ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 91–96
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 91–96

УДК 517.547

ГОЛОМОРФНІ ФУНКЦІЇ ЦІЛКОМ РЕГУЛЯРНОГО ЗРОСТАННЯ В ПРОКОЛЕНІЙ ПЛОЩИНІ

Мар'яна ГОЛДАК, Андрій ХРИСТІЯНИН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mariana.goldak@gmail.com, khrystiyanyn@ukr.net

Введено клас Λ_H° голоморфних у проколеній площині $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функцій цілком регулярного зростання, поняття індикаторів таких функцій, доведено належність цих індикаторів до класу $L_q[0, 2\pi]$, $q \geq 1$ і використовуючи обернені формули для коефіцієнтів Фур'є функцій, мероморфних в кільці, доведено властивість ω-тригонометричної опуклості індикатора голоморфної в $\mathbb{C}^*$ функції цілком регулярного зростання. Доведено також існування кутової щільності множини нулів функції $f \in \Lambda_H^\circ$ на певних послідовностях.

Ключові слова: функція цілком регулярного зростання, індикатор зростання, тригонометрична опуклість, кутова щільність, коефіцієнти Фур'є, коефіцієнти Фур'є-Стільтьєса, голоморфна функція.

1. Вступ. Допоміжні поняття. Теорію цілих функцій цілком регулярного зростання стосовно функцій λ, близьких до степеневих, побудували наприкінці 30-х років XX ст. Левін Б.Я. та Пфлюгер А. Її активно застосовували в багатьох розділах сучасного комплексного аналізу. Ця теорія та її застосування досить ґрунтовно викладені у монографії [1]. У 70-80-х роках минулого століття Кондратюк А.А., використовуючи метод рядів Фур'є, розроблений Рубелом Л.А. та Тейлором Б.А., узагальнив теорію Левіна-Пфлюгера [2]. Властивості мероморфних у багатозв'язних областях комплексної площини $\mathbb{C}$ функцій, зокрема розподіл значень, вивчали багато дослідників. Зокрема, один з останніх підходів запропоновано у [3], [4], [5]. Означення характеристик $m_0(r, f)$, $N_0(r, f)$, $T_0(r, f)$ можуть бути знайдені там само.

Використовуючи ці характеристики, ми вводимо класи голоморфних в $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функцій цілком регулярного зростання, поняття індикаторів таких функцій, доводимо належність цих індикаторів до класів $L_q[0, 2\pi]$, $q \geq 1$. Застосовуючи обернені формули для коефіцієнтів Фур'є функцій, мероморфних у кільці $\{z : \frac{1}{R_0} < |z| < R_0\}$, де $1 < R_0 \leq +\infty$ [6], отримані авторами цієї праці, доводимо властивість ω-тригонометричної опуклості індикатора голоморфної в $\mathbb{C}^*$ функції цілком регулярного зростання для всіх ω з деякого проміжка, який залежить від функції зростання λ. Доведено також існування кутової щільності множини нулів цієї функції на певних послідовностях.

Означення 1. *Додатна, неспадна, неперервна, необмежена функція* $\lambda(r)$, $r \geq 1$ *називається функцією зростання.*

Нехай λ – функція зростання, а $f(z)$ – голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція. Клас голоморфних в $\mathbb{C}^*$ функцій скінченого λ-типу ([5, c. 61]) позначатимемо Λ_H. Через $c_k(t,f)$ позначимо коефіцієнти Фур'є функції $\log|f(re^{i\theta})|$, тобто

$$c_k(t,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\log|f(te^{i\theta})|d\theta, \quad k\in\mathbb{Z}, \quad t>0.$$

2. Голоморфні в $\mathbb{C}^*$ функції цілком регулярного зростання. Нехай λ – функція помірного зростання, тобто $\lambda(2r) \leq M\lambda(r)$, для всіх $r \geq 1$, при деякому $M > 0$.

Означення 2. *Голоморфна в* $\mathbb{C}^*$ *функція* f *називається функцією цілком регулярного зростання, якщо* $f \in \Lambda_H$ *і для всіх* $k \in \mathbb{Z}$ *існують границі* $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{c_k(r,f)}{\lambda(r)} =: c_k^{'}$ *та* $\lim\limits_{r\to+\infty}\frac{c_k(\frac{1}{r},f)}{\lambda(r)} =: c_k^{''}$.

Клас таких функцій позначатимемо Λ_H°.

Означення 3. *Якщо* $f \in \Lambda_H^{\circ}$, *то функції* $h_1(\theta,f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{'}\cdot e^{ik\theta}$, $h_2(\theta,f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} c_k^{''}\cdot e^{ik\theta}$, $h(\theta,f) = h_1(\theta,f) + h_2(\theta,f) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}}(c_k^{'} + c_k^{''})\cdot e^{ik\theta}$, *де* $c_k^{'}$, $c_k^{''}$ *визначені в Означенні* 2 *називаються індикаторами зростання функції* f, *або, коротко, індикаторами.*

Теорема 1. *Нехай* $f \in \Lambda_H^{\circ}$. *Тоді індикатори* $h_1(\theta,f)$ *і* $h_2(\theta,f)$ *належать до* $L_q[0,2\pi]$, $q \geq 1$.

Доведення. За Теоремою 22.4 [5, c. 62] $c_k^{'} \leq A/|k|+1$, $c_k^{'} \leq A/|k|+1$ для всіх $k\in\mathbb{Z}$. Твердження теореми випливає з Теореми Хаусдорфа-Юнга [7, c. 76]. □

Теорема 2.

1) *Якщо* $f \in \Lambda_H^{\circ}$, *то для кожного* q, $1 \leq q < \infty$ *виконується*

$$\lim_{r\to+\infty}\left\|\frac{\log|f(re^{i\theta})|}{\lambda(r)} - h_1(\theta,f)\right\|_q = 0, \quad \lim_{r\to+\infty}\left\|\frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)} - h_2(\theta,f)\right\|_q = 0, \tag{1}$$

$$\lim_{r\to+\infty}\left\|\frac{\log|f(re^{i\theta})| + \log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)} - h(\theta,f)\right\|_q = 0. \tag{2}$$

2) *Якщо для деякої голоморфної в* $\mathbb{C}^*$ *функції* f *існують* $q_1 \geq 1$, $q_2 \geq 1$ *і функції* $\widetilde{h}_i \in L_2[0,2\pi]$, $i=1,2$ *такі, що*

$$\lim_{r\to+\infty}\left\|\frac{\log|f(re^{i\theta})|}{\lambda(r)} - \widetilde{h}_1(\theta)\right\|_{q_1} = 0, \quad \lim_{r\to+\infty}\left\|\frac{\log|f(\frac{1}{r}e^{i\theta})|}{\lambda(r)} - \widetilde{h}_2(\theta)\right\|_{q_2} = 0 \tag{3}$$

то $f \in \Lambda_H^{\circ}$ *і* $\widetilde{h}_i(\theta) = h_i(\theta,f)$ *майже скрізь на* $[0,2\pi]$, $i=1,2$.

Доведення. Доведення аналогічне до доведення Теореми 7.2 [2, с. 78], опирається на Теорему Хаусдорфа-Юнга [7, с. 76], Теорему 22.5 [5, с. 64] та нерівності Гельдера і Мінковського. □

3. Розподіл нулів функції $f \in \Lambda_H^\circ$. Тригонометрична опуклість індикатора функції $f \in \Lambda_H^\circ$. В цьому розділі ми використовуватимемо поняття ρ-субтригонометричності ([2, с. 93]), ρ-тригонометричної опуклості ([2, с. 93-94]), $[\varkappa, \rho]$-тригонометричної опуклості ([2, с. 108]), збіжності послідовності мір на одиничному колі ([2, с. 98]), а також кутової щільності множини нулів функції ([2, с. 106]).

Нехай f – голоморфна в $\mathbb{C}^*$ функція, з послідовністю нулів $\{a_j\}$, $a_j = |a_j|e^{i\gamma_j}$. Позначимо

$$n_k(t,f) = \sum_{\frac{1}{t} \le |a_j| \le t} e^{-ik\gamma_j}, \quad N_k(r,f) = \int_1^r \frac{n_k(t,f)}{t} dt, \quad k \in \mathbb{Z}, \quad t \ge 1, \quad r \ge 1.$$

Приймемо $\gamma_j^{(m)} = \gamma_j + 2\pi m$, $m \in \mathbb{Z}$. Рівності

$$s(r,\varphi) - s(r,a) = 2\pi \sum_{\substack{a < \gamma_j^{(m)} \le \varphi \\ \frac{1}{r} \le |a_j| \le r}} 1,$$

де $a < \varphi$, $r \ge 1$, та $s(r, \varphi + 2\pi) - s(r,\varphi) = s(r, a + 2\pi) - s(r,a)$ визначають при всіляких можливих виборах чисел $a \in \mathbb{R}$ та значень $s(r,a)$ сім'ю мір $\{s(r,\varphi)\}$ на одиничному колі. Позначимо $S(r,\varphi) - S(r,a) = \int_1^r \frac{s(t,\varphi) - s(t,a)}{t} dt$. Тоді для кожного $\varphi_0 \in \mathbb{R}$ виконується

$$n_k(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} e^{-ik\theta} ds(r,\theta), \quad N_k(r,f) = \frac{1}{2\pi} \int_{\varphi_0}^{\varphi_0 + 2\pi} e^{-ik\theta} dS(r,\theta), \quad k \in \mathbb{Z}, \quad r \ge 1.$$

Для коефіцієнтів Фур'є-Стільтьєса $N_k(r,f)$ послідовності нулів функції f в [6] отримали такі співвідношення в термінах послідовності $\{c_k(r,f)\}$

$$N_0(r,f) = c_0(r,f) + c_0(\frac{1}{r}, f) - 2c_0(1,f), \tag{4}$$

$$N_k(r,f) = c_k(r,f) + c_k(\frac{1}{r}, f) - k^2 \int_1^r \frac{dt}{t} \int_{\frac{1}{t}}^t \frac{c_k(u,f)}{u} du + C_k(1,f), \tag{5}$$

де $C_k(1,f) = \frac{1}{k} \sum_{|a_j|=1} e^{-ik\gamma_j} - 2c_k(1,f)$, $r \ge 1$, $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $\ln r = o(\lambda(r))$, $r \to +\infty$. Приймемо

$$\lambda_1(r) = \int_1^r \frac{dt}{t} \int_1^t \frac{\lambda(\tau)}{\tau} d\tau, \qquad \liminf_{r \to +\infty} \frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)} = \varkappa^2, \qquad \limsup_{r \to +\infty} \frac{\lambda(r)}{\lambda_1(r)} = \rho^2.$$

Зауважимо, що $0 \le \varkappa \le \rho < +\infty$ (див. [2, с. 107-108]).

Основним результатом є така теорема.

Теорема 3. *Якщо $f \in \Lambda_H^\circ$, то $h(\theta, f)$ є $[\varkappa, \rho]$-тригонометрично опуклою функцією. Якщо для деякого ω, $\varkappa \le \omega \le \rho$ виконується*

$$\lim_{r_j \to +\infty} \frac{\lambda(r_j)}{\lambda_1(r_j)} = \omega^2, \quad \omega \ne 0, \tag{6}$$

то на послідовності $\{r_j\}$ множина нулів функції f має кутову щільність

$$S(\varphi) - S(\eta) = \frac{h'(\varphi, f) - h'(\eta, f)}{\omega^2} + \int_\eta^\varphi h(\theta, f) d\theta,$$

де η, φ – точки неперервності функції S.

Доведення. Нехай $f \in \Lambda_H^\circ$. Тоді за означенням 2 отримаємо

$$c_k(r, f) = (c_k^{'} + o(1))\lambda(r), \qquad c_k(\frac{1}{r}, f) = (c_k^{''} + o(1))\lambda(r)$$

при $r \to +\infty$ для всіх $k \in \mathbb{Z}$. Звідси, використовуючи обернені формули (4), (5), зауваживши, що

$$\int_1^r \frac{dt}{t} \int_{\frac{1}{t}}^t \frac{c_k(u, f)}{u} du = \int_1^r \frac{dt}{t} \int_1^t \frac{c_k(u, f)}{u} + \int_1^r \frac{dt}{t} \int_1^t \frac{c_k(\frac{1}{u}, f)}{u} du,$$

одержуємо

$$N_0(r, f) = (c_0^{'} + c_0^{''})\lambda(r) + o(\lambda(r)), \qquad r \to +\infty$$

та

$$N_k(r, f) = (c_k^{'} + c_k^{''})\lambda(r) + o(\lambda(r)) - k^2(c_k^{'} + c_k^{''})\lambda_1(r) + o(\lambda_1(r)), \quad r \to +\infty,$$

для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Тобто,

$$\frac{N_0(r, f)}{\lambda(r)} = c_0^{'} + c_0^{''} + o(1), \qquad r \to +\infty$$

та для всіх $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$

$$\frac{N_k(r, f)}{\lambda(r)} = (c_k^{'} + c_k^{''}) \left(1 - k^2 \frac{\lambda_1(r)}{\lambda(r)}\right) + o(1) + o\left(\frac{\lambda_1(r)}{\lambda(r)}\right), \quad r \to +\infty. \tag{7}$$

Припустимо, що відношення $\frac{\lambda_1(r)}{\lambda(r)}$ необмежене, тобто $\varkappa = 0$. Оскільки $|N_k(r, f)| \le$ $\le N(r, 1/f)$, для всіх $k \in \mathbb{Z}$, а $f \in \Lambda_H$, то вираз у лівому боці (7) обмежений. Тому $c_k^{'} + c_k^{''} = 0$ при $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Отже, $h(\theta, f) = c_0^{'} + c_0^{''} \ge 0$.

Нехай тепер відношення $\frac{\lambda_1(r)}{\lambda(r)}$ обмежене, а $\{r_j\}$ послідовність на якій виконується (6). Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}$

$$\Delta_k = \lim_{r_j \to +\infty} \frac{N_k(r_j, f)}{\lambda(r_j)} = (c_k^{'} + c_k^{''}) \left(1 - \frac{k^2}{\omega^2}\right). \tag{8}$$

Отож, множина нулів функції f за теоремою Каратеодорі-Леві (див., наприклад, [2, с. 98]) має кутову щільність на послідовності $\{r_j\}$. Позначимо цю кутову щільність S.

Якщо $\omega \notin \mathbb{Z}$ з (8), то отримуємо

$$c_k^{'} + c_k^{''} = \frac{\omega^2 \Delta_k}{\omega^2 - k^2}, \qquad k \in \mathbb{Z}. \tag{9}$$

Тому

$$h(\theta, f) = \omega^2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} \frac{\Delta_k}{\omega^2 - k^2} e^{ik\theta} = \omega^2 \gamma_\omega * dS.$$

Отож, h є ω-субтригонометричною, а отже, за Теоремою 8.1 ([2, c. 96]), h є ω-тригонометрично опуклою.

У випадку $\omega \in \mathbb{Z}$ з (8) отримуємо $\Delta_\omega = 0$, а також виконується (9) при $|k| \neq \omega$. Тоді

$$\begin{aligned} h(\theta, f) = \omega^2 \sum_{\substack{k \in \mathbb{Z} \\ |k| \neq \omega}} \tfrac{\Delta_k}{\omega^2 - k^2} e^{ik\theta} + (c_\omega^{'} + c_\omega^{''}) e^{i\omega\theta} + (\overline{c_\omega^{'}} + \overline{c_\omega^{''}}) e^{-i\omega\theta} = \\ = \omega^2 \gamma_\omega * dS + (c_\omega^{'} + c_\omega^{''}) e^{i\omega\theta} + (\overline{c_\omega^{'}} + \overline{c_\omega^{''}}) e^{-i\omega\theta}. \end{aligned}$$

Знову отримуємо ρ-субтригонометричність h і за Теоремою 8.1 ([2, c. 96]) h є ω-тригонометрично опуклою. □

Розглянемо частковий випадок, коли $\lambda(r) = r^\rho L(r)$, де $\rho > 0$, $L(r)$ – повільно змінна функція в сенсі Карамати, тобто $\lim_{r \to +\infty} L(cr)/L(r) = 1$ рівномірно на кожному відрізку $0 < a \leq c \leq b < +\infty$.

Легко перевірити, що $\lambda(2r) = O(\lambda(r))$, $r \to +\infty$ і $\varkappa = \rho$ (див., наприклад, [2, c. 116]). Якщо функція $f \in \Lambda_H^\circ$, то її індикатор $h(\theta, f)$ буде ρ-тригонометрично опуклою функцією. Оскільки існуватиме $\lim\limits_{r \to +\infty} \lambda(r)/\lambda_1(r) = \rho^2$, то множина нулів функції f матиме кутову щільність.

Список використаної літератури

1. *Левин Б.Я.* Распределение корней целых функций / *Левин Б.Я.* – М.: ГИТТЛ, 1956.
2. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / *Кондратюк А.А.* – Львів, 1988.
3. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. I / *Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.* // Mat. Stud. – 2005. – Vol. 23, №1. – P. 19-30.
4. *Khrystiyanyn A.Ya.* On the Nevanlinna Theory for meromorphic functions on annuli. II / *Khrystiyanyn A.Ya., Kondratyuk A.A.* // Mat. Stud. – 2005. – Vol. 24, №2. – P. 57-68.
5. *Kondratyuk A., Laine I.* Meromorphic functions in multiply connected domains / *Kondratyuk A., Laine I.* – Joensuu-Lviv, 2006.
6. *Голдак М., Христіянин А.* Обернені формули для коефіцієнтів Фур'є мероморфних у кільцях функцій / *Голдак М., Христіянин А.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 71-77.
7. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды / *Зигмунд А.* – М-Л: ГОНТИ НКТП СССР, 1939.

Стаття: надійшла до редакції 08.09.2011
прийнята до друку 14.12.2011

HOLOMORPHIC FUNCTIONS OF COMPLETELY REGULAR GROWTH IN THE PUNCTURED PLANE

Mariana GOLDAK, Andriy KHRYSTIYANYN

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytet'ska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: mariana.goldak@gmail.com, khrystiyanyn@ukr.net

The class Λ_H° of holomorphic in $\mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$ functions of completely regular growth and the notion of growth indicators of such functions are introduced. It is proved that these indicators belong to the Lebesgue classes $L_q[0, 2\pi]$, $q \geq 1$. Using inverse formulas for the Fourier coefficients of meromorphic functions on annuli we prove that the growth indicator of a function $f \in \Lambda_H^\circ$ possesses the property of ω-trigonometrical convexity. It is also shown that the set of zeros of a function $f \in \Lambda_H^\circ$ has an angular density on some sequence.

Key words: function of completely regular growth, growth indicator, trigonometricall convexity, angular density, Fourier coefficients, Fourier-Stieltjes coefficients, holomorphic function.

ГОЛОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ ВПОЛНЕ РЕГУЛЯРНОГО РОСТА В ПРОКОЛОТОЙ ПЛОСКОСТИ

Марьяна ГОЛДАК, Андрей ХРИСТИЯНИН

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: mariana.goldak@gmail.com, khrystiyanyn@ukr.net

Введено класс $f \in \Lambda_H^\circ$ голоморфных в проколотой плоскости $\mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ функций вполне регулярного роста и понятие индикатора таких функций. Доказано принадлежность этих индикаторов классам $L_q[0, 2\pi]$, $q \geq 1$. На основании обратных формул для коэффициентов Фурье функций, мероморфных в кольце, доказано свойство ω-тригонометрической выпуклости индикатора голоморфной в $\mathbb{C}^*$ функции вполне регулярного роста. А также установлено существование угловой плотности множества нулей функции $f \in \Lambda_H^\circ$ на некоторых последовательностях.

Ключевые слова: функция вполне регулярного роста, индикатор роста, тригонометрическая выпуклость, угловая плотность, коэффициенты Фурье, коэффициенты Фурье-Стильтьеса, голоморфная функция.