ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 115–126
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 115–126

УДК 519.218.31

ПЕРІОД ЗАЙНЯТОСТІ ТА КІЛЬКІСТЬ ОБСЛУЖЕНИХ ЗАМОВЛЕНЬ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПУ $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ З ПОРОГОВИМИ СТРАТЕГІЯМИ ФУНКЦІОНУВАННЯ

Костянтин ЖЕРНОВИЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, 79000, Львів
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

Вивчено системи обслуговування $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ з пороговим блокуванням вхідного потоку та з відновлюючим рівнем потоку замовлень, в яких на час блокування змінюється інтенсивність обслуговування. Для кожної з систем досліджено сумісний розподіл періоду зайнятості та кількості замовлень, обслужених за цей період.

Ключові слова: система $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, блокування вхідного потоку, перемикання режимів обслуговування, розподіл періоду зайнятості та кількості замовлень, обслужених за цей період.

1. Вступ. Для системи обслуговування $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ задамо послідовності незалежних випадкових величин $\{\alpha_n\}$, $\{\theta_n\}$, $\{\beta_n\}$ і $\{\widetilde{\beta}_n\}$ $(n \geqslant 1)$, де α_n – час між надходженням $(n-1)$-ї та n-ї групи замовлень, θ_n – кількість замовлень в n-й групі, а β_n або $\widetilde{\beta}_n$ – час обслуговування n-го замовлення. Нехай $\mathbf{P}\{\alpha_n < x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ $(\lambda > 0)$, $\mathbf{P}\{\theta_n = i\} = a_i$ $(i \geqslant 1)$.

Замовлення обслуговуються по одному, обслужене замовлення покидає систему, а обслуговуючий пристрій негайно починає обслуговування замовлення з черги за її наявності або чекає надходження чергової групи замовлень. Застосовується дисципліна обслуговування FIFO. Черга всередині однієї групи замовлень може бути організована довільно.

Нехай m – максимальна кількість замовлень, які одночасно можуть перебувати у черзі. Отже, якщо в систему, в якій вже є $k \in [0,\, m+1]$ замовлень, надходить група з кількістю θ_n замовлень, то лише $\min\{\theta_n,\, m+1-k\}$ з них приєднуються до черги, а решта втрачаються.

Позначимо через $\xi(t)$ кількість замовлень у системі в момент часу t і задамо пороговий рівень h $(h = \overline{1,\, m-1})$.

Мета нашої праці – вивчити дві різні системи обслуговування, які позначимо відповідно через $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h}}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ і $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h,m}}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$. Опишемо особливості кожної з них.

© Жерновий К., 2011

Для системи $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ приймемо таке: якщо $\xi(t) \le h$, де t – момент початку обслуговування n-го замовлення, то $\mathbf{P}\{\beta_n < x\} = F(x)$ $(x \geqslant 0)$, $F(0) = 0$. Якщо ж $\xi(t) > h$, то час обслуговування n-го замовлення позначимо через $\widetilde{\beta}_n$, причому $\mathbf{P}\{\widetilde{\beta}_n < x\} = \widetilde{F}(x)$ $(x \geqslant 0)$, $\widetilde{F}(0) = 0$. Якщо t – момент початку обслуговування чергового замовлення і $\xi(t) > h$, то під час обслуговування цього замовлення відбувається блокування вхідного потоку замовлень (вони не допускаються на вхід системи). Процес надходження замовлень відновлюється в момент t початку обслуговування першого замовлення, для якого $\xi(t) \le h$.

Особливістю системи $\mathrm{M}_{\mathrm{h,m}}^{\theta}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ є те, що блокування вхідного потоку відбувається з моменту, коли довжина черги досягає числа m, до моменту t початку обслуговування першого замовлення, для якого $\xi(t) \le h$. Від моменту початку обслуговування першого замовлення під час блокування до моменту завершення блокування вхідного потоку час обслуговування кожного замовлення розподілений за законом $\widetilde{F}(x)$. Якщо на момент початку обслуговування чергового замовлення блокування вхідного потоку не застосовується, то час обслуговування розподілений за основним законом $F(x)$.

Систему обслуговування $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ вивчали у [1, 2] (випадок $r \ge 1$ порогів перемикання), а систему типу $\mathrm{M}_{\mathrm{h,m}}^{\theta}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ (випадок $\widetilde{F}(x) = F(x)$) досліджено у праці [3].

Використовуючи метод потенціалу В.С. Королюка [4], ми вивчимо властивості сумісного розподілу періоду зайнятості та кількості замовлень, обслужених за цей період, для систем $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$, $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_1/1$ та $\mathrm{M}_{\mathrm{h,m}}^{\theta}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$.

2. Основні позначення та допоміжні результати. Позначимо через $\mathbf{M}_n$ умовне математичне сподівання за умови, що $\xi(0) = n \ge 0$. Нехай $\eta(x)$ – кількість замовлень, які надійшли в систему на проміжку часу $[0; x)$; a_i^{k*} – k–кратна згортка послідовності a_i. Використовуватимемо такі позначення:

$$\alpha(z) = \sum_{k=1}^{\infty} z^k a_k; \qquad m_i = \int_0^{\infty} x^i dF(x) < \infty, \qquad b_i = \sum_{k=1}^{\infty} k^i a_k < \infty, \quad i = 1,\, 2;$$

$$f(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} dF(x), \qquad \widetilde{f}(s) = \int_0^{\infty} e^{-sx} d\widetilde{F}(x), \qquad \widetilde{m}_1 = \int_0^{\infty} x\, d\widetilde{F}(x) < \infty.$$

Нехай для $i = -1, 0, 1, \ldots$,

$$p_i(s) = \frac{1}{f(s)} \int_0^{\infty} e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x) = i+1\}\, dF(x) = \frac{1}{f(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x).$$

Оскільки $p_i(s) > 0$ для $s > 0$ і $\sum\limits_{i=-1}^{\infty} p_i(s) = 1$, то числа $p_i(s)$, $i \ge 1$, можемо інтерпретувати як розподіл стрибків неперервного знизу випадкового блукання: якщо $a(s, z) = s + \lambda\big(1 - \alpha(z)\big)$, то неважко переконатись, що

$$\sum_{i=-1}^{\infty} z^i p_i(s) = \frac{f(a(s,z))}{z f(s)}\,, \qquad \mathrm{Re}\ s \ge 0, \quad |z| \le 1.$$

Розглянемо послідовність $R_k(s,\theta)$, $s>0$, $|\theta|\le 1$, для якої

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k(s,\theta) = \frac{z}{\theta f(a(s,z))-z}, \qquad |z|<\nu_-(s,\theta),$$

де $\nu_-(s,\theta)$ – єдиний корінь рівняння

$$\theta f(a(s,z))-z=0, \qquad 0<|\theta|\le 1, \quad s\ge 0, \tag{1}$$

на інтервалі $[0;1]$.

Нехай $\rho=\lambda m_1 b_1$. Розглянемо умову (умову Крамера), яка накладає певні обмеження на розподіли a_i $(i\ge 1)$ та $F(x)$: *нехай* $z_0=\sup\{z>0: f\big(\lambda(1-\alpha(z)\big)<\infty\}>1$ *і, якщо* $\rho<1$, *то* $f\big(\lambda(1-\alpha(z_0-0)\big)-z_0>0$.

Наслідком умови Крамера є те [3], що рівняння (1) має на інтервалі $[0,z_0)$ лише два корені $0<\nu_-(s,\theta)<1<\nu_+(s,\theta)<z_0$, для всіх $0<s<\delta$, з деяким достатньо малим $\delta>0$.

3. Період зайнятості та кількість замовлень, обслужених на цьому періоді, для системи $\mathbf{M_h^{\theta}/G_1/1/m}$. Нехай $\tau(m)=\inf\{t\ge 0;\ \xi(t)=0\}$ позначає перший період зайнятості, а $N(\tau(m))$ – кількість замовлень, які обслужили за цей період.

Для системи $\mathrm{M_h^{\theta}/G_1/1/m}$ шукатимемо умовні математичні сподівання

$$\Phi_n(s,\theta)=\mathbf{M}_n\{e^{-s\tau(m)}\theta^{N(\tau(m))}\}, \qquad \mathrm{Re}\, s\ge 0, \quad |\theta|\le 1, \quad 1\le n\le m.$$

Використовуватимемо такі позначення: $\overline{p}_n(s)=\sum\limits_{k=n}^{\infty} p_k(s)$,

$$Q_n(s,\theta)=\big(1-\theta f(s)\big)\sum_{i=1}^{n-1} R_i(s,\theta)+\theta f(s)\sum_{i=1}^{n-1} R_i(s,\theta)\overline{p}_{n-i-1}(s). \tag{2}$$

Теорема 1. *Для системи* $\mathrm{M_h^{\theta}/G_1/1/m}$ *виконуються такі співвідношення:*

$$\begin{gathered}\mathbf{M}_n\{e^{-s\tau(m)}\theta^{N(\tau(m))}\}=\Bigg(1+Q_{h+1-n}(s,\theta)-\theta f(s)\sum_{i=1}^{h-n} R_i(s,\theta)\times\\ \times\Bigg(\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\overline{p}_{m-n-i}(s)+\sum_{j=h}^{m-1} p_{j-n-i}\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{j-h}\Bigg)\Bigg)\Phi_h(s,\theta) \quad (1\le n\le h-1);\\ \mathbf{M}_n\{e^{-s\tau(m)}\theta^{N(\tau(m))}\}=\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{n-h}\Phi_h(s,\theta) \qquad (h+1\le n\le m),\end{gathered} \tag{3}$$

де $\mathrm{Re}\, s\ge 0$,

$$\begin{gathered}\Phi_h(s,\theta)=\Bigg(1+Q_{h+1}(s,\theta)-\theta f(s)\sum_{i=1}^{h} R_i(s,\theta)\times\\ \times\Bigg(\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\overline{p}_{m-i}(s)+\sum_{j=h}^{m-1} p_{j-i}\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{j-h}\Bigg)\Bigg)^{-1}.\end{gathered} \tag{4}$$

Доведення. Очевидно, що $\Phi_0(s,\theta)=1$. Використовуючи формулу повної ймовірності, одержимо

$$\Phi_n(s,\theta)=\theta\sum_{i=0}^{m-n}\Phi_{n+i-1}(s,\theta)\int_0^\infty e^{-sx}\mathbf{P}\{\eta(x)=i\}dF(x)+\Phi_h(s,\theta)\theta^{m+1-h}\times$$
$$\times\int_0^\infty \mathbf{P}\{\eta(x)\geq m+1-n\}\int_0^\infty e^{-s(x+v)}\mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{m-h}\widetilde{\beta}_i\in dv\Big\}dF(x)= \tag{5}$$
$$=\theta f(s)\bigg(\sum_{i=0}^{m-n}\Phi_{n+i-1}(s,\theta)p_{i-1}(s)+\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\overline{p}_{m-n}(s)\Phi_h(s,\theta)\bigg)\quad(1\leq n\leq h);$$

$$\Phi_n(s,\theta)=\Phi_h(s,\theta)\theta^{n-h}\int_0^\infty e^{-s(x+v)}\mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n-h-1}\widetilde{\beta}_i\in dv\Big\}d\widetilde{F}(x)=$$
$$=\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{n-h}\Phi_h(s,\theta)\qquad(h+1\leq n\leq m). \tag{6}$$

Виразивши з (6) всі $\Phi_n(s,\theta)$ для $h+1\leq n\leq m$ і підставивши їх у (5), отримаємо рівняння

$$\Phi_n(s,\theta)-\theta f(s)\sum_{i=-1}^{h-n-1}p_i(s)\Phi_{n+i}(s,\theta)=\theta f(s)\Phi_h(s,\theta)\bigg(\sum_{i=h}^{m-1}p_{i-n}(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{i-h}+$$
$$+\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\overline{p}_{m-n}(s)\bigg)\qquad(1\leq n\leq h). \tag{7}$$

Для розв'язків системи рівнянь (7), використовуючи теорему 1.4 з [3, с. 28] і враховуючи (2), отримаємо зображення

$$\Phi_n(s,\theta)=\bigg(1+Q_{h+1-n}(s,\theta)-\theta f(s)\sum_{i=1}^{h-n}R_i(s,\theta)\times$$
$$\times\bigg(\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\overline{p}_{m-n-i}(s)+\sum_{j=h}^{m-1}p_{j-n-i}\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{j-h}\bigg)\bigg)\Phi_h(s,\theta)\quad(1\leq n\leq h-1). \tag{8}$$

Враховуючи (6), робимо висновок, що співвідношення (3) виконуються. Прийнявши в (8) $n=0$, з граничної умови $\Phi_0(s,\theta)=1$ одержимо (4). Теорему доведено. □

Для системи з необмеженою чергою $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_1/1$, перейшовши до границі при $m\to\infty$ у рівностях (3) і (4), отримаємо таке твердження.

Теорема 2. *Для системи* $\mathrm{M}_{\mathrm{h}}^{\theta}/\mathrm{G}_1/1$ *виконуються такі співвідношення:*

$$\mathbf{M}_n\{e^{-s\tau(\infty)}\theta^{N(\tau(\infty))}\}=\bigg(1+Q_{h+1-n}(s,\theta)-$$
$$-\theta f(s)\sum_{i=1}^{h-n}R_i(s,\theta)\sum_{j=h}^{\infty}p_{j-n-i}\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{j-h}\bigg)\Phi_h(s,\theta)\quad(1\leq n\leq h-1);$$

$$\mathbf{M}_n\{e^{-s\tau(\infty)}\theta^{N(\tau(\infty))}\} = \big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{n-h}\Phi_h(s,\theta) \qquad (n \geq h+1),$$

де $\mathrm{Re}\, s \geq 0$,

$$\Phi_h(s,\theta) = \left(1 + Q_{h+1}(s,\theta) - \theta f(s)\sum_{i=1}^{h} R_i(s,\theta)\sum_{j=h}^{\infty} p_{j-i}\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{j-h}\right)^{-1}.$$

4. Період зайнятості та кількість замовлень, обслужених на цьому періоді, для системи $\mathbf{M^{\theta}_{h,m}/G_1/1/m}$. Для системи $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h,m}}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ шукатимемо умовні математичні сподівання

$$\Phi_n(s,\theta) = \mathbf{M}_n\{e^{-s\tau(m)}\theta^{N(\tau(m))}\}, \qquad \mathrm{Re}\ s \geq 0, \quad |\theta| \leq 1, \quad 1 \leq n \leq m.$$

Використовуватимемо такий визначник:

$$\Delta(s,\theta) = \begin{vmatrix} 1 + \theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\sum\limits_{i=1}^{m-h} R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s) & -1 - Q_{m+1-h}(s,\theta) \\ -\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-i}(s) & 1 + Q_{m+1}(s,\theta) \end{vmatrix}. \tag{9}$$

Теорема 3. *Для системи* $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h,m}}/\mathrm{G}_1/1/\mathrm{m}$ *виконуються такі співвідношення:*

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_n\{e^{-s\tau(m)}\theta^{N(\tau(m))}\} = -\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\Phi_h(s,\theta)\sum_{i=1}^{m-n} R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-n-i}(s) + \\ + \Big(1 + Q_{m+1-n}(s,\theta)\Big)\Phi_m(s,\theta) \quad (1 \leq n \leq m), \end{aligned} \tag{10}$$

де $\mathrm{Re}\, s \geq 0$,

$$\begin{aligned} \Phi_h(s,\theta) &= \frac{1 + Q_{m+1-h}(s,\theta)}{\Delta(s,\theta)}; \\ \Phi_m(s,\theta) &= \frac{1}{\Delta(s,\theta)}\left(1 + \theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\sum_{i=h+1}^{m} R_{i-h}(s,\theta)\overline{p}_{m-i}(s)\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Доведення. Очевидно, що $\Phi_0(s,\theta) = 1$. Використовуючи формулу повної ймовірності, одержимо

$$\begin{aligned} \Phi_n(s,\theta) = \theta f(s)\sum_{i=0}^{m-n}\Phi_{n+i-1}(s,\theta)p_{i-1}(s) + \\ + \theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\overline{p}_{m-n}(s)\Phi_h(s,\theta) \qquad (1 \leq n \leq m). \end{aligned}$$

Записавши цю систему рівнянь у вигляді

$$\begin{aligned} \Phi_n(s,\theta) - \theta f(s)\sum_{i=-1}^{m-n-1} p_i(s)\Phi_{n+i}(s,\theta) = \\ = \theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\overline{p}_{m-n}(s)\Phi_h(s,\theta) \qquad (1 \leq n \leq m), \end{aligned}$$

для її розв'язків за допомогою теореми 1.4 з [3, с. 28] отримаємо зображення

$$\begin{aligned}\Phi_n(s,\theta) = -\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\Phi_h(s,\theta)\sum_{i=1}^{m-n} R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-n-i}(s)+\\ + \Big(1+Q_{m+1-n}(s,\theta)\Big)\Phi_m(s,\theta) \quad (1\le n\le m).\end{aligned} \tag{12}$$

Отже, співвідношення (10) виконуються.

Прийнявши в (12) послідовно $n = h$ і $n = 0$, з урахуванням граничної умови $\Phi_0(s,\theta) = 1$, одержимо систему двох лінійних рівнянь для відшукання $\Phi_h(s,\theta)$ і $\Phi_m(s,\theta)$

$$\begin{aligned}&\Phi_h(s,\theta)\Big(1+\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\sum_{i=1}^{m-h} R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s)\Big)-\\ &-\Big(1+Q_{m+1-h}(s,\theta)\Big)\Phi_m(s,\theta) = 0;\\ &-\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\sum_{i=1}^{m} R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-i}(s)\Phi_h(s,\theta) + \Big(1+Q_{m+1}(s,\theta)\Big)\Phi_m(s,\theta) = 1,\end{aligned}$$

розв'язки якої мають вигляд (11). Теорему доведено. □

5. Гранична теорема для системи $\mathbf{M^{\theta}_{h,m}/G_1/1/m}$. Досліджимо асимптотичні властивості функціоналів $\tau(m), N(\tau(m))$, коли n, h, $m\to\infty$.

Лема 1. *Рівність (9) можна записати у вигляді*

$$\begin{aligned}\Delta(s,\theta) = 1+Q_{m+1}(s,\theta)+\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\Big(R_m(m-h,s,\theta)+\\ +\big(1-\theta f(s)\big)\Delta_m(m-h,s,\theta)\Big),\end{aligned} \tag{13}$$

де

$$R_n(m,s,\theta) = \sum_{i=1}^{m} R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-i}(s) - \sum_{i=1}^{n} R_i(s,\theta)\overline{p}_{n-i}(s);$$

$$\Delta_n(m,s,\theta) = \begin{vmatrix} \sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-i}(s) & -\sum\limits_{i=1}^{m} R_i(s,\theta) \\ -\sum\limits_{i=1}^{n} R_i(s,\theta)\overline{p}_{n-i}(s) & \sum\limits_{i=1}^{n} R_i(s,\theta)\end{vmatrix}.$$

Доведення. Враховуючи рівність (2), з (9) отримаємо

$$\Delta(s,\theta) = 1+Q_{m+1}(s,\theta)+$$

$$+\,\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s) & -1-Q_{m+1-h}(s,\theta)\\ -\sum\limits_{i=1}^{m}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-i}(s) & 1+Q_{m+1}(s,\theta)\end{vmatrix}=$$

$$=1+Q_{m+1}(s,\theta)+$$

$$+\,\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s) & \begin{matrix}-1-\big(1-\theta f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\\ -\theta f(s)\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s)\end{matrix}\\ -\sum\limits_{i=1}^{m}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-i}(s) & \begin{matrix}1+\big(1-\theta f(s)\big)\sum\limits_{i=1}^{m}R_i(s,\theta)\\ +\theta f(s)\sum\limits_{i=1}^{m}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-i}(s)\end{matrix}\end{vmatrix}=$$

$$=1+Q_{m+1}(s,\theta)+\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\left(\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s)-\sum_{i=1}^{m}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-i}(s)\right)+$$

$$+\,\big(1-\theta f(s)\big)\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\begin{vmatrix}\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s) & -\sum\limits_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\\ -\sum\limits_{i=1}^{m}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-i}(s) & \sum\limits_{i=1}^{m}R_i(s,\theta)\end{vmatrix},$$

що рівносильно (13). Лему доведено. □

Лема 2. *Співвідношення (10) можна записати у вигляді*

$$\mathbf{M}_n\{e^{-s\tau(m)}\theta^{N(\tau(m))}\}=\frac{1}{\Delta(s,\theta)}\bigg(1+Q_{m+1-n}(s,\theta)+$$
$$+\,\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\Big(\big(1-\theta f(s)\big)\Delta_{m-n}(m-h,s,\theta)+R_{m-n}(m-h,s,\theta)\Big)\bigg). \tag{14}$$

Доведення. Враховуючи (10), (11), отримаємо

$$\mathbf{M}_n\{e^{-s\tau(m)}\theta^{N(\tau(m))}\}=\frac{1}{\Delta(s,\theta)}\bigg(\Big(1+Q_{m+1-n}(s,\theta)\Big)\Big(1+\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\times$$
$$\times\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s)\Big)-\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\times \tag{15}$$
$$\times\Big(1+Q_{m+1-h}(s,\theta)\Big)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-n-i}(s)\bigg).$$

За допомогою рівності (2) одержуємо

$$\big(1+Q_{m+1-n}(s,\theta)\big)\Big(1+\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s)\Big)-$$

$$-\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\Big(1+Q_{m-h}(s,\theta)\Big)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-n-i}(s)=$$

$$=\Big(1+\big(1-\theta f(s)\big)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)+\theta f(s)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-n-i}(s)\Big)\times$$

$$\times\Big(1+\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s)\Big)-$$

$$-\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\Big(1+\big(1-\theta f(s)\big)\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)+\theta f(s)\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s)\Big)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-n-i}(s)=$$

$$=1+\big(1-\theta f(s)\big)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)+\theta f(s)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-n-i}(s)+$$

$$+\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\Big[\Big(1+\big(1-\theta f(s)\big)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)+$$

$$+\theta f(s)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-n-i}(s)\Big)\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s)-$$

$$-\Big(1+\big(1-\theta f(s)\big)\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)+\theta f(s)\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s)\Big)\times$$

$$\times\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-n-i}(s)\Big]=1+Q_{m+1-n}(s,\theta)+$$

$$+\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\Big[\big(1-\theta f(s)\big)\Big(\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)-$$

$$-\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-n-i}(s)\Big)+\sum_{i=1}^{m-h}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-h-i}(s)-$$

$$-\sum_{i=1}^{m-n}R_i(s,\theta)\overline{p}_{m-n-i}(s)\Big]=1+Q_{m+1-n}(s,\theta)+$$

$$+\theta f(s)\big(\theta\widetilde{f}(s)\big)^{m-h}\Big[\big(1-\theta f(s)\big)\Delta_{m-n}(m-h,s,\theta)+R_{m-n}(m-h,s,\theta)\Big].$$

Звідси, а також зі співвідношень (15) отримуємо (14). Лему доведено. □

Тепер ми можемо перейти до вивчення асимптотичної поведінки розподілів функціоналів $\tau(m)$, $N(\tau(m))$.

Теорема 4. *Нехай виконується умова Крамера для розподілів a_i $(i \geq 1)$ та $F(x)$ і нехай $h = \alpha m$, $n = \beta m$, де $0 \leq \alpha$, $\beta \leq 1$, і $\mu \geq 0$.*

1) Якщо $\rho = \lambda m_1 b_1 < 1$, то

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{M}_{\beta m}\left\{ e^{-\dfrac{s\tau(m)+\mu N(\tau(m))}{m}} \right\} = e^{-\dfrac{\beta(sm_1+\mu)}{1-\rho}}. \tag{16}$$

2) Якщо $\rho = 1$, то

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{M}_{\beta m}\left\{ e^{-\dfrac{s\tau(m)+\mu N(\tau(m))}{m^2}} \right\} = \frac{\mathrm{sh}\{q(s,\mu)(1-\beta)\} - \mathrm{sh}\{(\alpha-\beta)q(s,\mu)\}}{\mathrm{sh}\{q(s,\mu)\} - \mathrm{sh}\{\alpha q(s,\mu)\}}, \tag{17}$$

де

$$q(s,\mu) = \sqrt{\frac{2(sm_1+\mu)}{m_1\lambda b_2 + (\lambda b_1)^2 m_2}}.$$

Доведення. 1) Нехай $\rho < 1$. Введемо позначення: $\hat{s} = s/m$, $\hat{\theta} = \exp\{-\mu/m\}$, де s, $\mu \geq 0$ – деякі фіксовані числа. Тоді формулу (14) можемо записати так:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{\beta m}\left\{ e^{-\dfrac{s\tau(m)+\mu N(\tau(m))}{m}} \right\} &= \frac{1}{\Delta(\hat{s},\hat{\theta})}\Big(1+Q_{m(1-\beta)+1}(\hat{s},\hat{\theta})+ \\ &+ \hat{\theta} f(\hat{s})\big(\hat{\theta}\widetilde{f}(\hat{s})\big)^{(1-\alpha)m}\Big(\big(1-\hat{\theta}f(\hat{s})\big)\Delta_{(1-\beta)m}\big((1-\alpha)m,\hat{s},\hat{\theta}\big)+ \\ &+ R_{(1-\beta)m}\big((1-\alpha)m,\hat{s},\hat{\theta}\big)\Big)\Big), \end{aligned} \tag{18}$$

де

$$\begin{aligned} \Delta(\hat{s},\hat{\theta}) = 1 + Q_{m+1}(\hat{s},\hat{\theta}) + \hat{\theta} f(\hat{s})\big(\hat{\theta}\widetilde{f}(\hat{s})\big)^{(1-\alpha)m}\Big(R_m\big((1-\alpha)m,\hat{s},\hat{\theta}\big)+ \\ + \big(1-\hat{\theta}f(\hat{s})\big)\Delta_m\big((1-\alpha)m,\hat{s},\hat{\theta}\big)\Big). \end{aligned}$$

Оскільки $\hat{\theta} = 1 - \frac{\mu}{s}\hat{s} + o(\hat{s})$, якщо $\hat{s} \to 0$, то

$$\begin{aligned} \hat{\theta} f(\hat{s})\big(\hat{\theta}\widetilde{f}(\hat{s})\big)^{(1-\alpha)m} &= \Big(1-\frac{\mu}{m}+o\big(m^{-1}\big)\Big)^{1+m(1-\alpha)}\Big(1-\frac{m_1 s}{m}+o\big(m^{-1}\big)\Big)\times \\ \times\Big(1-\frac{\widetilde{m}_1 s}{m}+o\big(m^{-1}\big)\Big)^{m(1-\alpha)} &= \Big(1-\frac{\mu+m_1 s}{m}+o\big(m^{-1}\big)\Big)\times \\ \times\Big(1-\frac{\mu+\widetilde{m}_1 s}{m}+o\big(m^{-1}\big)\Big)^{m(1-\alpha)} &\xrightarrow[m\to\infty]{} e^{-(1-\alpha)(s\widetilde{m}_1+\mu)}. \end{aligned} \tag{19}$$

У доведенні теореми 3.5 [3, с. 124] виведено оцінку

$$\big(1-\hat{\theta}f(\hat{s})\big)\Delta_{(1-\beta)m}((1-\alpha)m,\hat{s},\hat{\theta}) + R_{(1-\beta)m}((1-\alpha)m,\hat{s},\hat{\theta}) = o\big((1+\varepsilon)^{-m}\big) \tag{20}$$

для деякого $\varepsilon > 0$. У цьому співвідношенні ε, взагалі кажучи, залежить від α, β, але очевидно, що його можна вибрати таким, що $\varepsilon > 0$ для всіх α, β.

Враховуючи (19) і оцінку (20), можемо записати зображення (18) у вигляді

$$\mathbf{M}_{\beta m}\left\{e^{-\dfrac{s\tau(m)+\mu N(\tau(m))}{m}}\right\} = \frac{1+Q_{m(1-\beta)+1}(\hat{s},\hat{\theta})+o\big((1+\varepsilon)^{-m}\big)}{1+Q_{m+1}(\hat{s},\hat{\theta})+o\big((1+\varepsilon)^{-m}\big)}. \qquad (21)$$

Так само як у [3, с. 125] можна довести, що

$$1+Q_{m(1-\beta)+1}(\hat{s},\hat{\theta}) \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{1-\rho}\, e^{\dfrac{sm_1+\mu}{1-\rho}(1-\beta)};$$

$$1+Q_{m+1}(\hat{s},\hat{\theta}) \xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{1}{1-\rho}\, e^{\dfrac{sm_1+\mu}{1-\rho}}.$$

За допомогою цих співвідношень з формули (21) отримуємо (16).

2) Нехай $\rho = 1$. Приймемо: $\hat{s} = s/m^2$, $\hat{\theta} = \exp\{-\mu/m^2\}$, де s, $\mu \geq 0$ – деякі фіксовані числа. Запишемо формулу (14) так:

$$\begin{aligned}&\mathbf{M}_{\beta m}\left\{e^{-\dfrac{s\tau(m)+\mu N(\tau(m))}{m^2}}\right\} = \frac{1}{\Delta(\hat{s},\hat{\theta})}\Big(1+Q_{m(1-\beta)+1}(\hat{s},\hat{\theta})+\\ &+\hat{\theta}f(\hat{s})\big(\hat{\theta}\widetilde{f}(\hat{s})\big)^{(1-\alpha)m}\Big(\big(1-\hat{\theta}f(\hat{s})\big)\Delta_{(1-\beta)m}\big((1-\alpha)m,\hat{s},\hat{\theta}\big)+\\ &+R_{(1-\beta)m}\big((1-\alpha)m,\hat{s},\hat{\theta}\big)\Big)\Big).\end{aligned} \qquad (22)$$

Тепер $\hat{\theta} = e^{-\mu/m^2} = 1-\mu/m^2+o(m^{-2}) = 1-\frac{\mu}{s}\hat{s}+o(\hat{s})$, тому замість (19) одержимо

$$\begin{aligned}\hat{\theta}f(\hat{s})\big(\hat{\theta}\widetilde{f}(\hat{s})\big)^{(1-\alpha)m} &= \Big(1-\frac{\mu+m_1s}{m^2}+o\big(m^{-1}\big)\Big)\times\\ &\times\Big(1-\frac{\mu+\widetilde{m}_1s}{m^2}+o\big(m^{-1}\big)\Big)^{m(1-\alpha)} \xrightarrow[m\to\infty]{} 1.\end{aligned} \qquad (23)$$

У [3, с. 127] отримано оцінки

$$\begin{aligned}&\big(1-\hat{\theta}f(\hat{s})\big)\Delta_{(1-\beta)m}((1-\alpha)m,\hat{s},\hat{\theta})+R_{(1-\beta)m}((1-\alpha)m,\hat{s},\hat{\theta}) =\\ &= -q_1(s,\mu)\big(e^{-(\beta-\alpha)q(s,\mu)}-e^{(\beta-\alpha)q(s,\mu)}\big)m+o(m);\\ &1+Q_{m(1-\beta)+1}(\hat{s},\hat{\theta}) = q_1(s,\mu)(e^{q(s,\mu)(1-\beta)}-e^{-q(s,\mu)(1-\beta)})m+o(m);\\ &1+Q_{m+1}(\hat{s},\hat{\theta}) = q_1(s,\mu)(e^{q(s,\mu)}-e^{-q(s,\mu)})m+o(m),\end{aligned} \qquad (24)$$

де

$$q_1(s,\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\big(m_1\lambda b_2+(\lambda b_1)^2m_2\big)(m_1s+\mu)}}.$$

Враховуючи співвідношення (23), (24), з (22) одержимо

$$\mathbf{M}_{\beta m}\left\{e^{-\dfrac{s\tau(m)+\mu N(\tau(m))}{m^2}}\right\} =$$
$$= \frac{q_1(s,\mu)(e^{q(s,\mu)(1-\beta)}-e^{-q(s,\mu)(1-\beta)})m - q_1(s,\mu)\big(e^{-(\beta-\alpha)q(s,\mu)}-e^{(\beta-\alpha)q(s,\mu)}\big)m+o(m)}{q_1(s,\mu)(e^{q(s,\mu)}-e^{-q(s,\mu)})m - q_1(s,\mu)\big(e^{\alpha q(s,\mu)}-e^{-\alpha q(s,\mu)}\big)m+o(m)}$$
$$\xrightarrow[m\to\infty]{} \frac{e^{q(s,\mu)(1-\beta)}-e^{-q(s,\mu)(1-\beta)}-e^{-(\beta-\alpha)q(s,\mu)}+e^{(\beta-\alpha)q(s,\mu)}}{e^{q(s,\mu)}-e^{-q(s,\mu)}-e^{\alpha q(s,\mu)}+e^{-\alpha q(s,\mu)}},$$

що рівносильно (17). Теорему доведено. □

Список використаної літератури

1. *Жерновый К.Ю.* Исследование системы $M^\theta/G/1/m$ с переключениями режимов обслуживания и пороговой блокировкой потока заявок / *Жерновый К.Ю.* // Информационные процессы. – 2010. – Т. 10, №2. – С. 159-180.
2. *Жерновый К.Ю.* Стационарные характеристики системы $M^\theta/G/1/m$ с пороговой стратегией функционирования / *Жерновый К.Ю.* // Информационные процессы. – 2011. – Т. 11, №2. – С. 179-195.
3. *Братійчук А.М.* Дослідження систем обслуговування з обмеженою чергою. / *Братійчук А.М.* Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – К., 2008.
4. *Королюк В.С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов / *Королюк В.С.* – К., 1975.

Стаття: надійшла до редакції 27.05.2011
прийнята до друку 14.12.2011

BUSY PERIOD AND THE NUMBER OF SERVED CUSTOMERS FOR $M^\theta/G/1/m$ QUEUES WITH THRESHOLD STRATEGIES OF FUNCTIONING

Kostyantyn ZHERNOVYI

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, 79000, Lviv,
e-mail: k_ zhernovyi@yahoo.com

The $M^\theta/G/1/m$ queues with threshold blocking of an input flow and with regenerative level of an input flow in which on the blocking period changes intensity of service are studied. For each of queues the joint distribution of busy time and the number of served customers on the busy period are investigated.

Key words: the $M^\theta/G/1/m$ queues, blocking of an input flow, switching of modes of service, the distribution of busy time and the number of served customers on the busy period.

ПЕРИОД ЗАНЯТОСТИ И КОЛИЧЕСТВО ОБСЛУЖЕННЫХ ЗАЯВОК ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА $M^\theta/G/1/m$ С ПОРОГОВЫМИ СТРАТЕГИЯМИ ФУНКЦИОНИРОВАНИЯ

Константин ЖЕРНОВЫЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, 79000, Львов
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

Изучено системы обслуживания $M^\theta/G/1/m$ с пороговой блокировкой входного потока и с восстанавливающим уровнем потока заявок, в которых на период блокировки изменяется интенсивность обслуживания. Для каждой из систем исследовано совместное распределение периода занятости и количества заявок, обслуженных за этот период.

Ключевые слова: система M/M/1/m, блокировка входного потока, переключение режимов обслуживания, распределение периода занятости и количества заявок, обслуженных за этот период.