ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 97–105
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 97–105

УДК 517.537.72

БАГАТОЧЛЕННА ПОКАЗНИКОВО-СТЕПЕНЕВА АСИМПТОТИКА ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Микола ГРИЦІВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Знайдено умови на коефіцієнти цілого ряду Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{(\sigma+it)\lambda_n},$$

за яких логарифм його максимального члена має багаточленну показниково-степеневу асимптотику $\ln\mu(\sigma, F) = Te^{\varrho\sigma} + \sum\limits_{j=1}^{m} T_j\sigma^{p_j} + (\tau + o(1))\sigma^p$ при $\sigma \to +\infty$, де $T > 0$, $\varrho > 0$, $T_j \in R\backslash\{0\}$, $\tau \in R\backslash\{0\}$ і $0 < p < p_m < \ldots < p_1$. Зазначимо також умову на λ_n, за якої логарифми максимуму модуля $M(\sigma, F)$ і максимального члена $\mu(\sigma, F)$ мають ту саму багаточленну показниково-степеневу асимтотику.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимум модуля, максимальний член, багаточленна показниково-степенева асимтотика.

1. Вступ. Нехай $\Lambda = (\lambda_n)$ – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел ($\lambda_0 = 0$), а $S(\Lambda)$ – клас цілих рядів Діріхле

$$F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{s\lambda_n}, \quad s = \sigma + it. \tag{1}$$

Приймемо $M(\sigma, F) = \sup\{|F(\sigma + it)| : t \in R\}$, і нехай $\mu(\sigma, F) = \max\{|a_n| \exp(\sigma\lambda_n) : n \geqslant 0\}$ – максимальний член ряду, $\nu(\sigma, F) = \max\{n : \mu(\sigma, F) = |a_n| \exp(\sigma\lambda_n)\}$ – його центральний індекс, а $n(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} 1$ – лічильна функція послідовності (λ_n). Зростання ряду (1) ототожнюється зі зростанням функції $\ln M(\sigma, F)$, а знаходження зв'язку між зростанням $\ln M(\sigma, F)$ при $\sigma \to +\infty$ і спаданням коефіцієнтів a_n ряду (1) відбувається у два етапи. Спочатку вивчають зв'язок між зростанням $\ln\mu(\sigma, F)$ ряду (1) і спаданням коефіцієнтів a_n, а потім досліджують умови на показники λ_n, за яких $\ln M(\sigma, F)$ і $\ln\mu(\sigma, F)$ однаково зростають в тій чи іншій шкалі зростання. Цим проблемам присвячено численні праці львівських математиків М.М. Шеремети, О.Б. Скасківа, П.В. Філевича та ін. Вивчення зв'язку між зростанням $M(\sigma, F)$ і спаданням a_n у термінах неодночленних асимптотик започаткував М.М. Шеремета [1-2], який розглянув випадок двочленної показникової асимптотики. На випадок багаточленної показникової асимптотики результати М.М. Шеремети розповсюджено в [3-4]. О.М. Сумик [5], узагальнюючи один результат Р.І. Тарасюка [6], знайшла зв'язок між зростанням $\mu(\sigma, F)$ і спаданням a_n в термінах двочленної степеневої асимптотики. На випадок тричленної степеневої асимптотики цей результат перенесено в [7]. О.М. Сумик [3] дослідила зв'язок між зростанням $\mu(\sigma, F)$ і спаданням a_n у термінах двочленної показниково-степеневої асимптотики. Вона довела, що для того, щоб $\ln \mu(\sigma, F) = Te^{\varrho\sigma} + (\tau + o(1))\sigma^p$ при $\sigma \to +\infty$, де $0 < T < +\infty$, $0 < \varrho < +\infty$, $1 < p < +\infty$ і $\tau \in R$, необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$: 1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що $\ln |a_n| \leqslant -\frac{\lambda_n}{\varrho} \ln \frac{\lambda_n}{eT\varrho} + \frac{\tau+\varepsilon}{\varrho^p} \ln^p \lambda_n$ для всіх $n \geqslant n_0$; 2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $\ln |a_{n_k}| \geqslant -\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho} \ln \frac{\lambda_{n_k}}{eT\varrho} + \frac{\tau-\varepsilon}{\varrho^p} \ln^p \lambda_{n_k}$ і $\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o(\sqrt{\lambda_{n_k} \ln^p \lambda_{n_k}})$, $k \to +\infty$. Тут ми знайдемо умови, за яких

$$\ln \mu(\sigma, F) = Te^{\varrho\sigma} + \sum_{j=1}^{m} T_j \sigma^{p_j} + (\tau + o(1))\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty, \tag{2}$$

де $T > 0$, $\varrho > 0$, $T_j \in R\backslash\{0\}$, $\tau \in R\backslash\{0\}$ і $0 < p < p_m < \ldots < p_1$. Правильна така теорема.

Теорема 1. *Для того, щоб $\ln \mu(\sigma)$ мав багаточленну показниково-степеневу асимптотику (2), необхідно і достатньо, щоб для будь-якого $\varepsilon > 0$:*

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geqslant n_0$

$$\ln |a_n| \leqslant -\frac{\lambda_n}{\varrho} \ln \frac{\lambda_n}{eT\varrho} + \sum_{j=1}^{m} T_j \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{\lambda_n}{T\varrho}\right)^{p_j} + (\tau + \varepsilon) \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{\lambda_n}{T\varrho}\right)^p; \tag{3}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln |a_{n_k}| \geqslant -\frac{\lambda_{n_k}}{\varrho} \ln \frac{\lambda_{n_k}}{eT\varrho} + \sum_{j=1}^{m} T_j \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{\lambda_{n_k}}{T\varrho}\right)^{p_j} + (\tau - \varepsilon) \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{\lambda_{n_k}}{T\varrho}\right)^p; \tag{4}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\left(\sqrt{\lambda_{n_k} \ln^p \lambda_{n_k}}\right) \quad (k \to +\infty). \tag{5}$$

З умови, за якої в (2) $\ln \mu(\sigma, F)$ можна замінити на $\ln M(\sigma, F)$, випливає така теорема.

Теорема 2. *Якщо*

$$\ln n(t) = o(\ln^p t), \quad t \to +\infty, \tag{6}$$

то співвідношення (2) рівносильне співвідношенню

$$\ln M(\sigma, F) = Te^{\varrho\sigma} + \sum_{j=1}^{m} T_j \sigma^{p_j} + (\tau + o(1))\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty. \tag{7}$$

2. Допоміжні результати. У доведенні теореми 1 будемо використовувати результати статей [8-10]. Через $\Omega(\infty)$ позначимо клас додатних необмежених на

$(-\infty, +\infty)$ функцій Φ таких, що похідна $\Phi^{'}$ є неперервною, додатною і зростаючою до $+\infty$ на $(-\infty, +\infty)$. Нехай φ – функція, обернена до $\Phi^{'}$, а $\Psi(\sigma) = \sigma - \frac{\Phi(\sigma)}{\Phi^{'}(\sigma)}$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Лема 1. [9, 10] *Якщо ряд (1) цілий і $\Phi \in \Omega(\infty)$, то для того, щоб $\ln\mu(\sigma) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \geqslant \sigma_0$, необхідно і достатньо, щоб $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant n_0$.*

Для $\Phi \in \Omega(\infty)$ і чисел $0 < a < b < +\infty$ приймемо

$$G_1(a, b, \Phi) = \frac{ab}{b-a}\int\limits_a^b \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt,\ G_2(a, b, \Phi) = \Phi\left(\frac{1}{b-a}\int\limits_a^b \varphi(t)dt\right).$$

Лема 2. [8, 10] *Нехай $\Phi \in \Omega(\infty)$. Для кожних $0 < a < b < +\infty$ виконується нерівність $G_1(a, b, \Phi) < G_2(a, b, \Phi)$.*

Лема 3. [10] *Нехай $\Phi \in \Omega(\infty)$ і $\ln|a_{n_k}| \geqslant -\lambda_{n_k}\Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$ для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел. Тоді для всіх $\sigma \in [\varphi(\lambda_{n_k}), \varphi(\lambda_{n_k+1})]$ і всіх $k \geqslant k_0$ правильна нерівність $\ln\mu(\sigma) \geqslant \Phi(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi) - G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi))$.*

Лема 4. [10] *Нехай $\Phi_1 \in \Omega(\infty)$, $\Phi_2 \in \Omega(\infty)$ і $\Phi_1(\sigma) \leqslant \ln\mu(\sigma) \leqslant \Phi_2(\sigma)$ для всіх $\sigma \geqslant \sigma_0$. Тоді $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n))$ $(n \geqslant n_0)$ та існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що $\ln|a_{n_k}| \geqslant -\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k}))$ і*

$$G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \geqslant \Phi_1\left(\frac{1}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}\int\limits_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}} \varphi_2(t)dt\right),$$

де Ψ_j і φ_j відповідають Φ_j.

Припустимо, що функція $\Phi \in \Omega$ така, що для всіх $\sigma \geqslant \sigma_0$

$$\Phi(\sigma) = Te^{\varrho\sigma} + \sum_{j=1}^m T_j\sigma^{p_j} + \tau\sigma^p. \tag{8}$$

Тут ϱ, p, p_j, T, T_j, τ такі, як у співвідношенні (2). З лем 1-4 видно, що важливу роль відіграє обернена до Φ' функція φ, асимптотику якої описує лема.

Лема 5. *Якщо функція $\Phi \in \Omega(\infty)$ така, що виконується (8), то для функції φ при $x \to +\infty$ правильна така асимптотична рівність:*

$$\varphi(x) = \frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho} - \sum_{j=1}^m \frac{T_jp_j}{\varrho x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p_j-1} - \frac{\tau p(1+o(1))}{\varrho x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p-1}. \tag{9}$$

Доведення. Оскільки $\Phi^{'}(\sigma) = T\varrho e^{\varrho\sigma} + \sum_{j=1}^m T_jp_j\sigma^{p_j-1} + \tau p\sigma^{p-1}$, то для того, щоб знайти асимптотику функції φ, треба розв'язати рівняння

$$T\varrho e^{\varrho\sigma} + \sum_{j=1}^m T_jp_j\sigma^{p_j-1} + \tau p\sigma^{p-1} = x. \tag{10}$$

Звідси бачимо, що розв'язок $\sigma = \sigma(x)$ цього рівняння задовольняє умову $T\varrho\exp\{\varrho\sigma\}(1+o(1)) = x$, $x \to +\infty$, тобто

$$\sigma = \frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho} - \alpha, \tag{11}$$

де $\alpha = \alpha(x) \to 0$ при $x \to +\infty$. Підставивши (11) у (10), отримаємо

$$xe^{-\varrho\alpha} + \sum_{j=1}^{m} T_j p_j \left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho} - \alpha\right)^{p_j-1} + \tau p\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho} - \alpha\right)^{p-1} = x,$$

тобто

$$e^{-\varrho\alpha} + \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j p_j}{x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p_j-1}\left(1 - \frac{\alpha\varrho}{\ln\frac{x}{T\varrho}}\right)^{p_j-1} +$$
$$+\frac{\tau p}{x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p-1}\left(1 - \frac{\alpha\varrho}{\ln\frac{x}{T\varrho}}\right)^{p-1} = 1,$$

звідки

$$1 - \varrho\alpha + \frac{\varrho^2\alpha^2}{2} + O(\alpha^3) + \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j p_j}{x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p_j-1}\left(1 - \frac{\alpha\varrho(p_j-1)}{\ln\frac{x}{T\varrho}} + O\left(\frac{\alpha^2}{\ln x^2}\right)\right) +$$
$$+\frac{\tau p}{x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p-1}(1+o(1)) = 1, \quad x \to +\infty,$$

і отже,

$$\alpha = \frac{\varrho\alpha^2}{2} + O(\alpha^3) + \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j p_j}{\varrho x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p_j-1} - \sum_{j=1}^{m}\left(\frac{T_j p_j(p_j-1)\alpha}{x\ln\frac{x}{T\varrho}}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p_j-1} +\right.$$
$$\left. + O\left(\frac{\alpha^2(\ln x)^{p_j-3}}{x}\right)\right) + \frac{\tau p(1+o(1))}{\varrho x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p-1} = 1, \quad x \to +\infty. \tag{12}$$

З (12) випливає, що

$$\alpha(x) = (1+o(1))\sum_{j=1}^{m} \frac{T_j p_j}{\varrho x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p_j-1}, \quad x \to +\infty. \tag{13}$$

Отже, підставивши (13) в (12), одержимо

$$\alpha(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j p_j}{\varrho x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p_j-1} + \frac{\varrho}{2}(1+o(1))\left(\sum_{j=1}^{m} \frac{T_j p_j}{\varrho x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p_j-1}\right)^2 -$$
$$-(1+o(1))\sum_{j=1}^{m} \frac{T_j p_j(p_j-1)}{x\ln\frac{x}{T\varrho}}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p_j-1}\sum_{j=1}^{m} \frac{T_j p_j}{\varrho x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p_j-1} + O\left(\frac{\ln x^{3(p_j-1)}}{x^3}\right) +$$
$$+\frac{\tau p(1+o(1))}{\varrho x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p-1} =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j p_j}{\varrho x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p_j-1} + O\left(\frac{\ln x^{2(p_1-1)}}{x^2}\right) + \frac{\tau p(1+o(1))}{\varrho x}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{x}{T\varrho}\right)^{p-1} =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j p_j}{\varrho x} \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{x}{T\varrho} \right)^{p_j - 1} + \frac{\tau p(1 + o(1))}{\varrho x} \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{x}{T\varrho} \right)^{p-1}, \quad x \to +\infty,$$

і, враховуючи (11), отримаємо (9). Лему доведено. □

З (9) випливає, що

$$\int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt = \frac{x}{\varrho} \ln \frac{x}{eT\varrho} - \sum_{j=1}^{m} T_j \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{x}{T\varrho} \right)^{p_j} - \tau(1 + o(1)) \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{x}{T\varrho} \right)^{p}, \quad x \to +\infty, \quad (14)$$

оскільки $x\Psi(\varphi(x)) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t)dt + const$, то така ж асимптотична рівність правильна і для $x\Psi(\varphi(x))$.

Якщо (t_n) – додатна зростаюча до $+\infty$ послідовність і $t_{n+1} = (1 + \theta_n)t_n$, то інтегруванням частинами одержимо

$$G_1(t_n, t_{n+1}, \Phi) = \frac{t_n t_{n+1}}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2} dt = \frac{(1 + \theta_n)t_n}{\theta_n} \Psi(\varphi(t)) \Big|_{t_n}^{(1+\theta_n)t_n}.$$

Тому, використовуючи (14), можна довести таку лему.

Лема 6. *Якщо* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, \theta_n = +\infty$, *то для відповідної послідовності* (n_j)

$$G_1(t_{n_j}, t_{n_j}(1 + \theta_{n_j}), \Phi) = (1 + o(1)) \frac{t_{n_j}}{\varrho} \ln \theta_{n_j}, \quad j \to \infty. \quad (15)$$

Якщо ж $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\, \theta_n = \theta \in (0, +\infty)$, *то для відповідної послідовності* (n_j)

$$G_1(t_{n_j}, t_{n_j}(1 + \theta_{n_j}), \Phi) = (1 + o(1)) \frac{(1 + \theta)t_{n_j}}{\varrho\theta} \ln(1 + \theta), \quad j \to \infty. \quad (16)$$

Нарешті, якщо $\theta_n \to 0 (n \to +\infty)$, *то*

$$G_1(t_n, t_n(1 + \theta_n), \Phi) = \frac{t_n}{\varrho}(1 + \theta_n) \left(1 - \frac{\theta_n}{2} + \frac{\theta_n^2}{3} + O(\theta_n^3) \right) + \sum_{j=1}^{m} T_j \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{t_n}{T\varrho} \right)^{p_j} -$$

$$- \sum_{j=1}^{m} \frac{T_j p_j}{\varrho} \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{t_n}{T\varrho} \right)^{p_j - 1} + \sum_{j=1}^{m} T_j p_j \frac{\theta_n}{2\varrho} \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{t_n}{T\varrho} \right)^{p_j - 1} - \quad (17)$$

$$- \sum_{j=1}^{m} T_j p_j (1 - p_j) \frac{\theta_n}{2\varrho^2} \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{t_n}{T\varrho} \right)^{p_j - 2} + (1 + o(1)\tau \left(\frac{1}{\varrho} \ln \frac{t_n}{T\varrho} \right)^{p} + O(\theta_2 \ln^{p_1 - 1} t_n), \quad n \to \infty.$$

Оскільки $G_2(t_n, t_{n+1}, \Phi) = \Phi(\kappa(t_n, t_{n+1}))$, де $\kappa(t_n, t_{n+1}) = \frac{1}{t_{n+1} - t_n} \int_{t_n}^{t_{n+1}} \varphi(t)dt$, то, використовуючи (14), можна знайти асимптотику $\kappa(t_n, (1 + \theta_n)t_n)$, а потім і асимптотику $G_2(t_n, t_n(1 + \theta_n), \Phi)$. Знаходження цієї асимптотики виконують елементарними методами, а з огляду на громіздкість викладення ми його опустимо. У підсумку отримаємо таку лему.

Лема 7. *Якщо* $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\theta_n=+\infty$, *то для відповідної послідовності* (n_j)

$$G_2(t_{n_j},t_{n_j}(1+\theta_{n_j}),\Phi)=(1+o(1))T\exp\left\{\ln\frac{t_{n_j}}{eT\varrho}+\ln\theta_{n_j}\right\},\quad j\to\infty. \tag{18}$$

Якщо ж $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\theta_n=\theta\in(0,+\infty)$, *то для відповідної послідовності* (n_j)

$$G_2(t_{n_j},t_{n_j}(1+\theta_{n_j}),\Phi)=(1+o(1))\frac{t_{n_j}}{e\varrho}\exp\left\{\frac{(1+\theta)\ln(1+\theta)}{\theta}\right\},\quad j\to\infty. \tag{19}$$

Нарешті, якщо $\theta_n\to0(n\to+\infty)$, *то*

$$G_2(t_n,t_n(1+\theta_n),\Phi)=\frac{t_n}{\varrho}(1+\theta_n)\left(1+\frac{\theta_n}{2}-\frac{\theta_n^2}{24}+O(\theta_n^3)\right)-\sum_{j=1}^{m}T_j\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{t_n}{T\varrho}\right)^{p_j}+$$

$$+\sum_{j=1}^{m}\frac{T_jp_j}{\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{t_n}{T\varrho}\right)^{p_j-1}+\sum_{j=1}^{m}T_jp_j\frac{\theta_n}{2\varrho}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{t_n}{T\varrho}\right)^{p_j-1}+O\left(\frac{\ln^{2(p_1-1)}t_n}{t_n}\right)+ \tag{20}$$

$$+\sum_{j=1}^{m}T_jp_j(1-p_j)\frac{\theta_n}{2\varrho^2}\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{t_n}{T\varrho}\right)^{p_j-2}+(1+o(1)\tau\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{t_n}{T\varrho}\right)^{p}+O(\theta_2\ln^{p_1-1}t_n),\quad n\to\infty.$$

З асимптотичних рівностей (17) і (20) випливає таке твердження.

Лема 8. *Якщо* $\theta_n\to0(n\to+\infty)$, *то*

$$G_2(t_n,t_n(1+\theta_n),\Phi)-G_1(t_n,t_n(1+\theta_n),\Phi)=\frac{t_n\theta_n^2}{8\varrho}(1+o(1))+o(\ln^p t_n),\quad n\to\infty. \tag{21}$$

Нам буде потрібна також і така лема.

Лема 9. *Нехай функції* $\Phi_1\in\Omega(\infty)$ *і* $\Phi_2\in\Omega(\infty)$ *такі, що при* $\sigma\geq\sigma_0$

$$\Phi_1(\sigma)=Te^{\varrho\sigma}+\sum_{j=1}^{m}T_j\sigma^{p_j}+\tau_1\sigma^p\quad і\quad \Phi_2(\sigma)=Te^{\varrho\sigma}+\sum_{j=1}^{m}T_j\sigma^{p_j}+\tau_2\sigma^p,$$

де $\tau_2>\tau_1$. *Припустимо, що* $t_{n+1}=(1+\theta_n)t_n$ *і*

$$G_1(t_n,t_n(1+\theta_n),\Phi_2)\geqslant\Phi_1(\kappa(t_n,(1+\theta_n)t_n,\Phi_2)). \tag{22}$$

Тоді $\theta_n\to0$ $(n\to+\infty)$ *і*

$$\theta_n^2\leqslant\frac{8\varrho}{t_n}(1+o(1))(\tau_2-\tau_1)\ln^p t_n,\quad n\to+\infty. \tag{23}$$

Доведення. Припустимо, що $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\theta_n=+\infty$. Оскільки $\Phi_1(\kappa(t_n,(1+\theta_n)t_n),\Phi_2)=$ $=(1+o(1))\Phi_2(\kappa(t_n,(1+\theta_n)t_n),\Phi_2)=G_2(t_n,t_n(1+\theta_n),\Phi_2)(1+o(1))$, $n\to+\infty$, то з (15) і (18) для відповідної послідовності (n_j) легко отримуємо асимптотичну нерівність $\ln\theta_{n_j}\geqslant(1+o(1))\frac{\theta_{n_j}}{e}$ $(j\to\infty)$, що неможливо.

Якщо б $\overline{\lim\limits_{n\to+\infty}}\theta_n=\theta$, то з (16) і (19) випливала б нерівність $\frac{(1+\theta)\ln(1+\theta)}{\theta}\geqslant$ $\geqslant\exp\{\frac{(1+\theta)\ln(1+\theta)}{\theta}-1\}$, яка є неможливою для $\theta>0$. Отже, $\theta_n\to0$ $(n\to+\infty)$, а з (22) з огляду на (17) і (20) отримаємо

$$\frac{t_n}{\varrho}\left(-\frac{\theta_n^2}{6}+O(\theta_n^3)\right)+(1+o(1))\tau_2\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{t_n}{T\varrho}\right)^p\geqslant$$

$$\geqslant \frac{t_n}{\varrho}\left(-\frac{\theta_n^2}{24}+O(\theta_n^3)\right)+(1+o(1))\tau_1\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{t_n}{T\varrho}\right)^p+O(\theta_n^2\ln^{p_1-1}t_n),\quad n\to\infty,$$

звідки випливає нерівність (23). □

3. Доведення теореми 1. Почнемо з необхідності. Припустимо, що виконується (2). Тоді для $\Phi_1(\sigma)=Te^{\varrho\sigma}+\sum_{j=1}^m T_j\sigma^{p_j}+\tau_1\sigma^p$ і $\Phi_2(\sigma)=Te^{\varrho\sigma}+\sum_{j=1}^m T_j\sigma^{p_j}+\tau_2\sigma^p$, з $\tau_1=\tau-\varepsilon/2$ та $\tau_2=\tau+\varepsilon/2$, $(\varepsilon>0)$ правильними є результати леми 4, оскільки з (14) для $i=1,2$ одержимо

$$\lambda_n\Psi_i(\varphi_i(\lambda_n))=\frac{\lambda_n}{\varrho}\ln\frac{\lambda_n}{eT\varrho}-\sum_{j=1}^m T_j\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{\lambda_n}{T\varrho}\right)^{p_j}-\tau_i(1+o(1))\left(\frac{1}{\varrho}\ln\frac{\lambda_n}{T\varrho}\right)^p,\quad n\to+\infty,$$

то за лемою 4 для всіх $n\geqslant n_0$ справджується нерівність (3) і для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел виконується (4), причому для цієї послідовності є правильною нерівність $G_1(t_n,t_n(1+\theta_n),\Phi_2)\geqslant\Phi_1(\kappa(t_n,t_{n+1},\Phi_2))$, а звідси за лемою 9

$$\frac{\lambda_{n_k}\theta_k^2}{8\varrho}\leqslant(\tau_2-\tau_1)\ln^p\lambda_{n_k},\quad k\to+\infty,$$

де $\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}=\theta_k\lambda_{n_k}$, тобто

$$\lambda_{n_{k+1}}-\lambda_{n_k}\leqslant(1+o(1))\sqrt{8\varepsilon\varrho\lambda_{n_k}\ln^p\lambda_{n_k}},\quad k\to+\infty,$$

звідки, завдяки довільності ε, отримаємо (5).

Доведемо достатність цих умов. З леми 1, враховуючи умову (3) теореми 1, легко випливає, що

$$\ln\mu(\sigma,F)\leqslant Te^{\varrho\sigma}+\sum_{j=1}^m T_j\sigma^{p_j}+(\tau+o(1))\sigma^p,\quad\sigma\to+\infty.\tag{24}$$

За лемою 3 для всіх $\sigma\in[\varphi(\lambda_{n_k}),\varphi(\lambda_{n_k+1})]$ і всіх $k\geqslant k_0$ правильна нерівність $\ln\mu(\sigma)\geqslant\Phi(\sigma)-(G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)-G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi))$, тобто з леми 8 отримаємо

$$\ln\mu(\sigma,F)\geqslant Te^{\varrho\sigma}+\sum_{j=1}^m T_j\sigma^{p_j}+(\tau-\varepsilon)\sigma^p-(1+o(1))\frac{\lambda_{n_k}\theta_k^2}{8\varrho}+o(\ln^p\lambda_{n_k})=$$

$$=Te^{\varrho\sigma}+\sum_{j=1}^m T_j\sigma^{p_j}+(\tau-\varepsilon)\sigma^p+o(\ln^p\lambda_{n_k})\geqslant Te^{\varrho\sigma}+\sum_{j=1}^m T_j\sigma^{p_j}+(\tau-\varepsilon)\sigma^p-\varepsilon(\ln^p\Phi'(\sigma))\geqslant$$

$$\geqslant Te^{\varrho\sigma}+\sum_{j=1}^m T_j\sigma^{p_j}+(\tau-3\varepsilon)\sigma^p,\quad\sigma\to+\infty.\tag{25}$$

З (24) і (25), завдяки довільності ε, отримуємо (2). Теорему 1 повністю доведено.

4. Доведення теореми 2. В [10] доведено, що

$$M(\sigma,F)\leqslant\mu(\sigma,F)\Big(n(2\lambda_{\nu(\sigma+1,F)})+\int_{2\lambda_{\nu(\sigma+1,F)}}^{\infty}e^{-t/2}dn(t)\Big).\tag{26}$$

Оскільки за умовою (6) $\ln n(t) \leqslant \frac{1}{2}\ln^p t$ $(t \geqslant t_0)$, а $\lambda_{\nu(\sigma+1,F)} \to +\infty$ $(\sigma \to +\infty)$, то

$$\int\limits_{2\lambda_{\nu(\sigma+1,F)}}^{\infty} e^{-t/2} dn(t) \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{2\lambda_{\nu(\sigma+1,F)}}^{\infty} n(t) e^{-t/2} dt \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{2\lambda_{\nu(\sigma+1,F)}}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(t-\ln^p t)} dt \to 0, \quad (27)$$

$\sigma \to +\infty$. З іншого боку, $\ln\mu(\sigma+2,F) - \ln\mu(\sigma+1,F) = \int_{\sigma+1}^{\sigma+2} \lambda_{\nu(t,F)} dt \geqslant \lambda_{\nu(\sigma+1,F)}$, тому з огляду на умову (6)

$$\ln n(2\lambda_{\nu(\sigma+1,F)}) = o(\ln^p \lambda_{\nu(\sigma+1,F)}) = o(\ln^p \ln\mu(\sigma+2,F)), \quad \sigma \to +\infty. \quad (28)$$

З (26)-(28) і (2) легко отримуємо

$$\ln M(\sigma,F) \leqslant \ln\mu(\sigma,F) + \ln n(2\lambda_{\nu(\sigma+1,F)}) + o(1) \leqslant \ln\mu(\sigma,F) + o(\ln^p \ln\mu(\sigma+2,F)) \leqslant$$
$$\leqslant \ln\mu(\sigma,F) + o(\sigma^p), \quad \sigma \to +\infty. \quad (29)$$

Тому з нерівності Коші $\mu(\sigma,F) \leqslant M(\sigma,F)$ та з нерівності (29) при $\sigma \to +\infty$, отримаємо $0 \leqslant \ln M(\sigma,F) - \ln\mu(\sigma,F) = o(\sigma^p)$, якщо виконується (2) або (7), а звідси випливає еквівалентність цих співвідношень. Теорему 2 доведено.

Список використаної літератури

1. *Шеремета М.Н.* Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле / *Шеремета М.Н.* // Теория функций, функциональный анализ и их приложения. – 1990. – №54. – С. 16-25.
2. *Sheremeta M.M.* On the second term of asymptotic behaviour of entire Dirichlet series / *Sheremeta M.M.* // J. Analysis. – 1995. – Vol. 3, №1. – P. 213-218.
3. *Sumyk O.M.* On two-member exponential-power asymptotics of maximal term of entire Dirichlet series / *Sumyk O.M.* // Matem. Studii. – 2000. – Vol. 14, №1. – P. 29-34.
4. *Sumyk O.M.* On connection between the growth of maximum modulus and maximal term of entire Dirichlet series in terms of m-termed asymptotics / *Sumyk O.M., Sheremeta M.M.* // Matem. Studii. – 2003. – Vol. 19, №1. – P. 83-88.
5. *Сумик О.М.* Асимптотичне поводження спряжених за Юнгом функцій та застосування до рядів Діріхле / *Сумик О.М.* Дис. ... канд. фіз.-мат. наук. – Львів, 2002. – 150 с.
6. *Тарасюк Р.І.* Про двочленну асимптотику цілих функцій, представлених степеневими рядами / *Тарасюк Р.І.* // Волинськ. матем. вісник. – 1995.– №2. – С. 162-164.
7. *Лугова Л.Л.* Тричленна степенева асимптотика логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле / *Лугова Л.Л., Шеремета М.М.* // Матем. студії. – 2006. – Т. 25, №2. – С. 149-168.
8. *Заболоцький М.В.* Узагальнення теореми Ліндельофа / *Заболоцький М.В., Шеремета М.М.* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №9. – С. 1117-1192.
9. *Шеремета М.Н.* О производной ряда Дирихле / *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39, №1. – С. 206-223.
10. *Sumyk O.M.* On n-member asymptotics for logarithm of maximal term of entire Dirichlet series / *Sumyk O.M.* // Matem. Studii. – 2001. – Vol. 15, №2. – P. 200-208.

Стаття: надійшла до редакції 30.03.2011
прийнята до друку 14.12.2011

MULTITERMED EXPONENTIAL-POWER ASYMPTOTIC OF ENTIRE DIRICHLET SERIES

Mykola HRYTSIV

Ivan Frakno National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Conditions on coefficients of an entire Dirichlet series

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{(\sigma+it)\lambda_n}$$

are found, under which the logarithm of its maximal term has multitermed exponential-power asymptotic $\ln\mu(\sigma,F)=Te^{\varrho\sigma}+\sum\limits_{j=1}^{m}T_j\sigma^{p_j}+(\tau+o(1))\sigma^p$, $\sigma\to+\infty$, where $T>0$, $\varrho>0$, $T_j\in R\backslash\{0\}$, $\tau\in R\backslash\{0\}$ і $0<p<p_m<\ldots<p_1$. It is establisched also the condition on λ_n, under which the logarithms of the maximum modulus $M(\sigma,F)$ and of maximal term $\mu(\sigma,F)$ have the same multitermed exponential-power asymptotic.

Key words: Dirichlet series, maximum modulus, maximal term, multitermed exponential-power asymptotic.

МНОГОЧЛЕННАЯ ПОКАЗАТЕЛЬНО-СТЕПЕННАЯ АСИМПТОТИКА ЦЕЛОГО РЯДА ДИРИХЛЕ

Николай ГРЫЦИВ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: m_m_sheremeta@list.ru

Найдены условия на коэффициенты целого ряда Дирихле

$$F(s)=\sum_{n=0}^{\infty}a_ne^{(\sigma+it)\lambda_n},$$

при выполнении которых логарифм его максимального члена имеет многочленную показательно-степенную асимптотику $\ln\mu(\sigma,F)=Te^{\varrho\sigma}+$ $+\sum\limits_{j=1}^{m}T_j\sigma^{p_j}+(\tau+o(1))\sigma^p$ при $\sigma\to+\infty$, где $T>0$, $\varrho>0$, $T_j\in R\backslash\{0\}$, $\tau\in R\backslash\{0\}$ і $0<p<p_m<\ldots<p_1$. Указано также условие на λ_n, при выполнении которого логарифмы максимума модуля $M(\sigma,F)$ и максимального члена $\mu(\sigma,F)$ имеют одну и ту же показательно-степенную асимптотику.

Ключевые слова: ряд Дирихле, максимум модуля, максимальный член, многочленная показательно-степенная асимптотика.