ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 79–90
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 79–90

УДК 517.95

ПРО ІСНУВАННЯ СЛАБКОГО РОЗВ'ЯЗКУ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ПІВЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗІ ЗМІННИМ СТЕПЕНЕМ НЕЛІНІЙНОСТІ

Олег БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Досліджено мішану задачу Діріхле для рівняння

$$u_t - \Delta u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t)$$

в циліндричній області. За умови $1 < q_0 \le q(x,t) \le q^0 < 2$ доведено існування слабкого розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: нелінійне параболічне рівняння, мішана задача, змінний показник нелінійності, узагальнені простори Лебега і Соболєва, слабкий розв'язок, функція Гріна.

1. Вступ. Нехай $T > 0$, $n \in \mathbb{N}$ – фіксовані числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з гладкою межею $\partial\Omega$, $Q_{0,T} = \Omega \times (0,T]$. Розглянемо задачу

$$u_t - \Delta u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{1}$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \tag{2}$$

$$u|_{t=0} = u_0(x), \tag{3}$$

де $\Delta u = u_{x_1x_1} + u_{x_2x_2} + \ldots + u_{x_1x_1}$ – оператор Лапласа, функції g, q, f, u_0 задовольняють такі умови:

(G): $g \in L^\infty(Q_{0,T})$;

(Q): $q \in L^\infty(Q_{0,T})$, $1 < q_0 \le q(x,t) \le q^0 < +\infty$, де $q_0 \equiv \operatorname*{ess\,inf}_{(x,t)\in Q_{0,T}} q(x,t)$, $q^0 \equiv \operatorname*{ess\,sup}_{(x,t)\in Q_{0,T}} q(x,t)$;

(UF): $u_0 \in L^p(\Omega)$, $f \in L^p(Q_{0,T})$, де $p > 1$.

Мета нашої праці – довести існування слабкого узагальненого розв'язку задачі (1)-(3) при мінімальних обмеженнях на гладкість показника нелінійності – функції q.

Зауважимо таке: коли замість півлінійного рівняння (1) вивчати нелінійне рівняння

$$u_t - \sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t)|u_{x_i}|^{q(x,t)-2}u_{x_i})_{x_i} = f(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}, \tag{4}$$

то розв'язність задачі (4), (2), (3) доведена в [1]. Зокрема, в теоремі 1 [1, с. 26] доведено таке: якщо q задовольняє умови **(Q)**,

$$|q(x,t) - q(x,t')| \le \frac{A}{\ln\frac{1}{|t-t'|}} \quad \forall\, t,t' \in [0,T], \quad |t-t'| \le \frac{1}{2}, \tag{5}$$

і умову (див. доведення теореми 1 [1, p. 41]) $q^0 < q_0\,\frac{n+2}{n}$, то існує єдиний W-розв'язок та існує єдиний H-розв'язок (див. [1]), крім того, вони обидва належать до $C([0,T];L^2(\Omega))$. В теоремі 2 [1, p. 26] доведено таке: якщо виконуються умови **(Q)**,

$$|q(x,t) - q(y,\tau)| \le \frac{A}{\ln\frac{1}{|x-y|+|t-\tau|}} \quad \forall\,(x,t),(y,\tau) \in Q_{0,T}, \quad |x-y|+|t-\tau| \le \frac{1}{2}, \tag{6}$$

то W-розв'язок збігається з H-розв'язком.

Коли показник нелінійності q не залежить від t, таких жорстких умов на гладкість функції q накладати не треба (див., зокрема, зауваження 6.5 [2, с. 122]). У випадку, коли $q = q(x)$ задовольняє лише умову **(Q)** та одну з двох умов:

$$q \in C(\overline{\Omega}), \tag{7}$$

або існують сталі s_j, s_j^* і відкриті множини $\Omega_j \subset \Omega$, $j = \overline{1,m}$, які складаються зі скінченної кількості компонент з ліпшицевою границею такі, що

$$\begin{cases} \operatorname{mes}\Big(\Omega \setminus \bigcup\limits_{1\le j\le m} \Omega_j\Big) = 0, \\ 1 = s_1 < s_2 < s_1^* < s_3 < s_2^* < \ldots < s_{m-1} < s_{m-2}^* < n < s_m < s_{m-1}^* < s_m^* = +\infty, \\ s_j \le q(x) \le s_j^* \quad \text{майже для всіх} \quad x \in \Omega_j, \quad j = \overline{1,m}, \\ s_k^* < R(s_k), \quad k = \overline{1,m-1}, \quad \text{де} \quad R(r) = \begin{cases} \frac{nr}{n-r}, & 1 \le r < n, \\ +\infty, & n \le q. \end{cases} \end{cases} \tag{8}$$

то Ковачік О. в [3] довів методом Роте теорему існування розв'язку мішаної задачі для загального параболічного рівняння вищого порядку, яке у модельному випадку виглядає як (4) з функціями $a_1, \ldots, a_n$, які не залежать від t. Наголосимо, що умова (6) у цьому разі не виникає.

Зрозуміло, що

$$(6) \;\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}\; (7) \;\underset{\not\Longleftarrow}{\Longrightarrow}\; (8).$$

Певним аналогом умови (8) є така умова:

$$q^0 < R(q_0), \tag{9}$$

де q_0, q^0 взяті з **(Q)**, а функція R – з (8).

В [4] для $q = q(x)$ за умов **(Q)**, (7) або **(Q)**, (8) доведено існування розв'язку задачі без початкових умов для рівняння (4) з $a_1 \equiv 1, \ldots, a_n \equiv 1$, $q_0 > 2$, та відповідного рівняння вищого порядку. Випадок задачі без початкових умов для залежних від t коефіцієнтів рівняння (4) та його узагальнень досліджено в [5].

В [6] за умов **(Q)**, (7) або **(Q)**, (8) доведено існування та єдиність розв'язку мішаної задачі для системи рівнянь, яка у модельному випадку має вигляд (4) з $q = q(x)$, де

$$a_1, \dots, a_n \in C([0,T]; L^\infty(\Omega)), \quad q_0 < 2,$$

а також вигляд (1) з $q = q(x)$, де

$$g \in C([0,T]; L^\infty(\Omega)), \quad q_0 < 2.$$

Цей розв'язок, зокрема, належить до $C([0,T]; L^2(\Omega))$. Аналогічний результат для різних параболічних варіаційних нерівностей, що узагальнюють рівняння (1) та (4), отримано в [7], [8], [9].

У підрозділі 3 покажемо існування слабкого розв'язку задачі (1)-(3) за незначних обмежень на гладкість показника нелінійності $q = q(x,t)$, а саме лише за умови **(Q)** та $q^0 \le 2$. Деякі допоміжні факти, які використано в підрозділі 3, містить другий підрозділ.

2. Допоміжні результати. Нехай X, Y – нормовані простори, $A : X \to Y$. Лінійний чи нелінійний оператор A називається цілком неперервним (див. [10, с. 229]), якщо він неперервний і переводить кожну обмежену множину з X в передкомпактну (див. [10, с. 154]) множину з Y.

Нагадаємо, що для лінійного оператора поняття обмеженості та неперервності є еквівалентними, але існують нелінійні обмежені оператори, що не є неперервними, та існують неперервні оператори, які не є обмеженими (див. задачу 4.4 [10, с. 149]).

Зауваження 1. Легко довести, що кожен (лінійний чи нелінійний) цілком неперервний оператор є обмеженим. Також зрозуміло таке: якщо $A, B : X \to Y$ – цілком неперервні оператори, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, то оператор $\alpha A + \beta B$ теж є цілком неперервним.

Лема 1. *Нехай X, Y, Z – банахові простори, $A : Y \to Z$, $B : X \to Y$, взагалі кажучи, нелінійні оператори. Якщо A – цілком неперервний, B – неперервний обмежений, то композиція операторів $A \circ B : X \to Z$ є цілком неперервним оператором.*

Доведення. Оскільки A є цілком неперервним, то оператор A – неперервний. Оскільки B – неперервний, то $A \circ B$ – неперервний як композиція неперервних.

Нехай D – обмежена множина в X. Тоді $B(D)$ є обмеженою множиною в Y, бо оператор B – обмежений. Тому $A(B(D))$ є передкомпактною множиною в Z, бо оператор A – цілком неперервний. Отже, $A \circ B$ – цілком неперервний. □

Тепер наведемо декілька прикладів.

Зрозуміло, що тотожно сталий оператор, тобто оператор $C : X \to X$ такий, що

$$\exists\, y \in X \quad \forall\, x \in X : \quad Cx = y, \tag{10}$$

є нелінійним (при $y \neq 0$) цілком неперервним оператором.

Нехай $L^p(Q)$ – стандартний простір Лебега ([10, с. 66]), де $Q \subset \mathbb{R}^m$.

Теорема 1. *(Теорема 7.2.7.* [10, с. 203]*). Нехай Q – обмежена чи необмежена вимірна за Лебегом підмножина $\mathbb{R}^m$, $1 < p < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, $K : Q \times Q \to \mathbb{R}$ – вимірна функція, $\mathcal{J}$ – лінійний інтегральний оператор вигляду*

$$(\mathcal{J}u)(y) = \int_Q K(y,z) u(z)\, dz, \quad y \in Q; \tag{11}$$

$$|||K|||_p \equiv \Big\{\int\limits_Q \Big(\int\limits_Q |K(y,z)|^{p'}\,dz\Big)^{\frac{p}{p'}}\,dy\Big\}^{\frac{1}{p}}. \tag{12}$$

Якщо $|||K|||_p < +\infty$, то оператор $\mathcal{J}$ діє з простору $L^p(Q)$ в $L^p(Q)$ та є цілком неперервним.

Зрозуміло, що умова (12) означає таке: $K \in L^p(Q; L^{p'}(Q))$.

Зауваження 2. Використовуючи нерівність Гельдера, одержимо

$$||\mathcal{J}u; L^p(Q_{0,T})||^p = \int\limits_Q \Big|\int\limits_Q K(y,z)u(z)\,dz\Big|^p\,dy \le$$

$$\le \int\limits_Q \Big|\Big(\int\limits_Q |K(y,z)|^{p'}\,dz\Big)^{\frac{1}{p'}}\Big(\int\limits_Q |u(z)|^p\,dz\Big)^{\frac{1}{p}}\Big|^p\,dy = |||K|||_p^p \cdot ||u; L^p(Q_{0,T})||^p.$$

Тому у разі виконання умов і позначень теореми 1 отримаємо оцінку

$$||\mathcal{J}u; L^p(Q_{0,T})|| \le |||K|||_p \cdot ||u; L^p(Q_{0,T})||. \tag{13}$$

Ми користуватимемося таким твердженням, яке вперше отримали в [11].

Теорема 2. *(Теорема Шаудера про нерухому точку* [10, с. 229]*). Нехай X – банахів простір, $A : X \to X$ – цілком неперервний оператор, $M \subset X$ – непорожня замкнена обмежена опукла множина. Якщо $A : M \to M$, то відображення A має нерухомі точки.*

Тепер нагадаємо деякі факти з теорії рівнянь з частинними похідними. Розглянемо рівняння

$$u_t - \Delta u = h(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}. \tag{14}$$

Означення 1. *(*[12, с. 1118]*). Функція $G = G(x,t,\xi,s)$, $x,\xi \in \Omega$, $t > s \ge 0$, називається функцією Гріна першої мішаної задачі для параболічного рівняння (14), якщо для всіх $(y,s) \in Q_{0,T}$ вона задовольняє однорідне рівняння (14) та крайову умову (2) за змінними $x \in \Omega$, $t > s \ge 0$, і для кожної функції $\varphi \in C(\overline{\Omega})$ виконується рівність*

$$\lim_{t\to s+0}\int\limits_\Omega G(x,t,\xi,s)\varphi(\xi)\,d\xi = \varphi(x).$$

Якщо функції u_0, h досить гладкі, то відомо таке: задача (14), (2), (3) має єдиний розв'язок, який має вигляд (див. [12, с. 1118])

$$u(x,t) = \int\limits_\Omega G(x,t,\xi,0)\varphi(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^t\int\limits_\Omega G(x,t,\xi,s)h(\xi,s)\,d\xi ds, \quad (x,t) \in Q_{0,T}. \tag{15}$$

Крім того, функція Гріна задовольняє (див. [13, с. 314, 316]) оцінку

$$0 \le G(x,t,\xi,s) \le M_1\,(t-s)^{-\frac{n}{2}}\,e^{-M_2\frac{|x-\xi|^2}{t-s}}. \tag{16}$$

Властивості функцій Гріна загальних параболічних задач досліджували, зокрема, в [14], [15], [16]. Якщо функції u_0, h не мають достатньої гладкості, то рівність (15) можна взяти за означення слабкого розв'язку задачі (14), (2), (3) (див., наприклад, [17], [18]).

Використаємо ці факти для одержання додаткової інформації про властивості функції G. Наведені далі леми, мабуть, не є новим результатом. Авторові статті ці твердження не вдалося знайти у доступній літературі.

Лема 2. *Нехай $r \in [1, +\infty)$ – фіксоване число, G – вимірна функція, для якої виконується оцінка (16),*

$$J_r(x,t,s) = \int\limits_{\Omega} |G(x,t,\xi,s)|^r \, d\xi, \qquad \widehat{J}_r(\xi,t,s) = \int\limits_{\Omega} |G(x,t,\xi,s)|^r \, dx, \tag{17}$$

$x, \xi \in \Omega$, $0 \le s < t$. Тоді існує така стала $C(r) > 0$, що

$$0 \le J_r(x,t,s) \le \frac{C(r)}{(t-s)^{\frac{n}{2}(r-1)}}, \qquad 0 \le \widehat{J}_r(\xi,t,s) \le \frac{C(r)}{(t-s)^{\frac{n}{2}(r-1)}}. \tag{18}$$

Доведення. Використовуючи оцінку (16) та збільшивши область інтегрування з Ω до $\mathbb{R}^n$, одержимо

$$0 \le J_r \le \frac{M_1^r}{(t-s)^{r\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{-M_2 r \frac{|x-\xi|^2}{t-s}} \, d\xi.$$

Зробивши заміну змінних $\xi \rightsquigarrow \eta$, де $\xi = x + \sqrt{\frac{t-s}{M_2 r}}\,\eta$, $d\xi = (\sqrt{\frac{t-s}{M_2 r}})^n \, d\eta$, одержимо

$$J_r \le \frac{M_1^r}{(t-s)^{r\frac{n}{2}}} \int\limits_{\mathbb{R}^n} \frac{(t-s)^{\frac{n}{2}}}{(M_2 r)^{\frac{n}{2}}} \, e^{-|\eta|^2} \, d\eta = \frac{C(r)}{(t-s)^{\frac{n}{2}(r-1)}},$$

де $C(r) = M_1^r (\frac{\pi}{M_2 r})^{\frac{n}{2}}$. Другу оцінку з (18) з тією самою сталою $C(r)$ отримуємо аналогічно. Лему доведено. □

Зауваження 3. Нехай $p, p' \in (1, +\infty)$ – такі числа, що $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$. Тоді

$$p' < 1 + \frac{2}{n} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p}{p-1} < \frac{n+2}{n} \quad \Leftrightarrow \quad pn < pn - n + 2p - 2 \quad \Leftrightarrow \quad p > 1 + \frac{n}{2}. \tag{19}$$

Лема 3. *Нехай G – вимірна функція, для якої виконується оцінка (16), $\mathcal{J}$ – лінійний інтегральний оператор, визначений формулою*

$$(\mathcal{J}z)(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_{\Omega} G(x,t,\xi,s) z(\xi,s) \, d\xi ds, \quad (x,t) \in Q_{0,T}. \tag{20}$$

Якщо $p > 1 + \frac{n}{2}$, то оператор $\mathcal{J} : L^p(Q_{0,T}) \to L^p(Q_{0,T})$ є цілком неперервним (тому обмеженим і неперервним оператором).

Доведення. Нехай виконуються припущення леми, p, p' – числа з зауваження 3. Враховуючи позначення теореми 1 та леми 2 з $r = p'$, отримаємо

$$|||G|||_p^p \equiv \int\limits_{Q_{0,T}} \Big(\int\limits_{Q_{0,t}} |G(x,t,\xi,s)|^{p'} \, d\xi ds \Big)^{\frac{p}{p'}} \, dxdt = \int\limits_0^T dt \int\limits_{\Omega} \Big(\int\limits_0^t J_{p'}(x,t,s) \, ds \Big)^{\frac{p}{p'}} \, dx.$$

Тепер зауважимо, що при $\beta < 1$ виконується очевидна рівність

$$\int_0^t \frac{ds}{(t-s)^\beta} = \Big[-\frac{(t-s)^{1-\beta}}{1-\beta}\Big]\Big|_{s=0}^{s=t} = \frac{t^{1-\beta}}{1-\beta}. \tag{21}$$

Тому з оцінок (18) одержимо

$$|||G|||_p^p \le \int_0^T dt \int_\Omega \Big(\int_0^t \frac{C(r)}{(t-s)^{\frac{n}{2}(p'-1)}}\, ds\Big)^{\frac{p}{p'}} dx = \int_0^T dt \int_\Omega \Big(C(r)\frac{t^{1-\frac{n}{2}(p'-1)}}{1-\frac{n}{2}(p'-1)}\Big)^{\frac{p}{p'}} dx = C_1,$$

де $C_1 > 0$ – стала, бо останній інтеграл не має особливостей та виконується (див. (19) і умови леми) умова $\frac{n}{2}(p'-1) < 1$. Отож, твердження нашої леми випливає з теореми 1 для функції K спеціального вигляду. $\square$

Наслідок 1. *Якщо $p > 1 + \frac{n}{2}$, то з нерівності (13) та доведення леми 3 випливає існування такої сталої $\mathscr{M}_p > 0$, що для всіх $z \in L^p(Q_{0,T})$ виконується оцінка*

$$||\mathcal{J} z; L^p(Q_{0,T})|| \le \mathscr{M}_p ||z; L^p(Q_{0,T})||. \tag{22}$$

Тепер нагадаємо декілька оцінок.

Зауваження 4. Якщо $q \in (1,2]$, то для всіх $r, s \in \mathbb{R}$ виконуються оцінки

$$0 \le (|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s)(r-s) \le 2^{2-q}|r-s|^q, \tag{23}$$

$$|\,|r|^{q-2}r - |s|^{q-2}s\,| \le 2^{2-q}|r-s|^{q-1}. \tag{24}$$

При розгляді рівнянь зі змінними показниками нелінійності виникає потреба працювати з узагальненими просторами Лебега, які вперше введено у [19] (деякі властивості цих просторів вивчено у [20], [21], [22], [23]). Ми використовуватимемо техніку отримання деяких оцінок у цих просторах. Тому нагадаємо, що узагальненим простором Лебега $L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$ називається множина вимірних за Лебегом функцій $v : Q_{0,T} \to \mathbb{R}^1$, для яких $\rho_q(v, Q_{0,T}) < +\infty$, де $\rho_q(v, Q_{0,T}) = \int_{Q_{0,T}} |v(x,t)|^{q(x,t)}\, dxdt$. За виконання умови **(Q)** цей простір є ([20, с. 599, 600]) рефлексивним банаховим простором стосовно норми Люксембурга

$$||v; L^{q(x,t)}(Q_{0,T})|| = \inf\{\lambda > 0 \;:\; \rho_q(v/\lambda, Q_{0,T}) \le 1\}.$$

Крім того, виконуються неперервні вкладення $L^{q(x,t)}(Q_{0,T}) \circlearrowleft L^{r(x,t)}(Q_{0,T})$, якщо $q(x,t) \ge r(x,t)$ (див. [20, с. 599-600]).

Зауваження 5. (Лема 1 [22, с. 168], зауваження 3.1 [9, с. 453]). Нехай функція q задовольняє умову **(Q)**,

$$S_q(s) = \begin{cases} s^{q_0}, & s \in [0,1], \\ s^{q^0}, & s > 1, \end{cases} \qquad S_{1/q}(s) = \begin{cases} s^{1/q^0}, & s \in [0,1], \\ s^{1/q_0}, & s > 1, \end{cases}$$

де сталі q_0, q^0 взяті з **(Q)**. Тоді:

1) $||v; L^{q(x,t)}(Q_{0,T})|| \le S_{1/q}(\rho_q(v, Q_{0,T}))$ при $\rho_q(v, Q_{0,T}) < \infty$;

2) $\rho_q(v, Q_{0,T}) \le S_q(||v; L^{q(x,t)}(Q_{0,T})||)$ при $||v; L^{q(x,t)}(Q_{0,T})|| < \infty$.

Зараз нагадаємо узагальнену нерівність Гельдера (див. [21, с. 175]): для всіх функцій $u \in L^{q(x,t)}(Q_{0,T})$ та $v \in L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})$, де $1/q(x,t) + 1/q'(x,t) = 1$,

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |uv|\, dxdt \le 2||u; L^{q(x,t)}(Q_{0,T})|| \cdot ||v; L^{q'(x,t)}(Q_{0,T})||. \tag{25}$$

Далі доведемо деякі елементарні властивості оператора Немицького спеціального вигляду.

Лема 4. *Нехай виконуються умови* **(G)**, **(Q)** *зі сталою* $q^0 < 2$, $\mathcal{N}$ *– оператор Немицького, визначений формулою*

$$(\mathcal{N}z)(x,t) = g(x,t)|z(x,t)|^{q(x,t)-2}z(x,t), \quad (x,t) \in Q_{0,T}. \tag{26}$$

Тоді для кожного числа $p \in [1, +\infty)$ *оператор* $\mathcal{N} : L^p(Q_{0,T}) \to L^p(Q_{0,T})$ *є обмеженим і неперервним. Крім того, існує стала* $\mathscr{N}_p > 0$ *така, що для всіх* $u, v \in L^p(Q_{0,T})$ *виконуються оцінки*

$$||\mathcal{N}u - \mathcal{N}v; L^p(Q_{0,T})|| \le \mathscr{N}_p\Big\{S_{1/h}\Big(||u - v; L^p(Q_{0,T})||^p\Big)\Big\}^{1/p}, \tag{27}$$

$$||\mathcal{N}u; L^p(Q_{0,T})|| \le \mathscr{N}_p\Big\{S_{1/h}\Big(||u; L^p(Q_{0,T})||^p\Big)\Big\}^{\frac{1}{p}}, \tag{28}$$

де $S_{1/h}$ *– неперервна монотонно зростаюча функція з зауваження 5.*

Доведення. Доведемо спершу оцінку (27). Візьмемо довільні функції $u, v \in L^p(Q_{0,T})$. З нерівності (24) та умови **(G)** отримаємо

$$||\mathcal{N}u - \mathcal{N}v; L^p(Q_{0,T})||^p \le C_2 \int\limits_{Q_{0,T}} \Big| |u(x,t)|^{q(x,t)-2}u(x,t) - |v(x,t)|^{q(x,t)-2}v(x,t)\Big|^p\, dxdt \le$$

$$\le C_2 \int\limits_{Q_{0,T}} 2^{p(2-q(x,t))}|u(x,t) - v(x,t)|^{(q(x,t)-1)p}\, dxdt \le$$

$$\le C_2 2^{p(2-q_0)} \int\limits_{Q_{0,T}} |u(x,t) - v(x,t)|^{p(q(x,t)-1)}\, dxdt.$$

Тоді з узагальненої нерівності Гельдера (25) для функції $h(x,t) = \frac{1}{q(x,t)-1}$ замість $q(x,t)$ ($h > 1$ при $q < 2$) отримаємо

$$||\mathcal{N}u - \mathcal{N}v; L^p(Q_{0,T})||^p \le C_2 2^{p(2-q_0)} 2||1; L^{h'(x,t)}(Q_{0,T})|| \times$$

$$\times \big|\big|\, |u - v|^{p(q(x,t)-1)}; L^{h(x,t)}(Q_{0,T})\big|\big| = C_3 \big|\big|\, |u - v|^{p(q(x,t)-1)}; L^{h(x,t)}(Q_{0,T})\big|\big|, \tag{29}$$

де функція h' така, що $\frac{1}{h(x,t)} + \frac{1}{h'(x,t)} = 1$ майже скрізь в $Q_{0,T}$, стала C_3 не залежить від u, v. Тепер скористаємося оцінками з зауваження 5

$$\big|\big|\, |u - v|^{p(q(x,t)-1)}; L^{h(x,t)}(Q_{0,T})\big|\big| \le S_{1/h}(\rho_h(|u - v|^{p(q(x,t)-1)}, Q_{0,T})) =$$

$$= S_{1/h}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[|u - v|^{\frac{p}{h(x,t)}}\Big]^{h(x,t)}\, dxdt\Big) = S_{1/h}\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |u - v|^p\, dxdt\Big) =$$

$$= S_{1/h}\Big(||u-v;L^p(Q_{0,T})||^p\Big).$$

Тому з (29) одержимо (27).

З (27) для $v=0$ та очевидної рівності $\mathcal{N}0=0$ одержимо (28).

З оцінки (28) випливає, що оператор $\mathcal{N}$ діє з $L^p(Q_{0,T})$ в $L^p(Q_{0,T})$, зокрема він є обмеженим, бо $S_{1/h}$ – неперервна і монотонно зростаюча функція.

З оцінки (27) та того, що $S_{1/h}$ – неперервна і монотонно зростаюча функція випливає неперервність оператора Немицького, якщо $u^m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u$ в $L^p(Q_{0,T})$, то

$$||\mathcal{N}u^m-\mathcal{N}u;L^p(Q_{0,T})||\le \mathscr{N}_p\Big\{S_{1/h}\Big(||u^m-u;L^p(Q_{0,T})||^p\Big)\Big\}^{1/p} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Лему доведено. □

3. Основний результат. Повернемося до задачі (1)-(3). Спершу подамо означення її розв'язку.

Означення 2. *Слабким розв'язком задачі (1)-(3) називатимемо таку функцію $u\in L^p(Q_{0,T})$, яка майже для всіх $(x,t)\in Q_{0,T}$ задовольняє рівність*

$$u(x,t)=\int\limits_{\Omega} G(x,t,\xi,0)u_0(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} G(x,t,\xi,s)f(\xi,s)\,d\xi ds-$$

$$-\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} G(x,t,\xi,s)g(\xi,s)|u(\xi,s)|^{q(\xi,s)-2}u(\xi,s)\,d\xi ds, \qquad (30)$$

де G – функція Гріна першої мішаної задачі для рівняння (14).

Сформулюємо і доведемо таку теорему.

Теорема 3. *Якщо виконуються умови **(G)**, **(Q)** зі сталою $1<q^0<2$, **(UF)** зі сталою $p\in(1+\frac{n}{2},+\infty)$, то задача (1)-(3) має слабкий розв'язок.*

Доведення. Визначимо оператори $\mathcal{K}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{J}$, $\mathcal{A}$ так: $\mathcal{K}$ – тотожно сталий (див. (10)) оператор,

$$(\mathcal{K}z)(x,t)=\int\limits_{\Omega} G(x,t,\xi,0)u_0(\xi)\,d\xi+\int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} G(x,t,\xi,s)f(\xi,s)\,d\xi ds; \qquad (31)$$

$\mathcal{N}$ – нелінійний оператор Немицького з (26), $\mathcal{J}$ – лінійний інтегральний оператор з (20), $\mathcal{A}$ – комбінація операторів $\mathcal{K}$, $\mathcal{N}$, $\mathcal{J}$, а саме

$$\mathcal{A}=\mathcal{K}-\mathcal{J}\circ\mathcal{N}. \qquad (32)$$

Враховуючи введені позначення, рівність (30) набуде вигляду

$$u=\mathcal{A}u, \qquad (33)$$

тобто доведення існування слабкого розв'язку задачі (1)-(3) звелося до відшукання нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$. Доведемо виконання умов теореми Шаудера.

1) З теореми 1 та лем 2, 3 випливає, що $\mathcal{K}$ діє з $L^p(Q_{0,T})$ в $L^p(Q_{0,T})$. Аналогічно як оцінку (13) одержимо

$$||\mathcal{K}u; L^p(Q_{0,T})|| \le \mathscr{L}_1||u_0; L^p(\Omega)|| + \mathscr{L}_2||f; L^p(Q_{0,T})||, \quad u \in L^p(Q_{0,T}), \tag{34}$$

де $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2 > 0$ – деякі сталі. Як ми зазначали, тотожно сталий оператор цілком неперервний.

2) З леми 4 випливає, що $\mathcal{N} : L^p(Q_{0,T}) \to L^p(Q_{0,T})$ – неперервний і обмежений оператор. Крім того, одержали оцінки (27), (28).

Лема 3 і накладені на p умови доводять, що оператор $\mathcal{J} : L^p(Q_{0,T}) \to L^p(Q_{0,T})$ є цілком неперервним і обмеженим. Крім того, отримали оцінку (22).

З леми 1 та отриманих властивостей операторів $\mathcal{N}$, $\mathcal{J}$ одержимо, що $\mathcal{J} \circ \mathcal{N}$ цілком неперервний, як композиція цілком неперервного і неперервного та обмеженого операторів (див., також, [24, с. 235-236]). Отже, $\mathcal{A}$ цілком неперервний як сума цілком неперервних операторів $\mathcal{K}$ і $\mathcal{J} \circ \mathcal{N}$ (див. зауваження 1).

3) Зафіксуємо довільне мале $\varepsilon \in (0, \min\{\frac{1}{2}, 2-q^0\})$, де $q^0 \in (1,2)$ – стала з умови **(Q)**. Тоді $\varepsilon < \frac{1}{2}$, тобто $1 - 2\varepsilon > 0$. Крім того, $\varepsilon < 2 - q^0$, тому $2 - q^0 - \varepsilon > 0$.

Нехай $R > 0$ – таке велике число, що

$$R^\varepsilon \ge \max\{||u_0; L^p(\Omega)||, ||f; L^p(Q_{0,T})||, \mathscr{M}_p, \mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2, 1\}, \quad \frac{2}{R^{1-2\varepsilon}} + \frac{\mathscr{N}_p}{R^{2-q^0-\varepsilon}} \le 1, \tag{35}$$

де $\mathscr{M}_p$ – стала з (22), $\mathscr{L}_1, \mathscr{L}_2$ – сталі з (34), $\mathscr{N}_p$ – стала з (28),

$$B_R = \{u \in L^p(Q_{0,T}) \ \mid \ ||u; L^p(Q_{0,T})|| \le R\}.$$

Доведемо, що $\mathcal{A} : B_R \to B_R$. Приймемо $u \in B_R$. З оцінок (22), (34), (28), монотонності функції $S_{1/h}$ та вибору R і u отримаємо

$$||\mathcal{A}u; L^p(Q_{0,T})|| \le ||(\mathcal{K} - \mathcal{J}\circ\mathcal{N})(u); L^p(Q_{0,T})|| \le ||\mathcal{K}u; L^p(Q_{0,T})|| + ||\mathcal{J}(\mathcal{N}u); L^p(Q_{0,T})|| \le$$

$$\le ||\mathcal{K}u; L^p(Q_{0,T})|| + \mathscr{M}_p||\mathcal{N}u; L^p(Q_{0,T})|| \le \mathscr{L}_1||u_0; L^p(\Omega)|| + \mathscr{L}_2||f; L^p(Q_{0,T})|| +$$

$$+ \mathscr{M}_p\mathscr{N}_p\Big\{S_{1/h}\Big(||u; L^p(Q_{0,T})||^p\Big)\Big\}^{\frac{1}{p}} \le 2R^{2\varepsilon} + R^\varepsilon\mathscr{N}_p\Big\{S_{1/h}\Big(R^p\Big)\Big\}^{\frac{1}{p}}.$$

Оскільки $R > 1$, то з означення функції $S_{1/h}$ одержимо

$$S_{1/h}\Big(R^p\Big) = \Big(R^p\Big)^{\frac{1}{\text{ess inf}\, h(x,t)}} = \Big(R^p\Big)^{\frac{1}{\text{ess inf}\,\frac{1}{q(x,t)-1}}} = \Big(R^p\Big)^{\frac{1}{\frac{1}{q^0-1}}} = R^{p(q^0-1)}.$$

Тому з вибору R отримаємо оцінку

$$||\mathcal{A}u; L^p(Q_{0,T})|| \le 2R^{2\varepsilon} + \mathscr{N}_pR^{\varepsilon+q^0-1} = \Big(\frac{2}{R^{1-2\varepsilon}} + \frac{\mathscr{N}_p}{R^{2-q^0-\varepsilon}}\Big)R \le R.$$

Отже, $\mathcal{A} : B_R \to B_R$. В пункті 2 ми нагадали, що цей оператор цілком неперервний. Тому $\mathcal{A}$ задовольняє умови теореми Шаудера. Отож, існує $u \in L^p(Q_{0,T})$ – нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ і слабкий розв'язок задачі (1)-(3). □

Зауваження 6. Користуючись методом монотонності, за умови $g(x,t) \ge 0$ стандартно отримуємо єдиність узагальненого розв'язку u задачі (1)-(3) в класі функцій $L^2(0,T; H_0^1(\Omega)) \cap C([0,T]; L^2(\Omega))$ (зазначимо, що належність цьому простору розв'язку u з теореми 1 ми тут не стверджуємо).

Зауваження 7. Результати теореми 1 можна поширити на другу і третю мішані задачі для рівняння (1) та його узагальнень.

4. Висновки. Знайдено умови існування слабкого розв'язку першої мішаної задачі для півлінійного параболічного рівняння (1) зі змінним степенем нелінійності. Цей степінь задовольняє лише умову **(Q)**.

Список використаної літератури

1. *Алхутов Ю.А.* Параболические уравнения с переменным порядком нелинейности / *Алхутов Ю.А., Антонцев С.Н., Жиков В.В.* // Збірник праць Ін-ту математики НАН України. – 2009. – Т. 6, № 1. – С. 23-50.
2. *Zhikov V.V.* Lemmas on compensated compactness in elliptic and parabolic equations / *Zhikov V.V., Pastukhova S.E.* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2010. – Vol. 270. – P. 104–131.
3. *Kováčik O.* Parabolic equations in generalized Sobolev spaces $W^{k,p(x)}$ / *Kováčik O.* // Fasciculi Mathematici. – 1995. – №25. – P. 87-94.
4. *Бокало М.М.* Про властивості розв'язків задачі без початкових умов для рівнянь, що узагальнюють рівняння політропної фільтрації / *Бокало М.М., Сікорський В.М.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1998. – Вип. 51. – С. 85-98.
5. *Бокало М.М.* Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / *Бокало М.М., Паучок І.Б.* // Матем. студії. – 2006. – Т. 24, № 1. – С. 25-48.
6. *Бугрій О.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації / *Бугрій О., Лавренюк С.* // Вісн. Львів ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С.33-43.
7. *Бугрій О.М.* Параболічна варіаційна нерівність, що узагальнює рівняння політропної фільтрації / *Бугрій О.М., Лавренюк С.П.* // Укр. мат. журн. – 2001. – Т. 53, №7. – С. 867-878.
8. *Buhrii O.M.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *Buhrii O.M., Mashiyev R.A.* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. – 2009. – Vol. 70, №6. – P. 2335-2331.
9. *Mashiyev R.A.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *Mashiyev R.A., Buhrii O.M.* // J. Math. Anal. Appl. – 2011. – Vol. 377. – P. 450-463.
10. *Хатсон В.* Приложения функционального анализа и теории операторов / *Хатсон В., Пим Дж.* – М.: Мир, 1983.
11. *Schauder J.* Der Fixpunktsatz in Funftionalraumen / *Schauder J.* // Studia Mathematica (Lwow). – 1930. – Vol. 2. – P. 171-180.
12. Математическая энциклопедия. В 5 т. / гл. ред. И. М. Виноградов, Т. 1. – М.: Советская энциклопедия, 1984. — 1140 с.
13. *Соболевский П.Е.* Оценки функции Грина уравнений в частных производных второго порядка параболического типа / *Соболевский П.Е.* // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 138, №2. – С. 313-316.
14. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы. / *Эйдельман С.Д.* – М., 1964.
15. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач / *Ивасишен С.Д.* – К.: Вища шк., 1990.
16. *Матийчук М.И.* О параболических системах с коеффициентами, удовлетворяющими условию Дини / *Матийчук М.И., Эйдельман С.Д.* // Докл. АН СССР. – 1965. – Т. 165. – С. 482-485.

17. *Лопушанская Г.П.* О решении с помощью матрицы Грина параболеской граничной задачи в пространстве обобщенных функций / *Лопушанская Г.П.* // Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38, №6. – С. 795-798.
18. *Agase S.B.* Existence of mild solutions of semilinear differential equations in Banach spaces / *Agase S.B., Raghavendra V.* // Indian J. Pure Appl. Math. – 1990. – Vol. 21 (9). – P. 813-821.
19. *Orlicz W.* Uber Konjugierte Exponentenfolgen / *Orlicz W.* // Studia Mathematica (Lwow). – 1931. – Vol. 3. – P. 200-211.
20. *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}$ and $W^{1,p(x)}$ / *Kováčik O., Rakosnik J.* // Czechoslovak Math. J. – 1991. – 41 (116). – P. 592-618.
21. *Fan X.* Existence and multiplicity of solutions for $p(x)$-Laplacian equations in $\mathbb{R}^n$ / *Fan X., Han X.* // Nonlinear Analysis. – 2004. – Vol. 59. – P. 173-188.
22. *Бугрій О.М.* Скінченність часу стабілізації розв'язку нелінійної параболічної варіаційної нерівності зі змінним степенем нелінійності / *Бугрій О.М.* // Матем. студії. – 2005. – Т. 24, №2. – С. 167-172.
23. *Бугрій О.* Мішана задача для нелінійного рівняння третього порядку в узагальнених просторах Соболєва / *Бугрій О., Доманська Г., Процах Н.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 44-61.
24. *Красносельский М.А.* Выпуклые функции и пространства Орлича / *Красносельский М.А., Рутицкий Я.Б.* – М., 1958.

Стаття: надійшла до редакції 11.11.2011
прийнята до друку 12.12.2011

ON EXISTENCE OF THE MILD SOLUTION OF THE INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR MODEL SEMILINEAR PARABOLIC EQUATION WITH VARIABLE EXPONENT OF NONLINEARITY

Oleh BUHRII

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

The initial-boundary value Dirichlet problem for equation

$$u_t - \Delta u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t)$$

in cylinder domain is considered. If condition $1 < q_0 \le q(x,t) \le q^0 < 2$ is satisfied, then the existence of the mild solution of this problem is proved.

Key words: nonlinear parabolic equation,initial-boundary value problem, variable exponent of nonlinearity, generalized Lebesque and Sobolev spaces, mild solution, Green's function.

О СУЩЕСТВОВАНИИ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ СМЕШАНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ МОДЕЛЬНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ СТЕПЕНЕМ НЕЛИНЕЙНОСТИ

Олег БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Исследовано смешаную задачу Дирихле для уравнения

$$u_t - \Delta u + g(x,t)|u|^{q(x,t)-2}u = f(x,t)$$

в цилиндрической области. При условии $1 < q_0 \le q(x,t) \le q^0 < 2$ доказано существование слабого решения этой задачи.

Ключевые слова: нелинейное параболическое уравнение, смешаная задача, переменный степень нелинейности, обобщённые пространства Лебега и Соболева, слабое решение, функция Грина.