ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 59–73*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 59–73

УДК 519.218.31

СИСТЕМА $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ З ДВОПОРОГОВИМ РЕГУЛЮВАННЯМ ЧЕРГИ

Микола БРАТІЙЧУК[1], Юрій ЖЕРНОВИЙ[2]

[1] *Шльонський політехнічний університет,*
вул. Кашубська, 23, Глівіце, 44-100
[2] *Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська 1, Львів, 79000
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Для системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ блокування вхідного потоку починається, якщо в момент початку обслуговування чергового замовлення кількість замовлень у системі $\xi(t)$ задовольняє умову $\xi(t) > h_2$ і припиняється, якщо $\xi(t) \le h_1$, де $h_1 \le h_2$. Знайдено перетворення Лапласа для розподілу кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості та для функції розподілу періоду зайнятості, визначена середня тривалість періоду зайнятості. Отримано формули для стаціонарного розподілу кількості замовлень у системі та стаціонарних характеристик. Розглянуто приклад розв'язання задачі оптимального вибору параметрів h_1 і h_2.

Ключові слова: система $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, двопорогове блокування вхідного потоку, період зайнятості, стаціонарні характеристики.

1. Вступ. Застосування порогових стратегій вхідного потоку в системах обслуговування завдяки оптимальному вибору порогів блокування дає змогу підвищити ефективність роботи системи, зокрема, зменшити довжину черги, суттєво не погіршуючи інших важливих показників ефективності системи.

Розглянемо систему обслуговування $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, яку формально опишемо послідовностями незалежних випадкових величин $\{\alpha_n\}, \{\theta_n\}, \{\beta_n\}$ $(n \geqslant 1)$, де α_n – час між надходженням $(n-1)$-ї та n-ї групи замовлень, θ_n – кількість замовлень в n-й групі, а β_n – час обслуговування n-го замовлення, причому $\mathbf{P}\{\alpha_n < x\} = 1 - e^{-\lambda x}$ $(\lambda > 0)$, $\mathbf{P}\{\theta_n = i\} = a_i$ $(i \geqslant 1)$, і $\mathbf{P}\{\beta_n < x\} = F(x)$ $(x \geqslant 0)$, $F(0) = 0$. Якщо $\mathbf{P}\{\theta_n = 1\} = a_1 = 1$, то замовлення в систему надходять по одному.

Замовлення обслуговуються по одному, обслужене замовлення покидає систему, а обслуговуючий пристрій негайно починає обслуговувати замовлення з черги за її наявності або чекає надходження чергової групи замовлень. Застосовується дисципліна обслуговування FIFO. Черга всередині однієї групи замовлень може бути організована довільно.

Нехай m – максимальна кількість замовлень, які одночасно можуть перебувати у черзі. Отже, якщо в систему, в якій вже є $k \in [0,\, m+1]$ замовлень, надходить група кількістю θ_n замовлень, то лише $\min\{\theta_n,\, m+1-k\}$ з них приєднуються до черги, а решта втрачаються.

Позначимо через $\xi(t)$ кількість замовлень у системі в момент часу t і введемо для нашої системи $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ два пороги: $h_1 \le h_2$. Якщо t – момент початку обслуговування чергового замовлення і $\xi(t) > h_2$ ($h_2 = \overline{1,\, m-1}$), то під час обслуговування цього замовлення відбувається блокування вхідного потоку замовлень (вони не допускаються на вхід системи). Процес надходження замовлень відновлюється в момент t початку обслуговування чергового замовлення, для якого $\xi(t) \le h_1$ ($h_1 = \overline{1,\, m-1}$). Описану систему позначимо через $\mathrm{M}^\theta_{h_1,h_2}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$.

Якщо $h_1 = h_2 = h$, то отримаємо систему обслуговування $\mathrm{M}^\theta_h/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ з одним порогом блокування, яку вивчено в [1]. Систему $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, для якої $h_1 < h_2 = m-1$, розглянуто у [2]. Автор назвав її системою з відновлюючим рівнем вхідного потоку. Якщо ж $h_1 = h_2 = m$, то одержимо систему з обмеженою чергою $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$.

Мета нашої праці – за допомогою методу потенціалу В. С. Королюка [3] вивчити головні функціонали від процесу обслуговування системи $\mathrm{M}^\theta_{h_1,h_2}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ (період зайнятості, розподіл кількості замовлень у системі) і отримаємо формули для стаціонарних характеристик систем $\mathrm{M}^\theta_{h_1,h_2}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ і $\mathrm{M}^\theta_{h_1,h_2}/\mathrm{G}/1/\infty$.

2. Розподіл кількості замовлень у системі під час періоду зайнятості. Використовуватимемо всі позначення та допоміжні результати, наведені у п. 2 [1]. Зокрема, нагадаємо, що $\rho = \lambda m_1 b_1$, $a(s,\, z) = s + \lambda\bigl(1-\alpha(z)\bigr)$; $\eta(x)$ – кількість замовлень, які надійшли за час x; a_i^{k*} – k-кратна згортка послідовності a_i;

$$f(s) = \int_0^\infty e^{-sx} dF(x), \quad m_1 = \int_0^\infty x dF(x) < \infty, \quad b_1 = \sum_{k=1}^\infty k a_k < \infty, \quad \alpha(z) = \sum_{k=1}^\infty z^k a_k;$$

$$p_i(s) = \frac{1}{f(s)} \sum_{k=0}^{i+1} a_{i+1}^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, dF(x) \qquad (\, i \ge -1);$$

$$q_i(s) = \int_0^\infty e^{-sx}\, \mathbf{P}\{\eta(x) = i\,\}\, \overline{F}(x)\, dx = \sum_{k=0}^{i} a_i^{k*} \int_0^\infty e^{-(\lambda+s)x} \frac{(\lambda x)^k}{k!}\, \overline{F}(x)\, dx \quad (i \ge 0);$$

$$\overline{F}(x) = 1 - F(x), \qquad \overline{a}_n = \sum_{k=n}^\infty a_k, \qquad \overline{p}_n(s) = \sum_{k=n}^\infty p_k(s), \qquad \overline{q}_n(s) = \sum_{k=n}^\infty q_k(s).$$

Нехай $\tau(m) = \inf\{\, t \ge 0 : \xi(t) = 0\,\}$ позначає перший період зайнятості для системи $\mathrm{M}^\theta_{h_1,h_2}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, і

$$\varphi_n(t,\, k) = \mathbf{P}_n\{\, \xi(t) = k,\ \tau(m) > t\,\} \qquad (\, 1 \le n,\, k \le m+1\,),$$

$$\Phi_n(s,\, k) = \int_0^\infty e^{-st} \varphi_n(t,\, k)\, dt, \qquad \mathrm{Re}\, s > 0,$$

де $\mathbf{P}_n$ – умовна ймовірність за умови, що в початковий момент часу в системі перебуває $n \ge 0$ замовлень.

Очевидно, що $\varphi_0(t,\,k)=0$. Використовуючи формулу повної ймовірності, одержимо такі співвідношення:

$$\begin{aligned}\varphi_n(t,\,k)&=\sum_{j=0}^{m-n}\int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x)=j\,\}\,\varphi_{n+j-1}(t-x,\,k)\,dF(x)+\\&+\int_0^t \mathbf{P}\{\eta(x)\geq m+1-n\,\}\,\varphi_m(t-x,\,k)\,dF(x)+\big(P\{\eta(t)=k-n\,\}+\\&+I\{k=m+1\}\mathbf{P}\{\eta(t)\geq m+2-n\,\}\big)\overline{F}(t),\quad 1\leq n\leq h_2;\end{aligned}\tag{1}$$

$$\begin{aligned}\varphi_n(t,\,k)&=\int_0^t \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n-h_1}\beta_i\in dx\Big\}\varphi_{h_1}(t-x,\,k)+I\{h_1+1\leq k\leq n-1\}\times\\&\times\int_0^t \mathbf{P}\Big\{\sum_{i=1}^{n-k}\beta_i\in dx\Big\}\,\overline{F}(t-x)+I\{k=n\}\overline{F}(t),\quad h_2+1\leq n\leq m+1.\end{aligned}\tag{2}$$

Тут $I\{A\}$ дорівнює 1 або 0, залежно від того відбулась подія A чи ні.

Перейдемо в (1) і (2) до перетворень Лапласа. Враховуючи співвідношення (2) [1], одержимо рівняння для визначення функцій $\Phi_n(s,\,k)$

$$\begin{aligned}\Phi_n(s,\,k)&=f(s)\sum_{j=0}^{m-n}p_{j-1}(s)\Phi_{n+j-1}(s,\,k)+f(s)\overline{p}_{m-n}(s)\Phi_m(s,\,k)+\\&+q_{k-n}(s)+I\{k=m+1\}\overline{q}_{m+2-n}(s),\qquad 1\leq n\leq h_2,\end{aligned}\tag{3}$$

$$\begin{aligned}\Phi_n(s,\,k)&=f^{n-h_1}(s)\Phi_{h_1}(s,\,k)+\\&+I\{h_1+1\leq k\leq n\}f^{n-k}(s)\frac{1-f(s)}{s},\qquad h_2+1\leq n\leq m+1,\end{aligned}\tag{4}$$

з граничною умовою

$$\Phi_0(s,\,k)=0.\tag{5}$$

Виразивши з (4) всі $\Phi_n(s,\,k)$ для $h_2+1\leq n\leq m$ і підставивши їх у співвідношення (3), отримаємо рівняння

$$\begin{aligned}\Phi_n(s,\,k)-f(s)&\sum_{j=-1}^{h_2-n-1}p_j(s)\Phi_{n+j}(s,\,k)=\\&=f(s)L_n(s)\Phi_{h_1}(s,\,k)+f(s)p_{h_2-n}(s)\Phi_{h_2}(s,\,k)+M_n(s,\,k),\quad 1\leq n\leq h_2.\end{aligned}\tag{6}$$

Тут

$$L_n(s) = f^{m-h_1}(s)\overline{p}_{m-n}(s) + \sum_{j=h_2+1}^{m-1} p_{j-n}(s) f^{j-h_1}(s);$$

$$M_n(s,\, k) = q_{k-n}(s) + I\{k = m+1\}\overline{q}_{m+2-n}(s) + \Bigg(I\{h_1+1 \le k \le m\}\overline{p}_{m-n}(s)\times$$
$$\times f^{m+1-k}(s) + \sum_{j=h_2+1}^{m-1} p_{j-n}(s) f^{j+1-k}(s) I\{h_1+1 \le k \le j\}\Bigg)\frac{1-f(s)}{s}.$$

Шукаючи розв'язки системи рівнянь (6) так, як у [1], отримаємо

$$\begin{aligned} \Phi_n(s,\, k) = r_{h_2-n}(s)\Phi_{h_2}(s,\, k) - f(s)\sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s) L_{n+i}(s)\Phi_{h_1}(s,\, k) - \\ - \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s) M_{n+i}(s,\, k), \qquad 1 \le n \le h_2, \end{aligned} \tag{7}$$

де

$$r_n(s) = R_n(s) - f(s)\sum_{i=1}^{n} R_i(s) p_{n-i}(s);$$

а функції $R_k(s)$ визначено за допомогою рівності

$$\sum_{k=1}^{\infty} z^k R_k(s) = \frac{z}{f\big(a(s,z)\big) - z}, \qquad |z| < \nu_-(s).$$

Тут $\nu_-(s)$ – єдиний корінь рівняння $f\big(a(s,z)\big) = z$ на проміжку $[0;\, 1]$; $R_0(s) \equiv 1$.

Прийнявши в (7) спочатку $n = h_1$, потім $n = 0$, враховуючи граничну умову (5), одержимо систему двох лінійних рівнянь стосовно $\Phi_{h_1}(s,\, k)$ і $\Phi_{h_2}(s,\, k)$

$$\begin{aligned} \Delta_1(s)\Phi_{h_1}(s,\, k) - r_{h_2-h_1}(s)\Phi_{h_2}(s,\, k) = -\sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i(s) M_{h_1+i}(s,\, k); \\ - f(s)\sum_{i=1}^{h_2} R_i(s) L_i(s)\Phi_{h_1}(s,\, k) + r_{h_2}(s)\Phi_{h_2}(s,\, k) = \sum_{i=1}^{h_2} R_i(s) M_i(s,\, k), \end{aligned} \tag{8}$$

де

$$\Delta_1(s) = 1 + f(s)\sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i(s) L_{h_1+i}(s).$$

Розв'язавши систему (8), знайдемо

$$\begin{aligned} \Phi_{h_1}(s,\, k) = \frac{1}{\Delta(s)}\left(r_{h_2-h_1}(s)\sum_{i=1}^{h_2} R_i(s) M_i(s,\, k) - r_{h_2}(s)\sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i(s) M_{h_1+i}(s,\, k)\right); \\ \Phi_{h_2}(s,\, k) = \frac{1}{\Delta(s)}\sum_{i=1}^{h_2} R_i(s)\left(\Delta_1(s) M_i(s,\, k) - f(s) L_i(s)\sum_{j=1}^{h_2-h_1} R_j(s) M_{h_1+j}(s,\, k)\right), \end{aligned} \tag{9}$$

де

$$\Delta(s) = \Delta_1(s) r_{h_2}(s) - f(s) r_{h_2-h_1}(s) \sum_{i=1}^{h_2} R_i(s) L_i(s).$$

Отже, ми довели таке твердження.

Теорема 1. *Для системи обслуговування* $M^{\theta}_{h_1,h_2}/G/1/m$ *виконуються такі співвідношення:*

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}_n\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt = r_{h_2-n}(s)\Phi_{h_2}(s,\,k) -$$

$$- f(s)\sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s) L_{n+i}(s)\Phi_{h_1}(s,\,k) - \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s) M_{n+i}(s,\,k), \qquad 1\le n\le h_2-1;$$

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}_n\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt = f^{n-h_1}(s)\Phi_{h_1}(s,\,k) +$$

$$+ I\{h_1+1\le k\le n\} f^{n-k}(s)\frac{1-f(s)}{s}, \qquad h_2+1\le n\le m+1,$$

де $1\le k\le m+1$, $\mathrm{Re}\, s>0$, *а функції* $\Phi_{h_1}(s,\,k)$ *і* $\Phi_{h_2}(s,\,k)$ *визначені в (9).*

3. Період зайнятості та стаціонарний розподіл для систем $\mathbf{M^{\theta}_{h_1,h_2}/G/1/m}$ і $\mathbf{M^{\theta}_{h_1,h_2}/G/1/\infty}$. Якщо система $M^{\theta}_{h_1,h_2}/G/1/m$ починає працювати в момент надходження першої групи замовлень, то

$$\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt = \sum_{n=1}^{m} a_n\Phi_n(s,\,k) + \overline{a}_{m+1}\Phi_{m+1}(s,\,k) =$$

$$= \sum_{n=1}^{h_2} a_n r_{h_2-n}(s)\Phi_{h_2}(s,\,k) - \Phi_{h_1}(s,\,k)\Bigg(f(s)\sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s) L_{n+i}(s) -$$

$$- \sum_{n=h_2+1}^{m} a_n f^{n-h_1}(s) - \overline{a}_{m+1} f^{m+1-h_1}(s)\Bigg) - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i(s) M_{n+i}(s,\,k) + \tag{10}$$

$$+ \Bigg(\sum_{n=h_2+1}^{m} a_n f^{n-k}(s) I\{h_1+1\le k\le n\} +$$

$$+ \overline{a}_{m+1} f^{m-k+1}(s) I\{h_1+1\le k\le m+1\}\Bigg)\frac{1-f(s)}{s}.$$

Для отримання зображення для $\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt$ нам треба перейти в рівності (10) до підсумовування по k від 1 до $m+1$.

Безпосереднім обчисленням можна переконатись, що

$$\sum_{k=1}^{m+1} \big(q_{k-n}(s) + I\{k=m+1\}\overline{q}_{m-n+2}(s)\big) = \sum_{k=0}^{\infty} q_k(s) = \frac{1-f(s)}{s}.$$

Позначимо $\sum\limits_{k=1}^{m+1} M_n(s,k)$ через $M_n(s)$. Тоді

$$M_n(s)=\frac{1-f(s)}{s}+f(s)\left(\frac{1-f^{m-h_1}(s)}{s}\,\overline{p}_{m-n}(s)+\sum_{j=h_2+1}^{m-1}p_{j-n}(s)\frac{1-f^{j-h_1}(s)}{s}\right);$$

$$\sum_{k=1}^{m+1}\Phi_{h_1}(s,k)=\frac{D_{h_1}(s)}{\Delta(s)},\qquad \sum_{k=1}^{m+1}\Phi_{h_2}(s,k)=\frac{D_{h_2}(s)}{\Delta(s)},$$

де

$$D_{h_1}(s)=r_{h_2-h_1}(s)\sum_{i=1}^{h_2}R_i(s)M_i(s)-r_{h_2}(s)\sum_{i=1}^{h_2-h_1}R_i(s)M_{h_1+i}(s);$$

$$D_{h_2}(s)=\sum_{i=1}^{h_2}R_i(s)\left(\Delta_1(s)M_i(s)-f(s)L_i(s)\sum_{j=1}^{h_2-h_1}R_j(s)M_{h_1+j}(s)\right),$$

і з (10) отримуємо

$$\begin{aligned}\int_0^\infty e^{-st}\,\mathbf{P}\{\,\tau(m)>t\,\}\,dt=\frac{1}{\Delta(s)}\Bigg(&\sum_{n=1}^{h_2}a_n r_{h_2-n}(s)D_{h_2}(s)-D_{h_1}(s)\times\\ &\times\Bigg(f(s)\sum_{n=1}^{h_2-1}a_n\sum_{i=1}^{h_2-n}R_i(s)L_{n+i}(s)-\sum_{n=h_2+1}^{m}a_n f^{n-h_1}(s)-\\ &-\overline{a}_{m+1}f^{m+1-h_1}(s)\Bigg)\Bigg)-\sum_{n=1}^{h_2-1}a_n\sum_{i=1}^{h_2-n}R_i(s)M_{n+i}(s)+\\ &+\sum_{n=h_2+1}^{m}a_n\frac{1-f^{n-h_1}(s)}{s}+\overline{a}_{m+1}\frac{1-f^{m+1-h_1}(s)}{s}.\end{aligned}\tag{11}$$

Виконаємо обчислення, потрібні для переходу в (11) до границі при $s\to+0$. Використовуватимемо послідовності

$$p_i=\lim_{s\to+0}p_i(s),\qquad R_i=\lim_{s\to+0}R_i(s),\qquad q_i=\lim_{s\to+0}q_i(s).$$

Оскільки

$$f(0)=1,\qquad \lim_{s\to+0}\frac{1-f^j(s)}{s}=jm_1,$$

то

$$L_n(0)=\overline{p}_{h_2+1-n},\qquad M_n(0)=m_1\left(1+\sum_{j=h_2+1}^{m-1}(j-h_1)p_{j-n}+(m-h_1)\overline{p}_{m-n}\right).$$

Використовуючи рівності [1]

$$\sum_{i=1}^{n}R_i\overline{p}_{n-i}=R_n-1\qquad(n\geq 1),\tag{12}$$

$$R_1 = \frac{1}{p_{-1}}, \qquad R_{k+1} = \frac{R_k - \sum\limits_{i=0}^{k-1} p_i R_{k-i}}{p_{-1}} \qquad (\,k \ge 1\,), \tag{13}$$

отримуємо

$$r_n(0) = p_{-1} R_{n+1}, \qquad \Delta_1(0) = \Delta(0) = p_{-1} R_{h_2+1-h_1}.$$

Введемо позначення

$$R(h_1,\, h_2) = \frac{1}{R_{h_2+1-h_1}} \left(R_{h_2+1} - \sum_{n=1}^{h_2} a_n R_{h_2+1-n} \right).$$

Після переходу в рівності (11) до границі при $s \to +0$ одержимо таке твердження.

Теорема 2. *Середня тривалість періоду зайнятості* $\mathbf{M}\,\tau(m)$ *для системи обслуговування* $\mathrm{M}^\theta_{\mathrm{h_1,h_2}}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ *визначається з рівності*

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{M}\,\tau(m)}{m_1} &= \sum_{i=1}^{h_2} R_i \left(1 + \sum_{j=h_2+1}^{m-1} (j-h_1) p_{j-i} + (m-h_1)\overline{p}_{m-i} \right) - \\ &- \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i \left(1 + \sum_{j=h_2+1}^{m-1} (j-h_1) p_{j-n-i} + (m-h_1)\overline{p}_{m-n-i} \right) + \\ &+ \sum_{n=h_2+1}^{m} (n-h_1) a_n + (m+1-h_1)\overline{a}_{m+1} - \\ &- R(h_1,\, h_2) \sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i \left(1 + \sum_{n=h_2+1}^{m-1} (j-h_1) p_{j-h_1-i} + (m-h_1)\overline{p}_{m-h_1-i} \right). \end{aligned} \tag{14}$$

Прийнявши в (10) $s=0$ і враховуючи рівність

$$\sum_{n=1}^{h_2} a_n r_{h_2-n}(0) - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i \overline{p}_{h_2+1-n-i} + \overline{a}_{h_2+1} = 1,$$

одержимо співвідношення

$$\begin{aligned} \int\limits_0^\infty \mathbf{P}\{\,\xi(t)=k,\ \tau(m)>t\,\}\,dt &= \sum_{i=1}^{h_2} R_i M_i(k) - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i M_{n+i}(k) + \\ &+ m_1 \left(\sum_{n=h_2+1}^{m} a_n I\{h_1+1 \le k \le n\} + \overline{a}_{m+1} I\{h_1+1 \le k \le m+1\} \right) - \\ &- R(h_1,\, h_2) \sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i M_{h_1+i}(k), \end{aligned} \tag{15}$$

де

$$\begin{aligned} M_n(k) = M_n(0,\,k) &= q_{k-n} + I\{k=m+1\}\overline{q}_{m+2-n} + \\ &+ m_1 \left(\sum_{j=h_2+1}^{m-1} I\{h_1+1 \le k \le j\} p_{j-n} + I\{h_1+1 \le k \le m\} \overline{p}_{m-n} \right). \end{aligned}$$

З (15), міркуючи так, як у пункті 4 праці [1], отримаємо таке твердження.

Теорема 3. *Стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі обслуговування* $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h_1,h_2}}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ *визначається формулами*

$$\rho_0(m) = \frac{1}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}\,;$$

$$\rho_k(m) = \frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}\left(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i}\right) \qquad (\,k=\overline{1,\,h_1}\,);$$

$$\rho_k(m) = \frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}\left(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i} - \right.$$
$$\left. - R(h_1,\,h_2)\Big(\sum_{i=1}^{k-h_1} R_i q_{k-h_1-i} - m_1\Big)\right) \qquad (\,k=\overline{h_1+1,\,h_2}\,);$$

$$\rho_k(m) = \frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}\left(\sum_{i=1}^{h_2} R_i\big(q_{k-i} + m_1\overline{p}_{k-i}\big) - \right.$$
$$- \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i\big(q_{k-n-i} + m_1\overline{p}_{k-n-i}\big) + m_1\overline{a}_k - \tag{16}$$
$$\left. - R(h_1,\,h_2)\sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i\big(q_{k-h_1-i} + m_1\overline{p}_{k-h_1-i}\big)\right) \qquad (\,k=\overline{h_2+1,\,m}\,);$$

$$\rho_{m+1}(m) = \frac{\lambda}{1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)}\left(\sum_{i=1}^{h_2} R_i\overline{q}_{m+1-i} - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{h-n} R_i\overline{q}_{m+1-n-i} + \right.$$
$$\left. + m_1\overline{a}_{m+1} - R(h_1,\,h_2)\sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i\overline{q}_{m+1-h_1-i}\right).$$

Лема 1. *Для послідовностей* $\{p_i\}$, $\{R_i\}$ *виконуються такі рівності:*

$$\sum_{j=0}^{\infty}\overline{p}_j = \rho; \qquad\qquad \sum_{i=1}^{k} R_i \sum_{j=0}^{k-i}\overline{p}_j = \sum_{i=1}^{k} R_i - k. \tag{17}$$

Доведення. Враховуючи, що згідно з означенням послідовності ймовірностей $\{p_i\}$ $(i \geq -1)$

$$\sum_{i=-1}^{\infty}(i+1)p_i = \rho,$$

одержимо

$$\sum_{i=-1}^{\infty}(i+1)p_i = \sum_{j=0}^{\infty}(j+1)p_j = \sum_{j=0}^{\infty}\overline{p}_j = \rho.$$

Використовуючи співвідношення (12), отримаємо

$$\sum_{i=1}^{k} R_i \sum_{j=0}^{k-i} \overline{p}_j = \sum_{j=0}^{k-1} \sum_{i=1}^{k-j} R_i \overline{p}_{k-j-i} = \sum_{j=0}^{k-1} (R_{k-j} - 1) = \sum_{i=1}^{k} R_i - k.$$

Лему доведено. □

Теорема 4. *Середня тривалість періоду зайнятості та стаціонарний розподіл кількості замовлень для системи обслуговування* $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h}_1,\mathrm{h}_2}/\mathrm{G}/1/\infty$ *визначаються формулами*

$$\mathbf{M}\,\tau(\infty) = m_1 \Biggl(b_1 + \rho \sum_{i=1}^{h_2} R_i \overline{a}_{h_2+1-i} - \rho R(h_1,\, h_2) \sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i \Biggr); \tag{18}$$

$$\begin{aligned}
\rho_0(\infty) &= \frac{1}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)}\,; \\
\rho_k(\infty) &= \frac{\lambda}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)} \left(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i} \right) \qquad (\,k = \overline{1,\, h_1}\,); \\
\rho_k(\infty) &= \frac{\lambda}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)} \Biggl(\sum_{i=1}^{k} R_i q_{k-i} - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{k-n} R_i q_{k-n-i} - \\
&\quad - R(h_1,\, h_2) \Biggl(\sum_{i=1}^{k-h_1} R_i q_{k-h_1-i} - m_1 \Biggr) \Biggr) \qquad (\,k = \overline{h_1+1,\, h_2}\,); \\
\rho_k(\infty) &= \frac{\lambda}{1+\lambda \mathbf{M}\,\tau(\infty)} \Biggl(\sum_{i=1}^{h_2} R_i \bigl(q_{k-i} + m_1 \overline{p}_{k-i} \bigr) - \\
&\quad - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i \bigl(q_{k-n-i} + m_1 \overline{p}_{k-n-i} \bigr) + m_1 \overline{a}_k - \\
&\quad - R(h_1,\, h_2) \sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i \bigl(q_{k-h_1-i} + m_1 \overline{p}_{k-h_1-i} \bigr) \Biggr) \qquad (\,k \geq h_2 + 1\,).
\end{aligned} \tag{19}$$

Доведення. Прийнявши $m \to \infty$ у рівності (14), одержимо

$$\begin{aligned}
\frac{\mathbf{M}\,\tau(\infty)}{m_1} &= \sum_{i=1}^{h_2} R_i \Biggl(1 + \sum_{j=h_2+1}^{\infty} (j-h_1) p_{j-i} \Biggr) - \sum_{n=1}^{h_2-1} a_n \sum_{i=1}^{h_2-n} R_i \Biggl(1 + \\
&\quad + \sum_{j=h_2+1}^{\infty} (j-h_1) p_{j-n-i} \Biggr) + \sum_{n=h_2+1}^{\infty} (n-h_1) a_n - \\
&\quad - R(h_1,\, h_2) \sum_{i=1}^{h_2-h_1} R_i \Biggl(1 + \sum_{n=h_2+1}^{\infty} (j-h_1) p_{j-h_1-i} \Biggr).
\end{aligned} \tag{20}$$

Враховуючи співвідношення (17), після нескладних перетворень отримаємо

$$\sum_{j=h_2+1}^{\infty}(j-h_1)p_{j-i}=(h_2-h_1+1)\overline{p}_{h_2+1-i}+\sum_{j=h_2+2-i}^{\infty}\overline{p}_j=$$
$$=(h_2-h_1)\overline{p}_{h_2+1-i}+\rho-\sum_{j=0}^{h_2-i}\overline{p}_j;$$
$$\sum_{i=1}^{h_2}R_i\Big(1+\sum_{j=h_2+1}^{\infty}(j-h_1)p_{j-i}\Big)=\sum_{i=1}^{h_2}R_i\Big(1+\rho-\sum_{j=0}^{h_2-i}\overline{p}_j+$$
$$+(h_2-h_1)(\overline{p}_{h_2-i}-p_{h_2-i})\Big)=h_2+(h_2-h_1)(R_{h_2}-1)+$$
$$+\sum_{i=1}^{h_2}R_i\Big(\rho-(h_2-h_1)p_{h_2-i}\Big)=h_1+(h_2-h_1)R_{h_2}+$$

$$+\sum_{i=1}^{h_2}R_i\Big(\rho-(h_2-h_1)p_{h_2-i}\Big)=h_1+(h_2-h_1)R_{h_2+1}p_{-1}+\rho\sum_{i=1}^{h_2}R_i. \tag{21}$$

Після аналогічних до виконаних у (21) перетворень виразів

$$\sum_{i=1}^{h_2-n}R_i\Big(1+\sum_{j=h_2+1}^{\infty}(j-h_1)p_{j-n-i}\Big);\qquad \sum_{i=1}^{h_2-h_1}R_i\Big(1+\sum_{n=h_2+1}^{\infty}(j-h_1)p_{j-h_1-i}\Big),$$

враховуючи рівності

$$\sum_{n=h_2+1}^{\infty}(n-h)a_n=b_1-\sum_{n=1}^{h_2}na_n-h_1\overline{a}_{h_2+1};\quad \sum_{i=1}^{h_2}R_i-\sum_{n=1}^{h_2-1}a_n\sum_{i=1}^{h_2-n}R_i=\sum_{i=1}^{h_2}R_i\overline{a}_{h_2+1-i},$$

з (20) отримаємо співвідношення (18). Прийнявши $m\to\infty$ у рівностях (16), одержимо формули (19). Теорему доведено. □

4. Визначення стаціонарних характеристик. У випадку групового надходження замовлень ($a_1<1$) для системи з обмеженою чергою $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h_1,h_2}}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ деякі замовлення, які прибувають на вхід системи в момент, коли вхідний потік не блокується, можуть бути втрачені. Формулу для ймовірності обслуговування $\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$ для цієї системи можна отримати як границю при $T\to\infty$ відношення кількості обслужених замовлень до кількості всіх, що надійшли за час T. Середня кількість замовлень, які прибули на вхід системи за час T, дорівнює λb_1T, а середня кількість обслужених за той самий час становить $\big(1-\rho_0(m)\big)T/m_1$. У підсумку одержимо таку формулу для ймовірності обслуговування:

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)=\frac{\mathbf{M}\,\tau(m)}{m_1b_1\big(1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(m)\big)}=\frac{\rho_0(m)\mathbf{M}\,\tau(m)}{m_1b_1}. \tag{22}$$

Для системи $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h_1,h_2}}/\mathrm{G}/1/\infty$ формула (22) набуває вигляду

$$\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty)=\frac{\mathbf{M}\,\tau(\infty)}{m_1b_1\big(1+\lambda\mathbf{M}\,\tau(\infty)\big)}=\frac{\rho_0(\infty)\mathbf{M}\,\tau(\infty)}{m_1b_1}.$$

Розглянемо стаціонарні характеристики черги: середню довжину черги $\mathbf{M}\,Q(m)$ та середній час очікування $\mathbf{M}\,w(m)$. Для системи з обмеженою чергою їх знаходимо за формулами

$$\mathbf{M}\,Q(m)=\sum_{k=1}^{m}k\rho_{k+1}(m);\qquad \mathbf{M}\,w(m)=\frac{\mathbf{M}\,Q(m)}{\lambda b_1\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)}. \tag{23}$$

Співвідношення для $\mathbf{M}\,w(m)$ випливає з формули Літтла для системи обслуговування з втратами замовлень.

У випадку системи з необмеженою чергою з (23) отримаємо рівності

$$\mathbf{M}\,Q(\infty)=\sum_{k=1}^{\infty}k\rho_{k+1}(\infty);\qquad \mathbf{M}\,w(\infty)=\frac{\mathbf{M}\,Q(\infty)}{\lambda b_1\mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(\infty)}.$$

5. Приклади обчислення стаціонарного розподілу. Перед тим, як скористатися рівностями (13), (14), (16), (18) і (19), треба обчислити p_i та q_i за формулами [1]

$$p_i=\sum_{k=0}^{i+1}a_{i+1}^{k*}\int_0^{\infty}e^{-\lambda x}\frac{(\lambda x)^k}{k!}\,dF(x)\quad(\,i=-1,0,1,\dots); \tag{24}$$

$$q_0=\frac{1-f(\lambda)}{\lambda},\qquad q_k=\sum_{i=1}^{k}a_iq_{k-i}-\frac{p_{k-1}}{\lambda}\qquad(k\ge 1).$$

Припустимо, що замовлення можуть надходити лише по одному або по двоє ($a_1+a_2=1$), час обслуговування розподілений за законом Ерланга другого порядку з параметром μ, тобто $F(x)=1-(1+\mu x)e^{-\mu x}$, $x\ge 0$, і середнє значення часу обслуговування становить $m_1=2/\mu$. За формулами (24) отримуємо

$$p_{-1}=\frac{\mu^2}{(\lambda+\mu)^2}\,;\qquad p_0=\frac{2a_1\mu^2\lambda}{(\lambda+\mu)^3}\,;\qquad p_1=\frac{3a_1^2\mu^2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^4}+\frac{2a_2\mu^2\lambda}{(\lambda+\mu)^3}\,;$$
$$p_2=\frac{4a_1^3\mu^2\lambda^3}{(\lambda+\mu)^5}+\frac{6a_1a_2\mu^2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^4}\,;\qquad p_3=\frac{5a_1^4\mu^2\lambda^4}{(\lambda+\mu)^6}+\frac{12a_1^2a_2\mu^2\lambda^3}{(\lambda+\mu)^5}+\frac{3a_2^2\mu^2\lambda^2}{(\lambda+\mu)^4}\,;$$
$$p_4=\frac{6a_1^5\mu^2\lambda^5}{(\lambda+\mu)^7}+\frac{20a_1^3a_2\mu^2\lambda^4}{(\lambda+\mu)^6}+\frac{12a_1a_2^2\mu^2\lambda^3}{(\lambda+\mu)^5}\,;$$
$$p_5=\frac{7a_1^6\mu^2\lambda^6}{(\lambda+\mu)^8}+\frac{30a_1^4a_2\mu^2\lambda^5}{(\lambda+\mu)^7}+\frac{30a_1^2a_2^2\mu^2\lambda^4}{(\lambda+\mu)^6}+\frac{4a_2^3\mu^2\lambda^3}{(\lambda+\mu)^5},\dots.$$

Розглянемо приклад з такими числовими даними: $h_1=2$; $h_2=4$;

$$a_1=0,75;\quad a_2=0,25;\quad m=6;\quad \lambda=2;\quad \mu=3. \tag{25}$$

Тоді $m_1=2/3$, $b_1=1,25$, і середні тривалості періодів зайнятості $\mathbf{M}\,\tau(m)$ і $\mathbf{M}\,\tau(\infty)$, знайдені за формулами (14) і (18), відповідно, становлять 10,62157 і 11,51445.

Таблиця 1

Стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h_1,h_2}}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$

К-сть замовлень (k)	0	1	2	3	4	5	6	7
$\rho_k(m)$	0,0450	0,0799	0,1471	0,2264	0,2054	0,1600	0,0947	0,0416
$\rho_k(m)$ (GPSS World)	0,0455	0,0796	0,1460	0,2274	0,2046	0,1599	0,0956	0,0414

Таблиця 2

Стаціонарний розподіл кількості замовлень у системі $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h_1,h_2}}/\mathrm{G}/1/\infty$

К-сть замовлень (k)	0	1	2	3	4	5	6	7	...
$\rho_k(\infty)$	0,0416	0,0740	0,1362	0,2096	0,1901	0,1481	0,0876	0,0500	...
$\rho_k(\infty)$ (GPSS World)	0,0421	0,0737	0,1361	0,2092	0,1906	0,1480	0,0879	0,0496	...

У другому рядку табл. 1 записані ймовірності $\rho_k(m)$, обчислені за формулами (16). У цій же таблиці для порівняння наведено значення відповідних імовірностей, які отримали за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World [4, 5] для часу моделювання $t = 500\,000$. Значення стаціонарних імовірностей $\rho_k(\infty)$, знайдені за формулами (19), а також за допомогою GPSS World ($t = 500\,000$), наведено у табл. 2.

6. Приклади оптимального вибору порогів блокування. У табл. 3 подано значення стаціонарних характеристик системи $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h_1,h_2}}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, які отримали для даних (25) і різних значень порогів блокування h_1, h_2 за формулами (14), (16), (22) і (23). Випадок, коли $h_1 = h_2 = 6$, відповідає системі $\mathrm{M}^{\theta}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$, тобто системі з обмеженою чергою, в якій не застосовується порогове блокування вхідного потоку.

Таблиця 3

Стаціонарні характеристики системи $\mathrm{M}^{\theta}_{\mathrm{h_1,h_2}}/\mathrm{G}/1/\mathrm{m}$ для різних значень h_1 і h_2

h_1	h_2	$\mathbf{M}\,\tau(m)$	$\rho_0(m)$	$\lambda b_1 \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$	$\mathbf{M}\,Q(m)$	$\mathbf{M}\,w(m)$
1	1	3,8074	0,1161	1,3259	1,4115	1,0646
1	2	4,7605	0,0950	1,3574	1,6764	1,2350
1	3	5,6749	0,0810	1,3785	1,9369	1,4050
1	4	6,6616	0,0698	1,3953	2,2216	1,5922
1	5	7,6003	0,0617	1,4074	2,4900	1,7692
2	2	7,9236	0,0594	1,4110	2,1258	1,5066
2	3	9,1223	0,0520	1,4221	2,3230	1,6336
2	4	10,6216	0,0450	1,4327	2,5789	1,8002
2	5	12,1264	0,0396	1,4406	2,8336	1,9670
3	3	14,4276	0,0335	1,4498	2,8155	1,9421
3	4	16,3483	0,0298	1,4555	3,0056	2,0650
3	5	18,5817	0,0262	1,4607	3,2313	2,2121
4	4	24,7936	0,0198	1,4703	3,4990	2,3797
4	5	27,5464	0,0178	1,4733	3,6649	2,4876
5	5	39,6322	0,0125	1,4813	4,1242	2,7841
6	6	55,4639	0,0089	1,4866	4,6018	3,0955

Таблиця 4

Розв'язки задачі оптимального синтезу для різних значень $\widetilde{\rho}_0$, S_0 і w_0

$\widetilde{\rho}_0$	S_0	w_0	$h_{1\,\mathrm{opt}}$	$h_{2\,\mathrm{opt}}$
0,02	1,47	2,50	4	5
0,03	1,45	2,10	3	4
0,04	1,44	1,95	3	3
0,05	1,42	1,85	2	4
0,06	1,40	1,70	2	3
0,09	1,35	1,45	1	3
0,12	1,30	1,10	1	1

Аналізуючи дані табл. 3, бачимо, що зі зростанням значень h_1 і h_2 (зі зменшенням блокування) монотонно зростають середнє значення періоду зайнятості $\mathbf{M}\,\tau(m)$ і середня кількість обслужених замовлень за одиницю часу $\lambda b_1 \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m)$ і водночас монотонно спадає ймовірність простоювання системи $\rho_0(m)$. Якщо зафіксувати значення h_1, то зі зростанням h_2 монотонно зростають середня довжина черги $\mathbf{M}\,Q(m)$ і середній час очікування в черзі $\mathbf{M}\,w(m)$.

З даних табл. 3 видно, що застосовуючи двопорогове блокування потоку замовлень, можна майже утричі зменшити середній час очікування в черзі і більш, ніж у 3 раза – середню довжину черги. Середня кількість обслужених замовлень за одиницю часу зменшується у цьому разі не більше, ніж в 1,12 раза.

Користуючись даними табл. 3, можна знайти розв'язки задач оптимального синтезу системи обслуговування з наперед заданими характеристиками. Сформулюємо задачу оптимального синтезу так: *для даних* (25) *знайти такі найбільші значення порогів блокування* h_1 *і* h_2 *(з найбільшою сумою* $h_1 + h_2$*), при яких характеристики системи задовольняють умови:* $\rho_0(m) \leq \widetilde{\rho}_0$; $\lambda b_1 \mathbf{P}_{\mathrm{sv}}(m) \geq S_0$; $\mathbf{M}\,w(m) \leq w_0$, *де* $\widetilde{\rho}_0$, S_0, w_0 *– задані числа.* Розв'язки цієї задачі $h_{1\,\mathrm{opt}}$, $h_{2\,\mathrm{opt}}$, отримані за допомогою табл. 3 для різних значень $\widetilde{\rho}_0$, S_0 і w_0, наведено у табл. 4.

7. Додаток. Програма для GPSS World.

```
Lam EQU 2        ; значення λ
Myu EQU 3        ; значення μ
AH1 EQU 2        ; значення h1
AH2 EQU 4        ; значення h2
Em EQU 6       ; значення m
CHAS EQU 500000       ; час моделювання
Imo VARIABLE N$MIT2/N$MIT1       ; імовірність обслуговування
QCHE TABLE Q$CHER,0,1,7       ; гістограма розподілу довжини черги
GENERATE 1
TABULATE QCHE       ; зафіксувати дані для гістограми
TERMINATE
GENERATE (Exponential(5,0,(1/Lam)))     ; показниковий розподіл з параметром λ
TRANSFER 750,,MIT1       ; надходження замовлень по одному (a1 = 0,75)
SPLIT 2,MIT1        ; надходження замовлень парами (a2 = 0,25)
TRANSFER, OUT
MIT1 GATE LS KLU,OUT       ; чи заблоковано вхід?
QUEUE CHER
ASSIGN 1,Q$CHER
```

```
TEST E P1,Em,MIT_SE        ; чи довжина черги дорівнює m?
LOGIC R KLU        ; заблокувати вхід
MIT_SE SEIZE SYS
DEPART CHER
TEST L Q$CHER,AH2,MIT_R        ; чи довжина черги менша за h2?
TEST E Q$CHER,(AH1-1),MIT_ADV        ; чи довжина черги дорівнює h1 − 1?
LOGIC S KLU        ; розблокувати вхід
TRANSFER, MIT_ADV
MIT_R LOGIC R KLU        ; заблокувати вхід
MIT_ADV ADVANCE ((Exponential(5,0,(1/Myu)))+(Exponential(5,0,(1/Myu))))
; (розподіл Ерланга часу обслуговування)
MIT2 RELEASE SYS
TERMINATE
OUT TERMINATE
GENERATE ,,, 1
LOGIC S KLU        ; розблокувати вхід
TERMINATE
GENERATE CHAS        ; задати час моделювання
SAVEVALUE Imo,V$Imo        ; записати значення ймов. обслуговування
TERMINATE 1
START 1
```

Список використаної літератури

1. *Братійчук М.* Дослідження систем M/G/1/m та M/G/1 з груповим надходженням замовлень і пороговим блокуванням вхідного потоку / *Братійчук М., Жерновий Ю.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 26-39.
2. *Братійчук А.М.* Система $M^{\theta}/G/1/b$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку / *Братійчук А.М.* // Вісн. Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2007. – Вип. 1. – С. 114-121.
3. *Королюк В.С.* Граничные задачи для сложных пуассоновских процессов / *Королюк В.С.* – Киев, 1975.
4. *Боев В.Д.* Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World / *Боев В.Д.* – Санкт-Петербург, 2004.
5. *Жерновий Ю.В.* Імітаційне моделювання систем масового обслуговування / *Жерновий Ю.В.* – Львів, 2007.

Стаття: надійшла до редакції 20.09.2011
прийнята до друку 14.12.2011

QUEUEING SYSTEM $M^{\theta}/G/1/m$ WITH TWO THRESHOLD REGULATION OF QUEUE

Mykola BRATIICHUK[1], Yuriy ZHERNOVYI[2]

[1]*Silesian University of Technology,*
Kashubska Str., 23, Gliwice, 44-100
[2]*Ivan Franko National University of Lviv,*

Universytets'ka Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

The $M^{\theta}/G/1/m$ queue with threshold blocking strategy of an input flow is investigated. If at the moment of beginning the service of the next customer the number of customers in the system exceeds some level h_2, the input flow is blocked while service process goes its own way. The arrivals of the new customers resume when the number of customers in the system decreases to the level $h_1 \leq h_2$. Laplace transforms for distributions of the number of customers in the system on the busy period and for the busy time distribution function are found. Average duration of the busy time, and formulas for the ergodic distribution of number of customers in the system and stationary characteristics of queue are obtained. An example of decision of problem of optimal choice of parameters h_1 and h_2 is considered.

Key words: the $M^{\theta}/G/1/m$ queue, two threshold blocking of an input flow, busy time, stationary characteristics.

СИСТЕМА $M^{\theta}/G/1/m$ С ДВУХПОРОГОВЫМ РЕГУЛИРОВАНИЕМ ОЧЕРЕДИ

Николай БРАТИЙЧУК[1], Юрий ЖЕРНОВЫЙ[2]

[1] *Шлёнский политехнический университет,*
ул. Кашубская, 23, Гливице, 44-100
[2] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: yu_zhernovyi@yahoo.com

Для системы $M^{\theta}/G/1/m$ блокировка входного потока начинается, если в момент начала обслуживания очередной заявки число заявок в системе $\xi(t)$ удовлетворяет условие $\xi(t) > h_2$ и прекращается, если $\xi(t) \leq h_1$, где $h_1 \leq h_2$. Найдены преобразования Лапласа для распределения числа заявок в системе на периоде занятости и для функции распределения периода занятости, определена средняя продолжительность периода занятости, получены формулы для стационарного распределения числа заявок в системе и стационарных характеристик. Рассмотрен пример решения задачи оптимального выбора параметров h_1 и h_2.

Ключевые слова: система $M^{\theta}/G/1/m$, двухпороговая блокировка входного потока, период занятости, стационарные характеристики.