda_{s1}|) \vee (\lambda_{j2} \neq \lambda_{s2}))$, для всіх $j, s = 1, j \neq s$.

Прийmemo $(x_0, t_3^0) = (0, 0)$ і розглянемо два характерні випадки.

1. Задамо сталу матрицю C так, щоб $\mathcal{M} = \mathbf{1}^\top \mathbf{1}$. Тобто матриця C виражатиметься через матрицю $\tilde{\Lambda}_3^3$ так:

$$C = \left(\frac{\tilde{\gamma}_j \gamma_s}{\lambda_s + \lambda_j} + \frac{1}{\lambda_s^3 + \lambda_j^3} \right)_{j,s=1}^K. \quad (215)$$

Відповідно, з формул (36) та (215) одержуємо

$$\Delta_3 = C + \Omega_3[\bar{\varphi}, \varphi] = \left(\frac{\bar{\varphi}_j \varphi_s}{\lambda_s + \lambda_j} + \frac{1}{\lambda_s^3 + \lambda_j^3} \right)_{j,s=1}^K. \quad (216)$$

Тоді

$$\Phi = \varphi \Delta_3^{-1}, \quad \mathbf{q} = \Phi \mathbf{1}^\top = \sum_{i=0}^K \Phi_i = \frac{\det \begin{pmatrix} \Delta_3 & \mathbf{1}^\top \\ \varphi & 0 \end{pmatrix}}{\det(\Delta_3)}; \quad (217)$$

$$u := (\varphi \Delta_3^{-1} \varphi^*)_x = - \left[\det \begin{pmatrix} \Delta_3 & \varphi^* \\ \varphi & 0 \end{pmatrix} (\det \Delta_3)^{-1} \right]_x = - \frac{\partial^2}{\partial x^2} \ln \det \Delta_3. \quad (218)$$

$$p = -\frac{3}{2}i \{ \varphi_{xx} \Phi^* - \Phi \varphi_{xx}^* + \Phi (\varphi_x^* \varphi - \varphi^* \varphi_x) \Phi^* \}$$

Скалярні функції \mathbf{q} (217), u , p (218) будуть розв'язками системи (200) з $\mu = 1$. Прийнявши у формулах (217)-(218) $\lambda_{12} = 0$, отримаємо розв'язки системи Дрінфельда-Соколова (199). Поведінка графіків функцій $|\mathbf{q}|$ (217), u (218) для випадку $K = 2$ при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1.5$, $\gamma_1 = e^2$, $\gamma_2 = 1$ зображена на рис. 20 при $t_3 = -5, 1, 6$.

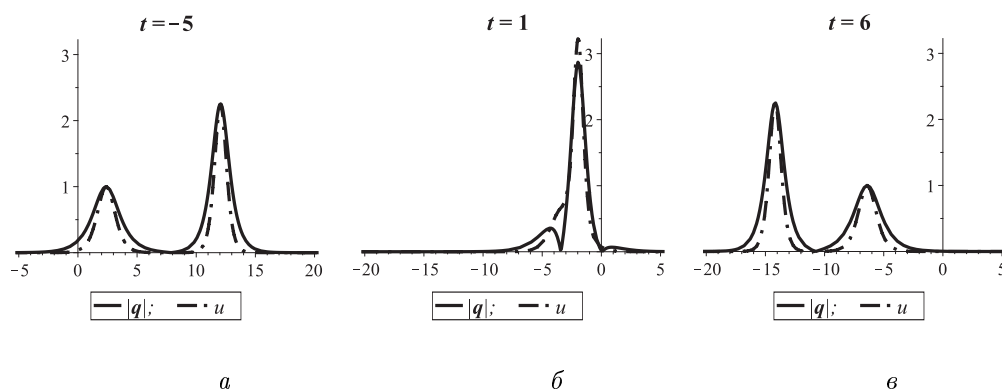


Рис. 20

Вигляд трисолітонного розв'язку для $K = 3$ зображено на рис. 21 при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1.5$, $\lambda_3 = 2$, $\gamma_1 = e^{10}$, $\gamma_2 = e^2$, $\gamma_3 = e^5$ та при $t_3 = -7, -1, 1, 2, 7$, відповідно.

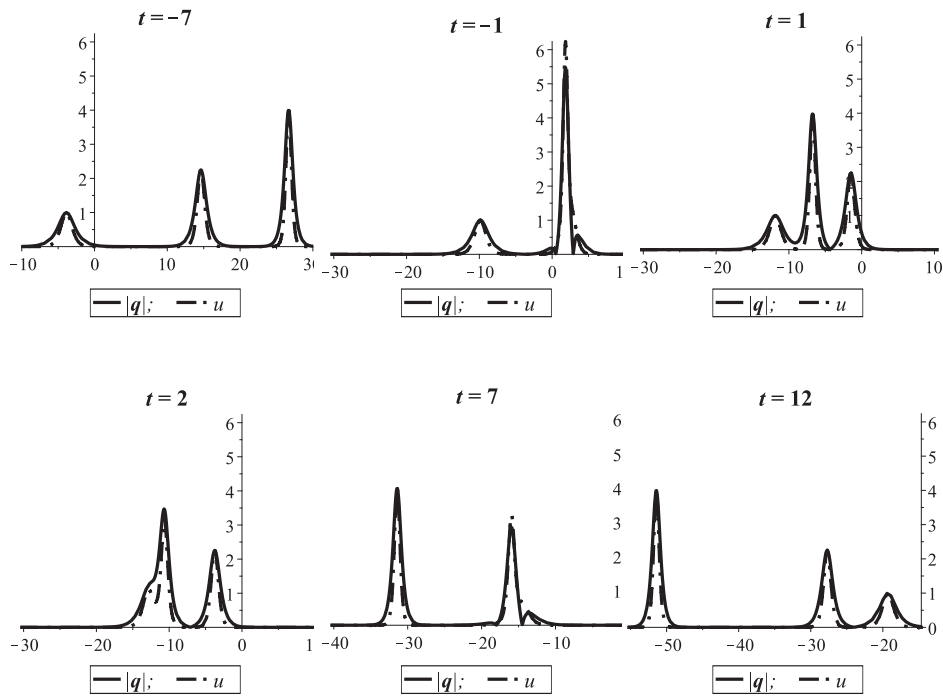


Рис. 21

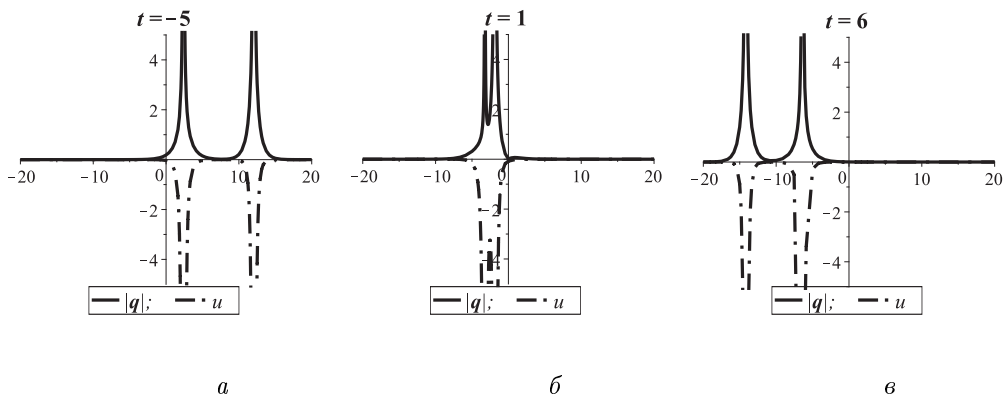


Рис. 22

2. Прийmemo

$$C = \left(\frac{\bar{\gamma}_j \gamma_s}{\lambda_s + \bar{\lambda}_j} - \frac{1}{\lambda_s^3 + \bar{\lambda}_j^3} \right)_{j,s=1}^K. \quad (219)$$

Тоді за формулою (63) $M = -\mathbf{1}^T \mathbf{1}$. З формул (36) та (219) отримуємо

$$\Delta_3 = C + \Omega_3[\bar{\varphi}, \varphi] = \left(\frac{\bar{\varphi}_j \varphi_s}{\lambda_s + \bar{\lambda}_j} - \frac{1}{\lambda_s^3 + \bar{\lambda}_j^3} \right)_{j,s=1}^K. \quad (220)$$

Відповідно, функції \mathbf{q} (217), u та p (218) з потенціалом Δ_3 (220) задовольняють систему (200) з $\mu = -1$. Приймаючи у формулах (217)-(218) $\lambda_{12} = 0$, отримаємо розв'язки системи Дрінфельда-Соколова (199) з $\mu = -1$.

Поведінку графіків функцій $|\mathbf{q}|$ (217), u (218) для випадку $K = 2$ при $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1.5$, $\gamma_1 = e^2$, $\gamma_2 = 1$ зображено на рис. 22 при $t_3 = -5, 1, 6$.

9. Заключні зауваження. Теорію операторів загальних перетворень типу Дарбу [10, 26, 27, 28] розробляли для інтегрування нелінійних рівнянь математичної фізики, які допускають диференціальні та інтегро-диференціальні зображення Лакса-Захарова-Шабата.

У цій праці метод, в основу якого покладено інваріантні перетворення лінійних інтегро-диференціальних та еволюційних виразів, застосовують для інтегрування нелінійного рівняння Шредінгера, моделей Яджими-Ойкави та Дрінфельда-Соколова, а також узагальнення моделі Бусинеска. Зокрема, в рамках цього підходу отримано N -солітонні розв'язки для згаданих моделей, а також розв'язки у вигляді "зв'язаних станів". Крім того, за допомогою методу бінарних перетворень отримано сингулярні та регулярні розв'язки для векторних узагальнень нелінійного рівняння Шредінгера та моделі Яджими-Ойкави. Зважаючи на велику кількість технічних перетворень, яка характерна для побудови точних розв'язків нелінійних систем, значна частина обчислень, а також побудова графіків виконувалась у пакеті символічної математики Maple.

Зауважимо також, що методи інтегрування нелінійних систем з інтегро-диференціальним оператором Лакса в їхньому зображенні без суттєвих змін переносяться і на довільну матричну розмірність (в алгебрі формальних символів це було зроблено в [28], а для (2+1)-вимірних систем у [27]). Деякі з (1+1)-вимірних систем допускають просторово-двовимірні узагальнення довільної матричної розмірності, в зображенні Лакса для яких обидва оператори є інтегро-диференціальними. Серед них, зокрема, містяться відомі моделі Деві-Стюартсона (DS-I, DS-II), рівняння Чена-Лі-Лю [29] та їхні вищі симетрії (див., наприклад, [30]).

Інтегруванню цих систем у рамках єдиного алгебричного підходу, який ґрунтується на інваріантних перетвореннях лінійних інтегро-диференціальних операторів, будуть присвячені наші подальші дослідження.

СПИСОК ВИКОРИСТАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ

1. Dickey L. A. Soliton equations and Hamiltonian systems / Dickey L. A. // Adv. Math. Phys. – 1991. – Vol. 12. – P. 310.
2. Захаров В.Е. Схема интегрирования нелинейных уравнений математической физики методом обратной задачи рассеяния / Захаров В.Е., Шабат А.Б. // Функцион. анализ и его прил. – 1974. – Т. 8, №3. – С. 43-53.
3. Захаров В.Е. Теория солитонов. Метод обратной задачи / Захаров В.Е., Мананков С.В., Новиков С.П., Питаевский Л.П. – М.: Наука, 1980.
4. Солитоны / Под ред. Р. Буллафа, Ф. Кодри. – М.: Мир, 1983.

5. *Марченко В.А.* Нелинейные уравнения и операторные алгебры / *Марченко В.А.* – К.: Наук. думка, 1986.
6. *Crum M.M.* Associated Sturm - Liouville systems / *Crum M.M.* // Quart. J. Math. Oxford. – 1955. – Vol. 2, №6. – P. 121-127.
7. *Darboux G.* Lecons sur la Theorie Generale de Surface et les Applications Geometriques du Calcul Infinitesimal II. / *Darboux G.* – Paris: Gauthiers-Villars, 1889.
8. *Matveev V.B.* Darboux transformations and explicit solutions of the Kadomtsev-Petviashvili equation depending on the functional parameters / *Matveev V.B.* // Letter in Mathematical Physics. – 1979. – Vol. 3. – P. 213-216.
9. *Matveev V. B.* Darboux transformations and solitons / *Matveev V. B., Salle M.A.* – Berlin Heidelberg: Springer-Verlag, 1991.
10. *Sydorenko Yu.M.* Factorization of matrix differential operators and Darboux-like transformations / *Sydorenko Yu.M.* // Matematychni Studii. – 2003. – Vol. 19, №2. – P. 181-192.
11. *Беркела Ю.Ю.* Теорема типу Дарбу і оператори перетворень для нелокально редукованої ермітової ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі (Нк-сКР) / *Беркела Ю.Ю., Сидоренко Ю.М.* // Матем. студії. – 2006. – Т. 26, №. 1. – С. 86-90.
12. *Сато М.* Голономные квантовые поля / *Сато М., Дзимбо М., Мува М.* – М.: Мир, 1983.
13. *Ohta Y.* An elementary introduction to Sato theory / *Ohta Y., Satsuma J., Takahashi D., Tokihiro T.* // Prog. Theor. Phys. Suppl. – 1988. – Vol. 94. – P. 210-241.
14. *Самойленко А.М.* Ієрархія рівнянь Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями: багатомірні узагальнення та точні розв'язки редукованих систем / *Самойленко А.М., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* // Укр. мат. журн. – 1999. – Т. 51, №1. – С. 78-97.
15. *Митропольський Ю.О.* Просторово-двовимірне узагальнення ієрархії Кадомцева-Петвіашвілі з нелокальними в'язями / *Митропольський Ю.О., Самойленко В.Г., Сидоренко Ю.М.* // Доп. НАН України. – 1999. – №9. – С. 19-23.
16. *Cheng Yi.* Constrained of the Kadomtsev-Petviashvili hierarchy / *Cheng Yi.* // J. Math. Phys. – 1992. – Vol. 33. – P. 3774-3787.
17. *Konopelchenko B.* (1+1)-dimensional integrable systems as symmetry constraints of (2+1)-dimensional systems / *Konopelchenko B., Sidorenko Yu., Strampp W.* // Phys. Lett. A. – 1991. – Vol. 151. – P. 17-21.
18. *Konopelchenko B.* New reductions of the Kadomtsev-Petviashvili and two-dimensional Toda lattice hierarchies via symmetry constraints / *Konopelchenko B., Strampp W.* // J. Math. Phys. – 1992. – Vol. 33. – P. 3676-3686.
19. *Oevel W.* Hamiltonian structures of Melnikov system and its reductions / *Oevel W., Sidorenko Yu., Strampp W.* // Inverse Problems. – 1993. – Vol. 9. – P. 737-747.
20. *Sidorenko Yu.* Symmetry constraints of the KP-hierarchy / *Sidorenko Yu., Strampp W.* // Inverse Problems. – 1991. – Vol. 7. – P. 37-43.
21. *Sidorenko Yu.* KP-hierarchy and (1+1)-dimensional multicomponent integrable systems / *Sidorenko Yu.* // Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 25, №1. – С. 91-104.
22. *Sidorenko Yu.* Multicomponents integrable reductions in Kadomtsev-Petviashvili hierarchy / *Sidorenko Yu., Strampp W.* // J. Math. Phys. – 1993. – Vol. 34, №4. – P. 1429-1446.
23. *Беркела Ю.* Векторно-матричні узагальнення бігамільтонових динамічних систем та їх інтегрування / *Беркела Ю., Сидоренко Ю.* // Матем. студії. – 2005. – Т. 23, №1. – С. 31-51.
24. *Berkela Yu.Yu.* The exact solutions of some multicomponent integrable models / *Berkela Yu.Yu., Sidorenko Yu.M.* // Математичні студії. – 2002. – Т. 17, №1. – С. 47-58.
25. *Ланкастер П.* Теория матриц / *Ланкастер П.* – М.: Наука, 1973.

26. Сидоренко Ю.М. Бінарні перетворення і (2+1)-вимірні інтегровні системи / Сидоренко Ю.М. // Укр. мат. журн. – 2002. – Т. 54, №11. – С. 1531-1550.
27. Сидоренко Ю.М. Бінарні перетворення просторово-двовимірних інтегро-диференціальних операторів і рівнянь Лакса / Сидоренко Ю.М., Чвартацький О.І. // Вісн. Київ. нац. ун-ту. Сер. матем. мех. – 2009. – Вип. 22, №19. – С. 32-35
28. Sydorenko Yu. Generalized binary Darboux-like theorem for constrained Kadomtsev-Petviashvili (сКР) Flows / Sydorenko Yu. // Proc. Inst. Math. NAS of Ukraine. – 2004. – Vol. 50, Part 1. – P. 470-477.
29. Chen H.H. Integrability of nonlinear Hamiltonian systems by inverse scattering method / Chen H.H., Lee Y.C., Liu C.S. // Physica Scr. – 1979. – Vol. 20. – P. 490-492.
30. Починайко М.Д. Інтегрування деяких (2+1)-вимірних інтегровних систем методом оберненої задачі розсіяння та бінарних перетворень Дарбу / Починайко М.Д., Сидоренко Ю.М. // Матем. студії. – 2003. – Т. 20, №2. – С. 119-132.

*Стаття: надійшла до редакції 05.07.2011
прийнята до друку 14.12.2011*

INTEGRATION OF SCALAR KADOMTSEV-PETVIASHVILI HIERARCHY BY THE METHOD OF INTEGRAL DARBOUX-LIKE TRANSFORMATIONS

Yuriy SYDORENKO, Oleksandr CHVARTATSKYI

*Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: alex.chvartatskyi@gmail.com*

A constructive method of finding the exact solutions of some nonlinear models of mathematical physics is proposed, which is based on the Darboux-like transformations. The solutions of nonlinear Schroedinger equation, Yajima-Oikawa and Drinfeld-Sokolov systems, the generalization of the Boussinesq model are obtained by using this approach. Their multicomponent (vector) generalizations are also investigated.

Key words: integral transformations, nonlinear Schroedinger equation, Yajima-Oikawa system, Drinfel'd-Sokolov system, the generalization of the Boussinesq model.

**ИНТЕГРИРОВАНИЕ СКАЛЯРНОЙ ИЄРАРХИИ
КАДОМЦЕВА-ПЕТВИАШВИЛИ МЕТОДОМ
ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ ТИПА ДАРБУ**

Юрий СИДОРЕНКО, Александр ЧВАРТАЦКИЙ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: alex.chvartatskyy@gmail.com*

Предложено конструктивный метод построения точных решений для некоторых нелинейных систем математической физики с помощью преобразований типа Дарбу. Используя этот подход, найдено решения нелинейного уравнения Шредингера, моделей Яджимы-Ойкавы, Дринфельда-Соколова и обобщения модели Буссинеска. Также исследованы их многокомпонентные (векторные) обобщения.

Ключевые слова: интегральные преобразования, нелинейное уравнение Шредингера, модель Яджимы-Ойкавы, модель Дринфельда-Соколова, обобщение модели Буссинеска.