ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 74–78
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 74–78

УДК 517.53

ДЕЯКІ ВЛАСТИВОСТІ ГОЛОМОРФНИХ У ПІВСМУЗІ ФУНКЦІЙ

Андрій БРИДУН[1], Наталія СОКУЛЬСЬКА[2]

[1] *Національний університет "Львівська політехніка",*
вул. Карпінського, 6, Львів, 79013
e-mail: a_brydun@yahoo.com
[2] *Львівська комерційна академія,*
вул. Туган-Барановського, 10, Львів, 79005
e-mail: natalia_sokulska@yahoo.com

Вивчено властивості голоморфних у півсмузі функцій, дійснозначних на частині її межі.

Ключові слова: голоморфна функція, нулі функції, формула Карлемана.

1. Вступ. Допоміжні поняття та твердження. Використовуючи аналог рівності Карлемана [1] для прямокутника та одну з теорем, доведену в [2], ми досліджуємо властивості голоморфних у півсмузі функцій за умови їхньої дійснозначності на частині межі.

Нехай функція f мероморфна в замиканні прямокутника $R_x = \{z = t + iy : x_0 < t < x,\ 0 < y < \pi\}$, $\{\rho_q\}$ – послідовність нулів функції f в R_x, занумерованих в порядку неспадання їхніх дійсних частин, $\rho_q = \beta_q + i\gamma_q$; $\{\omega_p\}$ – послідовність полюсів функції f в R_x, занумерованих аналогічно, $\omega_p = \xi_p + i\eta_p$.

Функцію $\log f(z)$ визначимо в

$$R_x^* = R_x \backslash \bigcup_j (\{t\beta_j + i\gamma_j : t \geq 1\} \cup \{t\xi_j + i\eta_j : t \geq 1\})$$

і на ∂R_x за винятком нулів та полюсів, що лежать на ∂R_x, співвідношенням

$$\log f(z) = \log f(z^*) + \int_{z^*}^{z} \frac{f'(\zeta)}{f(\zeta)}\, d\zeta, \tag{1}$$

вибравши деяке $z^* \in R_x^*$ та деяке значення $\log f(z^*)$. Інтеграл беремо за деяким шляхом в R_x^* з початком у точці z^* і кінцем у точці z.

У випадку дійснозначності голоморфної функції на одній зі сторін прямокутника за допомогою теореми з [3] була доведена така теорема.

Теорема А. **([2]).** *Нехай функція f, $f(z) \not\equiv 0$, голоморфна в замиканні прямокутника $R_x = \{z = t + iy : x_0 < t < x, 0 < y < \pi\}$ і дійснозначна на проміжку $I_0 = \{z : z = x_0 + iy, 0 \le y \le \pi\}$. Тоді*

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \left(\frac{1}{e^{\beta_q}} - \frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}} \right) \sin \gamma_q + \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{Re}\rho_q = x_0} \left(\frac{1}{e^{x_0}} - \frac{e^{x_0}}{e^{2x}} \right) \sin \gamma_q =$$

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x} (\log |f(t)| + \log |f(t + i\pi)|) \left(\frac{1}{e^t} - \frac{e^t}{e^{2x}} \right) dt+ \tag{2}$$

$$+\frac{1}{\pi e^x} \int_0^\pi \log |f(x + iy)| \sin y \, dy - \frac{\mathrm{ch}(x - x_0)}{\pi \, e^x} \int_0^\pi \log |f(x_0 + iy)| \sin y \, dy.$$

2. Основні результати. Приймемо $M(x) = \max \left\{ |f(z)| : z \in \overline{R_x} \right\}; R = R_x$, при $x = +\infty$.

Використовуючи теорему А, доведемо таку теорему.

Теорема 1. *Нехай функція f, $f \not\equiv 0$, голоморфна в $\overline{R}$, дійснозначна на I_0, і $\log M(t) \le Ce^{\alpha t}$, $x_0 \le t$, $C = const$, $0 \le \alpha < 1$. Тоді*

$$\sum_{\rho_q \in R} e^{x_0 - \beta_q} \sin \gamma_q + \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{Re}\rho_q = x_0} \sin \gamma_q \le$$

$$\le \frac{1}{\pi} \, e^{(\alpha - 1)x_0} \left(C - \frac{1}{2} \int_0^\pi \log |f(x_0 + iy)| \sin y \, dy \right). \tag{3}$$

Доведення. Правий бік (2) оцінюють так:

$$\frac{1}{2\pi} \int_{x_0}^{x} (\log |f(t)| + \log |f(t + i\pi)|) \left(\frac{1}{e^t} - \frac{e^t}{e^{2x}} \right) dt+$$

$$+\frac{1}{\pi e^x} \int_0^\pi \log |f(x + iy)| \sin y \, dy - \frac{\mathrm{ch}(x - x_0)}{\pi \, e^x} \int_0^\pi \log |f(x_0 + iy)| \sin y \, dy \le$$

$$\le \frac{C}{\pi} \left(\frac{1}{\alpha - 1} \left(e^{(\alpha-1)x} - e^{(\alpha-1)x_0} \right) - \frac{1}{\alpha + 1} \left(e^{(\alpha-1)x} - e^{(\alpha+1)x_0 - 2x} \right) \right) + \tag{4}$$

$$+\frac{2Ce^{\alpha t}}{\pi e^x} - \frac{\mathrm{ch}(x - x_0)}{\pi \, e^x} \int_0^\pi \log |f(x_0 + iy)| \sin y \, dy.$$

Спрямувавши x до $+\infty$, одержимо правий бік (3). Розглянемо тепер першу суму лівого боку (2).

Якщо $\beta_q < \dfrac{x}{2} - \log \sqrt{2}$, то

$$\frac{1}{e^{\beta_q}} - \frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}} \ge \frac{1}{2e^{\beta_q}},$$

$$\frac{1}{2}\sum_{\beta_q<\frac{x}{2}-\log\sqrt{2}}\frac{\sin\gamma_q}{e^{\beta_q}}<\sum_{\rho_q\in R_x}\left(\frac{1}{e^{\beta_q}}-\frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}}\right)\sin\gamma_q.$$

Тому з (2) та (4) випливає, що ряд

$$\sum_q\frac{\sin\gamma_q}{e^{\beta_q}}\tag{5}$$

збігається. Отже,

$$\sum_{\rho_q\in R_x}\frac{\sin\gamma_q}{e^{\beta_q}}-\sum_{\rho_q\in R_x}\frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}}\sin\gamma_q+\frac{1}{2}\sum_{\operatorname{Re}\rho_q=x_0}\left(\frac{1}{e^{x_0}}-\frac{e^{x_0}}{e^{2x}}\right)\sin\gamma_q\le$$

$$\le\frac{1}{\pi}e^{(\alpha-1)x_0}\left(C-\frac{1}{2}\int\limits_0^\pi\log|f(x_0+iy)|\sin y\,dy\right).\tag{6}$$

Для довільного ξ, $x_0<\xi<x$, отримаємо

$$\sum_{\rho_q\in R_x}\frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}}\sin\gamma_q=\sum_{x_0\le\beta_q\le\xi}\frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}}\sin\gamma_q+\sum_{\xi<\beta_q\le x}\frac{e^{2\beta_q}}{e^{2x}}\frac{\sin\gamma_q}{e^{\beta_q}}.\tag{7}$$

Остання сума не перевищує

$$\sum_{\xi<\beta_q}\frac{\sin\gamma_q}{e^{\beta_q}}.\tag{8}$$

Для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться $\xi(\varepsilon)$ таке, що при $\xi=\xi(\varepsilon)$ сума ряду (8) не менша ніж ε, що випливає зі збіжності ряду (5). Відтак, з (7) випливає нерівність

$$0\le\sum_{\rho_q\in R_x}\frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}}\sin\gamma_q<\frac{1}{e^{2x}}\sum_{x_0<\beta_q\le\xi(\varepsilon)}e^{\beta_q}\sin\gamma_q+\varepsilon,\quad \xi(\varepsilon)<x.$$

Переходячи в ній до границі при $x\to+\infty$ і враховуючи довільність ε, одержуємо

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\sum_{\rho_q\in R_x}\frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}}\sin\gamma_q\right)=0.$$

Отже, з (6) випливає (3). □

Зауваження 1. При $\alpha=1$ висновок теореми не справджується.

Доведення. Доведемо це. Візьмемо $x_0=0$ і розглянемо функцію $f(z)=\operatorname{ch}(\pi\operatorname{ch}z)$:
1) $f(z)=\operatorname{ch}(\pi\operatorname{ch}z)$ – голоморфна в $\overline{R}$;
2) $\operatorname{ch}(\pi\operatorname{ch}iy)=\operatorname{ch}(\pi\cos y)$ – дійснозначна;
3) оскільки $\operatorname{ch}z=O\left(e^{|z|}\right)$, $z\to\infty$, і при $z\in\overline{R}$ виконується $\operatorname{Re}z\sim|z|$, $z\to\infty$, то $\log|f(t+iy)|=O\left(e^t\right)$, $t\to\infty$, тобто умови теореми виконуються при $\alpha=1$. Але нулі функції f в R мають вигляд

$$\rho_q=\log\frac{1+2q+\sqrt{(1+2q)^2+4}}{2}+i\frac{\pi}{2},\quad q\in\mathbb{N}.$$

Отже, ряд (5) розбігається, що суперечить висновку, одержаному з (2) та (3) при доведенні теореми.

Отож, ми довели, що теорема не справджується при $\alpha = 1$. $\square$

Зауваження 2. Нехай функція f, $f \not\equiv 0$, голоморфна в $\overline{R}_x$ і дійснозначна на I_0, $M(x) = \max\left\{|f(z)| : z \in \overline{R}_x\right\}$. Тоді

$$\sum_{\rho_q \in R_x} \left(\frac{1}{e^{\beta_q}} - \frac{e^{\beta_q}}{e^{2x}} \right) \sin\gamma_q + \frac{1}{2} \sum_{\mathrm{Re}\rho_q = x_0} \left(\frac{1}{e^{x_0}} - \frac{e^{x_0}}{e^{2x}} \right) \sin\gamma_q \le$$
$$\le \frac{\mathrm{ch}(x - x_0)}{\pi e^x} \left(2\log M(x) - \int_0^\pi \log|f(x_0 + iy)| \sin y \, dy \right). \tag{9}$$

Справді, застосуємо теорему А до функції $\dfrac{f(z)}{M(x)}$. Враховуючи, що $\left|\dfrac{f(z)}{M(x)}\right| \le 1$ в $\overline{R}_x$, з (2) одержуємо (9).

Наслідок 1. *Нехай функція f, $f \not\equiv 0$, голоморфна у замиканні півплощини $\mathcal{H} = \{z : \mathrm{Re}\, z > 0\}$, дійснозначна на $(-1, 1)$ і обмежена в $\overline{\mathcal{H}}$ сталою C. Тоді*

$$\sum_{\mathrm{Im}\, z_n > 0} \mathrm{Im}\left(\sqrt{z_n^2 - 1} - z_n \right) + \sum_{-1 < x_n < 1} \sqrt{1 - x_n^2} \le$$
$$\le \frac{1}{\pi} \left(\log C - \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} \log|f(x)| \, dx \right), \tag{10}$$

де $z_n = x_n + iy_n$ – нулі функції f і гілка $\sqrt{z^2 - 1}$ в $\mathbb{C}$ з розрізом $[-1, 1]$ визначена так, що $\sqrt{-4} = 2i$.

Умова (10) уточнює необхідну умову Бляшке

$$\sum_n \frac{\mathrm{Im}\, z_n}{1 + |z_n|^2} < +\infty \tag{11}$$

для функцій, які задовольняють умови наслідку, бо (11) випливає з (10). Справді, при $\mathrm{Im}\, z_n > 0$ отримаємо

$$\sqrt{z_n^2 - 1} - z_n \sim -\frac{1}{2\, z_n}, \qquad z_n \to \infty,$$

$$2\frac{\mathrm{Im}\, z_n}{1 + |z_n|^2} \le \mathrm{Im}\left(\frac{-1}{z_n} \right) = \frac{\mathrm{Im}\, z_n}{|z_n|^2}.$$

Доведення. Для доведення наслідку зауважимо, що при $x_0 = 0$ півсмуга R відображається в $\mathcal{H}$ функцією $\mathrm{ch}\, z$. Співвідношення (10) одержується з (3) заміною змінної. $\square$

Список використаної літератури

1. *Гольдберг А.А.* Распределение значений мероморфных функций. / *Гольдберг А.А., Островский И.В.* – М., 1970.
2. *Brydun A.M.* A version of Carleman formula and summation of the Riemann ζ-function on the critical line / *Brydun A.M., Yatsulka P.A.* // Mat. Stud. – 2011. – Vol. 35. – P. 3-9.
3. *Бридун А.М.* Характеристика і перша основна теорема Неванлінни для мероморфних у півсмузі функцій / *Бридун А.М.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2004. – Вип. 63. – С. 32-43.

Стаття: надійшла до редакції 19.01.2011
прийнята до друку 14.12.2011

SOME PROPERTIES OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS IN A HALF-STRIP

Andrii BRYDUN[1], **Nataliya SOKUL'S'KA**[2]

[1]*Lviv Polytechnic National University,*
Karpinskyi Str., 6, Lviv, 79013
e-mail: a_brydun@yahoo.com
[2]*Lviv Academy of Commerce,*
Tuhan-Baranovskyi Str., 10, Lviv, 79005
e-mail: natalia_sokulska@yahoo.com

In this article we investigate some properties of holomorphic functions which are real-valued on the part of the boundary.

Key words: holomorphic function, zeroes of function, Carleman formula.

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ГОЛОМОРФНЫХ В ПОЛУПОЛОСЕ ФУНКЦИЙ

Андрей БРИДУН[1], **Наталия СОКУЛЬСКАЯ**[2]

[1]*Национальный университет "Львовская политехника",*
ул. Карпинского, 6, Львов, 79013
e-mail: a_brydun@yahoo.com
[2]*Львовская коммерческая академия,*
ул. Туган-Барановского, 10, Львов, 79005
e-mail: natalia_sokulska@yahoo.com

Изучено свойства голоморфных в полуполосе функций.

Ключевые слова: голоморфная функция, нули функции, формула Карлемана.