ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 43–58
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 43–58

УДК 517.95

ПРО РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ДЕЯКИХ НЕЛІНІЙНИХ АНІЗОТРОПНИХ РІВНЯНЬ З ВИРОДЖЕННЯМ

Тарас БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: tbokalo@gmail.com

Досліджено крайову задачу Діріхе-Неймана для вироджених анізотропних еліптичних рівнянь та першу мішану задачу для вироджених анізотропних параболічних рівнянь. Розглянуті рівняння містять доданки зі змінними показниками нелінійності. Знайдено умови розв'язності цих задач в анізотропних просторах Соболєва.

Ключові слова: подвійно нелінійні рівняння, змінні показники нелінійності, теорема існування розв'язку.

1. Вступ. Ми досліджуємо мішану задачу для одного класу так званих подвійно нелінійних параболічних рівнянь, яка у модельному випадку має вигляд

$$|u|^{r-2}u_t - \sum_{i=1}^{n}(|u|^{\gamma_i-2}u_{x_i})_{x_i} \pm \sum_{i=1}^{n}|u|^{s_i(x)-2}u_{x_i} \pm |u|^{q(x)-2}u = f(x,t), \qquad (1)$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad |u|^{r-2}u|_{t=0} = 0, \qquad (2)$$

де $r, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \geqslant 2$ – деякі числа, $s_i(x) \geqslant s_{i0} > 0$, $q(x) \geqslant q_0 > 1$ – деякі функції. Покажемо існування розв'язку цієї задачі.

Для доведення теореми існування розв'язку використано метод еліптичної регуляризації. Тобто розв'язок (1)–(2) отримаємо як границю сім'ї розв'язків таких крайових задач Діріхле-Неймана для нелінійних рівнянь еліптичного типу:

$$-\varepsilon(|u|^{r-2}u_t)_t + |u|^{r-2}u_t - \sum_{i=1}^{n}(|u|^{\gamma_i-2}u_{x_i})_{x_i} \pm \sum_{i=1}^{n}|u|^{s_i(x)-2}u_{x_i} \pm |u|^{q(x)-2}u = f(x,t), \quad (3)$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad |u|^{r-2}u|_{t=0} = 0, \quad |u|^{r-2}u_t|_{t=0} = 0, \qquad (4)$$

де $\varepsilon > 0$.

Задачі (3), (4) мають самостійний інтерес, тому розглядаються окремо і в загальнішому, ніж треба для розв'язності (1), (2) формулюванні.

В [1] розглянуто задачі, які в модельному випадку набули вигляду (1), (2) та (3), (4) з тією відмінністю, що молодші доданки рівнянь наявні з додатними коефіцієнтами, їхній степінь нелінійності $s_j(y) \equiv \gamma_j$, $j = \overline{1,N}$, та відсутній зв'язок між $q(y)$ і γ_j в умовах існування розв'язку. Праця [2] містить рівняння з монотонною нелінійністю в головній частині. Дослідженню різних задач для інших подвійно нелінійних параболічних рівнянь присвячені праці [3]-[7] (див. також бібліографію в статті [1]). Деякі варіаційні нерівності, асоційовані з подібними нелінійними параболічними рівняннями зі змінними показниками нелінійності, вивчено в [9], [10].

2. Деякі допоміжні факти. Норму банахового простору B позначимо $||\cdot;B||$, а спряжений до B простір – B^*. Дію $g \in B^*$ на елемент $y \in B$ позначатимемо $\langle g,y\rangle_B$. Для спрощення замість, наприклад, $u(\cdot,t)$ писатимемо $u(t)$. Нехай $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – обмежена область з межею $\partial\Omega \subset C^1$, $Q_{t_1,t_2} = \Omega \times (t_1,t_2)$, $0 \le t_1 < t_2 \le T$, $\Omega_\tau = \{(x,t) : x \in \Omega, t = \tau\}$, $\tau \in [0,T]$,

$$L^\infty_+(\Omega) = \{v \in L^\infty(\Omega) : \operatorname{ess}\inf_{x\in\Omega} v(x) > 1\}.$$

Для кожної функції $q \in L^\infty_+(\Omega)$ через q_0 та q^0 позначатимемо числа $q_0 \equiv \operatorname{ess}\inf\limits_{x\in\Omega} q(x)$ та $q^0 \equiv \operatorname{ess}\sup\limits_{x\in\Omega} q(x)$, а через q' – таку функцію, що $\frac{1}{q(x)} + \frac{1}{q'(x)} = 1$ для $x \in \Omega$.

Нехай X, Y – нормовані простори. Нагадаємо, що X вкладається (неперервно) в Y, у цьому разі писатимемо $X \circlearrowleft Y$, якщо виконуються такі умови:

(i) $X \subset Y$, (ii) $\exists\, \gamma > 0\ \forall\, x \in X$: $||x||_Y \leqslant \gamma||x||_X$;

X компактно вкладається в Y, у цьому разі писатимемо $X \overset{K}{\circlearrowleft} Y$, якщо кожна обмежена послідовність в X має сильно збіжну в Y підпослідовність.

Ми користуватимемось такими твердженнями.

Лема 1. *Нехай $p \in L^\infty_+(\Omega)$, $u \in C^1(\overline{\Omega})$, $\overline{p} \in \mathbb{R}$, $\overline{p} > p^0$. Тоді для кожного $\varepsilon_0 > 0$ існує така скала $K(\varepsilon_0) > 0$, що*

$$\int\limits_\Omega |u|^{p(x)}dx \leqslant \varepsilon_0 \int\limits_\Omega |u|^{\overline{p}-2}|u_{x_i}|^2dx + \varepsilon_0 \int\limits_{\partial\Omega} |u|^{\overline{p}}dS + K(\varepsilon_0), \quad i = \overline{1,n}.$$

Доведення. Нехай $\overline{p} > p^0$, $\varepsilon, \varepsilon_0 > 0$, $\delta > 0$, $i \in \{1,\dots,n\}$. Тоді майже для всіх $x \in \Omega$: $\frac{p^0+\delta}{p(x)} > 1$. Тоді з нерівності Юнга

$$|u(x)|^{p(x)} \leqslant \varepsilon|u(x)|^{p(x)\frac{p^0+\delta}{p(x)}} + Y_{\frac{p^0+\delta}{p(x)}}(\varepsilon)1^{\left(\frac{p^0+\delta}{p(x)}\right)'} = \varepsilon|u(x)|^{p^0+\delta} + Y_{\frac{p^0+\delta}{p(x)}}(\varepsilon),$$

де $Y_{\frac{p^0+\delta}{p(x)}}(\varepsilon)$ – стала, залежна лише від $p_0, p^0, \delta, \varepsilon$.

Тому, використовуючи лему 2.2 [1, с. 441] з $\alpha_1 = 2$, $\alpha_0 = p^0+\delta-2 > 1-2 = 1-\alpha_1$, одержимо

$$\int\limits_\Omega |u|^{p(x)}dx \leqslant \varepsilon \int\limits_\Omega |u|^{p^0+\delta-2+2}dx + K(\varepsilon) \leqslant$$
$$\leqslant \varepsilon M_0 \int\limits_\Omega |u|^{p^0+\delta-2}|u_{x_i}|^2dx + \varepsilon M_0 \int\limits_{\partial\Omega} |u|^{p^0+\delta}dS + K(\varepsilon).$$

Тепер виберемо $\varepsilon = \frac{\varepsilon_0}{M_0}$, $\delta = \overline{p} - p^0 > 0$ й отримаємо потрібну нерівність. □

Наслідок 1. *Якщо $s : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна функція, $0 < s_0 \leqslant s(x) \leqslant s^0 < +\infty$, то для всіх $u \in C_0^1(\Omega)$ та $\gamma > \max\{1, s^0\}$ виконуєтьcя оцінка*

$$\int\limits_\Omega |u|^{s(x)} dx \leqslant \varepsilon_1 \int\limits_\Omega |u|^{\gamma-2} |u_{x_i}|^2 dx + C_1(\varepsilon_1), \tag{5}$$

де $\varepsilon_1 > 0$ – довільне число.

Доведення. Якщо $s_0 > 1$, то (5) для $\gamma > s^0$ випливає з леми 1. Коли $s_0 \leqslant 1$, то використати лему 2.2 в доведенні леми 1 для довільного $\delta > 0$ не можна. Треба вимагати використання умов $\delta = \overline{p} - p^0 > 0$ та $p^0 + \delta > 1$, тобто $\overline{p} > 1$. В нашому випадку це призводить до умов $\gamma > 1$ та $\gamma > s^0$. □

Лема 2. . *Нехай $\gamma > 1$ – деяке число, $s : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна функція така, що $\frac{\gamma-2}{2} < s_0 \leqslant s(x) \leqslant s^0 < \gamma - 1$. Тоді для всіх $u \in C_0^1(\Omega)$ виконуєтьcя оцінка*

$$\int\limits_\Omega |u|^{s(x)} |u_{x_i}| dx \leqslant \eta_1 \int\limits_\Omega |u|^{\gamma-2} |u_{x_i}|^2 dx + C_2(\eta_1) \quad \textit{для всіх} \quad i = \overline{1, n}, \tag{6}$$

де $\eta_1 > 0$ довільне число.

Доведення. Нехай p – деяке число. З нерівності Юнга зі степенем $\beta > 1$ отримаємо

$$|u|^{s(x)} |u_{x_i}| = |u|^p |u_{x_i}| \cdot |u|^{s(x)-p} \leqslant \varepsilon |u|^{p\beta} |u_{x_i}|^\beta + C_3(\varepsilon) |u|^{(s(x)-p)\beta'}. \tag{7}$$

Перший доданок оцінимо з леми 2.3 [1, с. 443] для всіх $\beta \in (1, 2]$, $\gamma > 1$, $p = \frac{\gamma-\beta}{\beta}$

$$\int\limits_\Omega |u|^{p\beta} |u_{x_i}|^\beta dx = \int\limits_\Omega |u|^{\alpha_0+\alpha_1} |u_{x_i}|^{\alpha_2} dx \leqslant$$

$$\leqslant M_1 \int\limits_\Omega |u|^{\alpha_0} |u_{x_i}|^{\alpha_1+\alpha_2} dx = M_1 \int\limits_\Omega |u|^{\gamma-2} |u_{x_i}|^2 dx, \tag{8}$$

де $\alpha_0 = \gamma - 2$, $\alpha_1 = 2 - \beta$, $\alpha_2 = \beta$.
До другого доданка з (7) використаємо наслідок 1. Одержимо, що для всіх $\gamma > 1$, $\beta \in (1, 2]$, $p = \frac{\gamma-\beta}{\beta}$ та s з умови леми виконується

$$\int\limits_\Omega |u|^{(s(x)-p)\beta'} dx \leqslant \varepsilon_1 \int\limits_\Omega |u|^{\gamma-2} |u_{x_i}|^2 dx + C_4(\varepsilon_1). \tag{9}$$

Отож, враховуючи умови леми, можна вибрати такі числа β та p, що правильними будуть оцінки (7)–(9). З них одержимо

$$\int\limits_\Omega |u|^{s(x)} |u_{x_i}| dx \leqslant \varepsilon M_1 \int\limits_\Omega |u|^{\gamma-2} |u_{x_i}|^2 dx + C_4(\varepsilon)\varepsilon_1 \int\limits_\Omega |u|^{\gamma-2} |u_{x_i}|^2 dx + C_4(\varepsilon) C_5(\varepsilon_1).$$

Звідси, вибираючи малим спершу $\varepsilon = \frac{\eta_1}{M_1}$, а потім $\varepsilon_1 = \frac{\eta_1}{C_4(\varepsilon)}$, одержимо оцінку (6) для як завгодно малого $\eta_1 > 0$. □

Нехай $\varepsilon > 0$ – довільне число, а $w \in L^1(0,T;B)$. Розглянемо задачу: знайти функцію $w_\varepsilon \in W^{1,1}(0,T;B)$ таку, що

$$-\varepsilon w_\varepsilon'(t) + w_\varepsilon(t) = w(t), \quad w_\varepsilon(T) = 0, \quad t \in (0,T). \tag{10}$$

Зрозуміло, що єдиним розв'язком цієї задачі є функція $w_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}\int_t^T e^{-\frac{\tau-t}{\varepsilon}} w(\tau)d\tau$, $t \in [0,T]$.

Лема 3. *Нехай $w \in L^p(0,T;B)$, $p \geqslant 1$. Тоді $w_\varepsilon \in W^{1,p}(0,T;B)$ і*

$$||w_\varepsilon; L^p(0,T;B)|| \leqslant ||w; L^p(0,T;B)||, \quad \varepsilon > 0, \tag{11}$$

$$w_\varepsilon \underset{\varepsilon\to 0+}{\longrightarrow} w \quad \text{в } L^p(0,T;B). \tag{12}$$

Доведення. Твердження леми без оцінки (11) подано в [13]. Тому доведемо лише (11). Нехай спершу $p = 1$. Тоді отримаємо

$$||w_\varepsilon; L^1(0,T;B)|| = \int\limits_0^T \Big\|\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^T e^{-\frac{\tau-t}{\varepsilon}} w(\tau)d\tau\Big\| dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T\int\limits_t^T e^{-\frac{\tau-t}{\varepsilon}}||w(\tau)||d\tau dt = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T ||w(\tau)||\Big(\int\limits_0^\tau e^{-\frac{\tau-t}{\varepsilon}}dt\Big)d\tau =$$

$$= \int\limits_0^T (1 - e^{-\frac{\tau}{\varepsilon}})||w(\tau)||d\tau \leqslant \int\limits_0^T ||w(\tau)||d\tau = ||w; L^1(0,T;B)||. \tag{13}$$

Нехай тепер $p > 1$. Позначатимемо p' – спряжене до p число ($\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$), а B' – спряжений до B простір. Відомо, що $L^{p'}(0,T;B')$ ототожнюється зі спряженим до $L^p(0,T;B)$ простором. Тому нам достатньо довести, що

$$\langle v, w_\varepsilon\rangle_{L^p(0,T;B)} = \int\limits_0^T \langle v(t), w_\varepsilon(t)\rangle_B dt \leqslant ||v; L^{p'}(0,T;B')||\,||w; L^p(0,T;B)|| \tag{14}$$

для довільних $v \in L^{p'}(0,T;B')$, де $\langle\cdot,\cdot\rangle_B$ – позначення дії елемента з B' на елемент з B. Отож, нехай v яка-небудь функція з $L^{p'}(0,T;B')$. Оцінимо

$$\langle v, w_\varepsilon\rangle_{L^p(0,T;B)} = \int\limits_0^T \Big(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^T e^{-\frac{\tau-t}{\varepsilon}}\langle v(t), w(\tau)\rangle_B d\tau\Big)dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^T\Big(\frac{1}{\varepsilon}\int\limits_t^T e^{-\frac{\tau-t}{\varepsilon}}||v(t)||_{B'}\,||w(\tau)||_B d\tau\Big)dt = \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T dt\int\limits_0^{T-t} e^{-\frac{s}{\varepsilon}}||v(t)||_{B'}\,||w(s+t)||_B ds =$$

$$= \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T\Big(\int\limits_0^{T-s}||v(t)||_{B'}\,||w(s+t)||_B dt\Big)e^{-\frac{s}{\varepsilon}}ds \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_0^T e^{-\frac{s}{\varepsilon}}||v(t); L^{p'}(0,T-s;B')|| \times$$

$$\times ||w(s+t); L^p(0,T-s;B)||ds \leqslant ||v; L^{p'}(0,T;B')||\,||w; L^p(0,T;B)||.$$

У підсумку отримаємо (14). □

3. Крайові задачі для нелінійних еліптичних рівнянь. Нехай $N \in \mathbb{N}$, $N \geqslant n$, $\gamma_1, \ldots, \gamma_N \geqslant 2$ – деякі числа, $G = \Omega \times (0, l_{n+1}) \times \ldots \times (0, l_N)$, $l_{n+1}, \ldots, l_N > 0$ – фіксовані числа,

$$\Pi_0 = \{u \in C^1(G) \ : \ u|_{\partial\Omega \times [0,l_{n+1}]\times\ldots\times[0,l_N]} = 0, \ u|_{y_{n+1}=0} = 0, \ \ldots, \ u|_{y_N=0} = 0\}.$$

Розглянемо крайову задачу Діріхле-Неймана

$$-\sum_{j=1}^{N}(a_j(y)|u|^{\gamma_j-2}u_{y_j})_{y_j} + \sum_{j=1}^{N} b_j(y,u)u_{y_j} + g(y,u) = f(y), \quad y \in G, \tag{15}$$

$$u|_{\partial\Omega \times [0,l_{n+1}]\times\ldots\times[0,l_N]} = 0, \tag{16}$$

$$u|_{y_j=0} = 0, \quad u_{y_j}|_{y_j=l_j} = 0, \quad j = \overline{n+1, N}. \tag{17}$$

Нехай $k, l \in \{1, \ldots, N\}$ – такі індекси, що

$$\gamma_l = \min_{1\leqslant j\leqslant N} \gamma_j, \qquad \gamma_k = \max_{1\leqslant j\leqslant N} \gamma_j. \tag{18}$$

Припускатимемо, що виконуються умови:
(A1): для всіх $j \in \{1, \ldots, N\}$ $a_j \in L^\infty(G)$ та $a_j(y) \geqslant a_0 > 0$ для майже всіх $y \in G$;
(B1): для всіх $j \in \{1, \ldots, N\}$ b_j задовольняє умови Каратеодорі та умови
1) для $j \in \{1, \ldots, n\}$ $|b_j(y,\xi)\xi| \leqslant b^0|\xi|^{s_j(y)}$ для майже всіх $y \in G$ та для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, $b^0 > 0$, $s_j \in L^\infty(G)$, $0 < s_{j0} \leqslant s_j(y) \leqslant s_j^0 < +\infty$ майже для всіх $y \in G$;
2) для $j \in \{n+1, \ldots, N\}$ $b_j(y,\xi) = b_0|\xi|^{\gamma_j-2}$ для майже всіх $y \in G$ та для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, де $b_0 > 0$;

(G1): $g \in L^\infty(G)$ задовольняє умови Каратеодорі та $|g(y,\xi)\xi| \leqslant g^0|\xi|^{q(y)}$ для майже всіх $y \in G$ та для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, де $g^0 > 0$, $q \in L^\infty(G)$, $0 < q_{j0} \leqslant q_j(y) \leqslant q_j^0 < +\infty$ майже для всіх $y \in G$;
(F1): $f \in L^{\gamma_k'}(G)$, де $\frac{1}{\gamma_k} + \frac{1}{\gamma_k'} = 1$, k таке як в (18).

Нехай $[z, v]_G \overset{\text{def}}{=} \int_G z(y)v(y)dy$.

Означення 1. *Розв'язком задачі (15)-(17) називається функція u така, що*

$$u \in L^{\gamma_k}(G), \quad |u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u, \ (|u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u)_{y_j} \in L^2(G), \quad j = \overline{1, N},$$

яка задовольняє (16), (17) та для всіх $z \in \Pi_0$ задовольняє

$$\Big[\sum_{j=1}^{N} \frac{2a_j(y)}{\gamma_j}|u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}(|u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u)_{y_j}, z_{y_j}\Big]_G + \sum_{j=1}^{N}\Big[b_j(y,u)u_{y_j}, z\Big]_G + [g(y,u), z]_G = [f, z]_G$$

Перш ніж доводити існування розв'язку наведемо деякі допоміжні твердження, які потім використаємо в доведенні.

Лема 4. *Нехай $u \in C^1(\overline{G})$, $u|_{\partial\Omega \times [0,l_{n+1}]\times\ldots\times[0,l_N]} = 0$ та виконується одна з умов $u|_{y_j=0} = 0$ або $u|_{y_j=l_j} = 0$, де $j \in \{n+1, \ldots, N\}$. Якщо $\gamma > 1$ – деяке число, $s : G \to \mathbb{R}$ – вимірна функція така, що $0 < s_0 \leqslant s(y) \leqslant s^0 < \gamma$ майже для всіх $y \in G$, то для кожного $j \in \{1, \ldots, N\}$ виконується оцінка*

$$\int_G |u|^{s(y)}dy \leqslant \eta_1 \int_G |u|^{\gamma-2}|u_{y_j}|^2 dy + C_6(\eta_1), \tag{19}$$

де $\eta_1 > 0$ довільне число, стала C_6 не залежить від u.

Доведення. Тут аналогічні міркування як в лемі 1 та наслідку 1, з тією відмінністю, що замість леми 2.2 [1, с. 441] використовуємо лему 2.4 [1, с. 444]. $\square$

Лема 5. *Нехай u таке як в лемі 4. Якщо $\gamma > 1$ – деяке число, $s : G \to \mathbb{R}$ – вимірна функція така, що $\frac{\gamma-2}{2} < s_0 \leqslant s(y) \leqslant s^0 < \gamma - 1$ майже для всіх $y \in G$, то для кожного $j \in \{1, \ldots, N\}$ виконується оцінка*

$$\int\limits_G |u|^{s(y)}|u_{y_j}|dy \leqslant \eta_2 \int\limits_G |u|^{\gamma-2}|u_{y_j}|^2 dy + C_7(\eta_2), \tag{20}$$

де $\eta_2 > 0$ довільне число, стала C_7 не залежить від u.

Доведення. Розглянемо два випадки:

а) Нехай $j \in \{1, \ldots, n\}$. Тоді з леми 2 отримаємо (20) для $G = \Omega$ $y = x$. Інтегруючи цю нерівність за $y_{n+1} \in (0, l_{n+1}), \ldots, y_N \in (0, l_N)$, отримуємо (20) для G.

б) Нехай $j \in \{n+1, \ldots, N\}$. Тоді використовуючи лему 2.4 з [1, с. 444] замість лем 2.2, 2.3 [1, с. 441, 443] отримаємо (20) для $G = (0, l_j)$. Зінтегрувавши її за $(y_1, \ldots, y_n) \in \Omega$, $y_{n+1} \in (0, l_{n+1}), \ldots, y_{j-1} \in (0, l_{j-1}), y_{j+1} \in (0, l_{j+1}), \ldots, y_N \in (0, l_N)$, одержимо (20) для G. $\square$

Для функцій $w, v : G \to \mathbb{R}$ визначимо вираз

$$L(w,v) = \int\limits_G \Big[\sum_{j=1}^N a_j(y)|w|^{\gamma_j-2} w_{y_j} v_{y_j} + \sum_{j=1}^N b_j(y,w) w_{y_j} v + g(y,w)v\Big] dy. \tag{21}$$

Також введемо позначення: $G_j = \Omega \times (0, l_{n+1}) \times \ldots \times (0, l_{j-1}) \times (0, l_{j+1}) \times (0, l_N)$, $y'_j = (y_1, \ldots, y_{j-1}, y_{j+1}, \ldots, y_N)$, $dy'_j = dy_1 \ldots dy_{j-1} dy_{j+1} \ldots dy_N$, де $j \in \{n+1, \ldots, N\}$.

Лема 6. . *Якщо $\gamma_1, \ldots, \gamma_N > 1$ – деякі числа, $s_j, q : G \to \mathbb{R}$ – вимірні функції такі, що $\frac{\gamma_j-2}{2} < s_{j0} \leqslant s_j(y) \leqslant s_j^0 < \gamma_j - 1$, $1 < q_0 \leqslant q(y) \leqslant q^0 < \gamma$ для майже всіх $y \in G$, виконуються умови **(A1)**, **(B1)**, **(G1)**, то для всіх $u \in \Pi_0$ отримаємо*

$$L(u,u) \geqslant \int\limits_G (a_0 - \eta_3) \sum_{j=1}^N |u|^{\gamma_j-2}|u_{y_j}|^2 dy + \frac{1}{\gamma_l} \sum_{j=n+1}^N \int\limits_{G_j} |u|^{\gamma_j}\ |_{y_j = l_j} dy'_j - C_8(\eta_3), \tag{22}$$

де $\eta_3 > 0$ достатньо мале, l таке як в (18).

Доведення. Оцінимо кожен доданок (21) записаний для $w = v \overset{\text{def}}{=} u$. З умов **(A1)** одержимо

$$\int\limits_G \sum_{j=1}^N a_j(y)|u|^{\gamma_j-2}|u_{y_j}|^2 dy \geqslant a_0 \int\limits_G \sum_{j=1}^N |u|^{\gamma_j-2}|u_{y_j}|^2 dy. \tag{23}$$

Далі для $j \in \{1, \ldots, n\}$ з умови **(B1)** 1) та з леми 5 випливає оцінка

$$\int\limits_G b_j(y,u) u_{y_j} u dy \leqslant b^0 \int\limits_G |u|^{s_j(y)}|u_{y_j}|dy \leqslant b^0 \eta_1 \int\limits_G |u|^{\gamma_j-2}|u_{y_j}|^2 dy + b^0 C_7(\eta_1), \tag{24}$$

Для $j \in \{n+1, \dots, N\}$ з умови **(B1)** 2) отримаємо

$$\int\limits_G b_j(y,u)u_{y_j}u dy = b_0 \int\limits_G |u|^{\gamma_j - 2}u_{y_j}u dy = b_0 \int\limits_G \frac{1}{\gamma_j}\frac{\partial}{\partial y_j}\Big(|u|^{\gamma_j}\Big)dy =$$

$$= b_0 \int\limits_{G_j} \frac{1}{\gamma_j}|u|^{\gamma_j}dy_j'\Big|_{y_j=0}^{y_j=l_j} = b_0 \int\limits_{G_j} \frac{1}{\gamma_j}|u|^{\gamma_j}|_{y_j=l_j}dy_j' \geqslant \frac{b_0}{\gamma_l}\int\limits_{G_j}|u|^{\gamma_j}|_{y_j=l_j}dy_j'. \tag{25}$$

Використовуючи умову **(G1)** та лему 4, одержимо

$$\int\limits_G g(y,u)u dy \leqslant g^0 \int\limits_G |u|^{q(y)}dy \leqslant g^0\eta_2 \int\limits_G |u|^{\gamma_k - 2}|u_{y_k}|^2 dy + g^0 C_6(\eta_2), \tag{26}$$

де k таке як в (18).

Отож, з (23)-(26) отримаємо

$$L(u,u) \geqslant \int\limits_G \Big[(a_0 - b^0\eta_1)\sum_{j=1,\ j\neq k}^{n}|u|^{\gamma_j-2}|u_{y_j}|^2 dy + a_0 \sum_{j=n+1,\ j\neq k}^{N}|u|^{\gamma_j - 2}|u_{y_j}|^2 +$$

$$+ (a_0 - \theta_k - g^0\eta_2)|u|^{\gamma_k - 2}|u_{y_k}|^2\Big]dy + \frac{b_0}{\gamma_l}\sum_{j=n+1}^{N}\int\limits_{G_j}|u|^{\gamma_j}|_{y_j=l_j}dy_j' - \sum_{j=1}^{n} b^0 C_7(\eta_1) - g^0 C_6(\eta_2),$$

де $\theta_k = \begin{cases} b^0\eta_1, & k \leqslant n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$ Звідси одержимо необхідне, вибираючи $\eta_1, \eta_2 > 0$ досить малими. □

Теорема 1. *Нехай k, l такі як в (18). Якщо виконуються умови **(A1)-(F1)**, $\gamma_1, \dots, \gamma_N \geqslant 2$, $\frac{\gamma_k}{2} \leqslant \gamma_l$, $0 < q_0 \leqslant q^0 < \gamma_k$, $\frac{\gamma_j - 2}{2} < s_{j0} \leqslant s_j^0 < \gamma_j - 1$, то задача (15)-(17) має розв'язок.*

Доведення. Використаємо метод Гальоркіна. Нехай $w^1, w^2, \dots, w^m, \dots$ – база в просторі Π_0. Наближені розв'язки задачі (15)-(17) будемо шукати у вигляді

$$u^m(y) = \sum_{\mu=1}^{m} z_\mu^m w^\mu(y), \quad y \in G,$$

де невідомі сталі $z_1^m, z_2^m, \dots, z_m^m$ вибираємо так, щоб

$$L(u^m, w^\mu) = [f, w^\mu]_G,\ \mu = \overline{1,m}. \tag{27}$$

З леми Вішика (лема 4.3 [11, с. 66]) такі сталі існують.

Зробимо деякі перетворення. Домножимо (27) на z_μ^m і підсумуємо по μ від 1 до m. Отримаємо $L(u^m, u^m) = [f, u^m]_G$.

З нерівності Юнга та леми 2.4 [1, с. 444] одержимо

$$[f, u^m]_G \leqslant \eta_4 \int\limits_G |u^m|^{\gamma_k}dy + C_9(\eta_4)\int\limits_G |f|^{\gamma_k'}dy \leqslant \eta_4 M_1 \int\limits_G |u^m|^{\gamma_k - 2}|u_{y_k}^m|^2 dy + C_{10}(\eta_4),$$

де k взято з (18). Далі, використовуючи щойно отриману оцінку, оцінку (22) та вибираючи числа η_3, η_4 достатньо малими, отримаємо

$$0 = L(u^m, u^m) - [f, u^m]_G \geqslant \frac{a_0}{2} \int\limits_G \sum_{j=1}^N |u^m|^{\gamma_j - 2} |u^m_{y_j}|^2 dy +$$
$$+ \frac{b_0}{\gamma_l} \sum_{j=n+1}^N \int\limits_{G_j} |u|^{\gamma_j}|_{y_j = l_j} dy'_j - C_{11}. \qquad (28)$$

Тобто

$$\sum_{j=n+1}^N \int\limits_{G_j} |u|^{\gamma_j}|_{y_j=l_j} dy'_j + \int\limits_G \sum_{j=1}^N |u^m|^{\gamma_j-2}|u^m_{y_j}|^2 dy \leqslant C_{12}, \qquad (29)$$

де стала $C_{12} > 0$ не залежить від m.

З теореми 2.1 [1, с. 445] отримаємо, що

$$||\, |u^m|^{\beta-2}u^m; W^{1,\frac{\gamma_l}{\beta-1}}(G)|| \leqslant C_{13}, \qquad (30)$$

де l з (18), стала $C_{13} > 0$ не залежить від m та число $\beta \geqslant 2$ справджує оцінку

$$\frac{\gamma_k}{2} + 1 \leqslant \beta \leqslant \gamma_l + 1. \qquad (31)$$

Зрозуміло, що $||u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m|^2 = |u^m|^{\gamma_j}$. Оскільки u^m – гладка функція, то виконується $|u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m_{y_j} = \frac{2}{\gamma_j}(|u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m)_{y_j}$, тому звідси одержимо, що

$$|u^m|^{\gamma_j-2}|u^m_{y_j}|^2 = [|u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m_{y_j}]^2 = \frac{4}{\gamma_j^2}[(|u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m)_{y_j}]^2.$$

Тоді з нерівності Фрідріхса (див. лема 1.36 [12, с. 50]) та оцінки (29) отримаємо

$$\int\limits_G \Big[|\, |u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m|^2 + |\, (|u^m|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^m)_{y_j}|^2\Big] dy \leqslant C_{14}, \qquad (32)$$

де стала C_{14} не залежить від m.

На підставі отриманих оцінок випливає, що існує підпослідовність $\{u^{m_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset \subset \{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ така, що

$$|u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi_0^j \text{ – слабко в } L^2(G), \qquad (33)$$

$$(|u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^{m_k})_{y_j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \chi^j \text{ – слабко в } L^2(G). \qquad (34)$$

Використовуючи оцінку (30), теорему Реліха-Кондрашова (див. лема 1.28 [12, с. 47]) та лему 1.18 (див. [12, с. 47, 39]), одержимо, що (можливо при переході до підпослідовності)

$$|u^{m_k}|^{\beta-2}u^{m_k} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} |u|^{\beta-2}u \text{ – сильно в } L^{\frac{\gamma_l}{\beta-1}}(G) \text{ та м.с. в } G.$$

Тому $u^{m_k} \to u$ м.с. в G і тоді $\chi_0^j = |u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u$, $\chi^j = (\chi_0^j)_{y_j}$, $j = \overline{1,N}$.

Виконаємо граничний перехід в (27) з $m = m_k$, $k \in \mathbb{N}$, $\mu = \overline{1, m_k}$. Нехай $j \in \{1,\ldots,N\}$. Розглянемо спочатку вираз

$$J_k^1 = \int\limits_{Q_{0,T}} a_j(y)|u^{m_k}|^{\gamma_j-2}u^{m_k}_{y_j}\omega^\mu_{y_j} dy.$$

Нехай $\gamma_j = 2$. Тоді з (33) випливає, що

$$u^{m_k}_{y_j} \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} u_{y_j} \text{ – слабко в } L^2(G), \tag{35}$$

тому

$$J^1_k = \int\limits_G a_j(y) u^{m_k}_{y_j} \omega^\mu_{y_j}\, dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_G a_j(y) u_{y_j} \omega^\mu_{y_j}\, dy.$$

Нехай $\gamma_j > 2$. Тоді отримаємо $a_j|u^{m_k}|^{\gamma_j-2}u^{m_k}_{y_j} = Z_1(y,u^{m_k})|u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^{m_k}_{y_j}$, де $Z_1(y,u^{m_k}) = a_j(y)|u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}$. При нашому виборі γ_j функція Z_1 задовольняє умову Каратеодорі. Якщо $s = \frac{2\gamma_j}{\gamma_j-2} = 2 + \frac{4}{\gamma_j-2} > 2$, то з (32) отримаємо, що

$$\int\limits_G |Z_1(y,u^{m_k})|^s dy = \int\limits_G a^s_j |u^{m_k}|^{\gamma_j} dy \leqslant C_{15}.$$

Тому з леми Дубінського ([16, с. 471]) одержимо, що

$$J^1_k = \int\limits_G Z_1(y,u^{m_k})|u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^{m_k}_{y_j}\omega^\mu_{y_j}\, dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_G a_j(y)|u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}\frac{2}{\gamma_j}(|u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u)_{y_j}\omega^\mu_{y_j}\, dy.$$

Тепер перейдемо до границі в молодших доданках. Покажемо збіжності

$$J^2_k \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_G b_j(y,u^{m_k})u^{m_k}_{y_j}\omega^\mu dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_G b_j(y,u)u_{y_j}\omega^\mu dy, \tag{36}$$

$$J^3_k \stackrel{\text{def}}{=} \int\limits_G g(y,u^{m_k})\omega^\mu dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_G g(y,u)\omega^\mu dy. \tag{37}$$

В обидвох випадках скористаємося лемою Дубінського ([16, с. 471]). Якщо $j \in \{n+1,\ldots,N\}$, то $b_j(y,u^{m_k}) = b_0|u^{m_k}|^{ga_j-2}$. Тоді аналогічно як з інтегралом J^1_k, отримаємо таке:

$$J^2_k = b_0\int\limits_G |u^{m_k}|^{\gamma_j-2}u^{m_k}_{y_j}\omega^\mu dy \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} b_0\int\limits_G |u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}\frac{2}{\gamma_j}(|u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u)_{y_j}\omega^\mu dy.$$

У випадку $j \in \{1,\ldots,n\}$ треба отримати деякі додаткові оцінки. Спершу розглянемо вираз

$$b_j(y,u^{m_k})u^{m_k}_{y_j} = \frac{b_j(y,u^{m_k})}{|u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}}\cdot|u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^{m_k}_{y_j} = Z_2(y,u^{m_k})\cdot|u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u^{m_k}_{y_j},$$

де $Z_2(y,u^{m_k}) = \frac{b_j(y,u^{m_k})}{|u^{m_k}|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}}$. При нашому виборі γ_j функція Z_2 задовольняє умову Каратеодорі. Далі для $\widetilde{s} = \frac{2\gamma_j}{2(s^0_j+\delta)-\gamma_j} = 2 + 4\frac{\gamma_j - s^0_j - \delta}{2(s^0_j+\delta)-\gamma_j} > 2$, де $\delta > 0$ – досить мале, одержимо

$$\int\limits_G |Z_2(y,u^{m_k})|^{\widetilde{s}} dy \leqslant |b^0|^{\widetilde{s}}\int\limits_G |u^{m_k}|^{(s_j(y)-\frac{\gamma_j}{2})\cdot\frac{2\gamma_j}{2(s^0_j+\delta)-\gamma_j}} dy. \tag{38}$$

Тепер застосуємо лему 4, при $s(y) = (s_j(y) - \frac{\gamma_j}{2})\frac{2\gamma_j}{2s^0_j-\gamma_j}$ і $\Omega = G$, до інтеграла в правій частині попередньої нерівності. Зрозуміло, що для того, аби використати цю лему варто переконатись, що виконується необхідна оцінка функції $s(y)$, а саме $(s_j(y)-\frac{\gamma_j}{2})\frac{2\gamma_j}{2(s_j^0+\delta)-\gamma_j}<\gamma_j$, тобто $\gamma_j\frac{2s_j(y)-\gamma_j}{2(s_j^0+\delta)-\gamma_j}<\gamma_j$, $\frac{2s_j(y)-\gamma_j}{2(s_j^0+\delta)-\gamma_j}<1$, яка виконується бо $\delta>0$, $s_j(y)\leqslant s_j^0$ та $2s_j^0-\gamma_j>0$. В нашому випадку завдяки вибору s_{j0}, s_j^0 та γ_j з умови теореми вони виконуються.

Отже, після застосування леми 4 отримаємо

$$\int\limits_G |Z_2|^{\widetilde{s}}dy \leqslant \int\limits_G |u^{m_k}|^{(s_j(y)-\frac{\gamma_j}{2})\cdot\frac{2\gamma_j}{2s_j^0-\gamma_j}}dy \leqslant C_{16}\int\limits_G |u^{m_k}|^{\gamma_j-2}|u^{m_k}_{y_j}|^2dy+C_{17}\leqslant C_{18}. \quad (39)$$

Тому з леми Дубінського одержимо, що

$$J_k^2 \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int\limits_G \frac{b_j(y,u)}{|u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}}\cdot\frac{2}{\gamma_j}(|u|^{\frac{\gamma_j}{2}-1}u)_{y_j}\omega^\mu dy.$$

Далі зробимо потрібні оцінки щодо J_k^3. Оскільки $(q(y)-1)\frac{\gamma_k}{q^0+\delta-1}<\gamma_k$, то з леми 4 одержимо

$$\int\limits_G |g(y,u^{m_k})|^{\frac{\gamma_k}{q^0+\delta-1}}dy \leqslant |g^0|^{\frac{\gamma_k}{q^0+\delta-1}}\int\limits_G |u^{m_k}|^{(q(x)-1)\frac{\gamma_k}{q^0+\delta-1}}dy \leqslant C_{19}\int\limits_G |u^{m_k}|^{\gamma_k-2}|u^{m_k}_{y_j}|^2dy+$$
$$+C_{20}\leqslant C_{21}.$$

$$\int\limits_G |u^{m_k}|^{(q(x)-1)\frac{\gamma_k}{q^0+\delta-1}}dy\leqslant C_{22}.$$

Тому послідовність функцій $\{g(y,u^{m_k})\}_{k\in\mathbb{N}}$ обмежена в $L^{\frac{\gamma_k}{q^0+\delta-1}}(G)$. Звідси

$$g(y,u^{m_k}) \underset{k\to\infty}{\longrightarrow} g(y,u) \quad \text{слабко в } L^{\frac{\gamma_k}{q^0+\delta-1}}(G).$$

Внаслідок граничного переходу з (27) отримаємо потрібну інтегральну тотожність з заміною v на ω^μ. За допомогою стандартного замикання отримуємо інтегральну рівність з означення розв'язку. □

4. Мішані задачі для подвійно нелінійних параболічних рівнянь. Нехай $r\geqslant 2$, $\gamma_1,\dots,\gamma_n\geqslant 2$ – деякі числа. Не зменшуючи загальності, вважатимемо, що $2\leqslant\gamma_1\leqslant\gamma_2\leqslant\ldots\leqslant\gamma_n$. Позначатимемо

$$W_0^{1,\overline{\gamma}}(\Omega)=\{u\in W_0^{1,1}(\Omega)\mid u_{x_i}\in L^{\gamma_i}(\Omega),\ i=\overline{1,n}\},\quad Z=W_0^{1,\overline{\gamma}}(\Omega)\cap L^{\gamma_n}(\Omega),$$

$$\mathcal{Z}(Q_{0,T})=\{u:Q_{0,T}\to Z\mid ||v;\mathcal{Z}(Q_{0,T})||<+\infty\},$$

де $||v;\mathcal{Z}(Q_{0,T})||=\sum_{i=1}^n||v_{x_i};L^{\gamma_i}(Q_{0,T})||+||v;L^{\gamma_n}(Q_{0,T})||$. Через $U(Q_{0,T})$ позначимо множину функцій $u\in L^{\max\{r,\gamma_n\}}(Q_{0,T})$ таку, що

$$(\mathcal{R}u)_t\in[\mathcal{Z}(Q_{0,T})]^*,\quad |u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1},\ (|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u)_{x_i}\in L^2(Q_{0,T}),$$

$$|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}(|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u)_{x_i}\in L^{\gamma_i'}(Q_{0,T}),\quad i=\overline{1,n}.$$

Розглянемо мішану задачу

$$(\mathcal{R}u)_t - \sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t)|u|^{\gamma_i-2}u_{x_i})_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t,u)u_{x_i} + g(x,t,u) = f(x,t), \tag{40}$$

$$u|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \tag{41}$$

$$\mathcal{R}u|_{t=0} = 0, \tag{42}$$

де $\mathcal{R}u = \frac{1}{r-1}|u|^{r-2}u$ та виконуються умови:

(A2): для всіх $i \in \{1,\ldots,n\}$ $a_i \in L^\infty(Q_{0,T})$, $a_i(x,t) \geqslant a_0 > 0$ для майже всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$;

(B2): для всіх $i \in \{1,\ldots,n\}$ b_i задовольняє умови Каратеодорі та $|b_i(x,t,\xi)\xi| \leqslant b^0|\xi|^{s_i(x)}$ для майже всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, де $s_i \in L^\infty(\Omega)$, майже для всіх $x \in \Omega$, $0 < s_{i0} \leqslant s_i(x) \leqslant s_i^0 < +\infty$, $b^0 > 0$;

(G2): g задовольняє умови Каратеодорі та $|g(x,t,\xi)\xi| \leqslant g^0|\xi|^{q(x)}$ для майже всіх $(x,t) \in Q_{0,T}$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}$, де $q \in L^\infty(\Omega)$, майже для всіх $x \in \Omega$, $0 < q_0 \leqslant q(x) \leqslant q^0 < +\infty$, $g^0 > 0$;

(F2): $f \in L^{\gamma_n'}(Q_{0,T})$, де $\frac{1}{\gamma_n} + \frac{1}{\gamma_n'} = 1$.

Позначимо $(u,v)_\Omega = \int\limits_\Omega u(x)v(x)dx$, $\quad [z,y]_Q = \int\limits_{Q_{0,T}} z(x,t)y(x,t)dxdt$.

Означення 2. *Розв'язком задачі (40)-(42) називається функція $u \in \mathcal{U}(Q_{0,T}) \cap L^1(0,T;W_0^{1,1}(\Omega))$, $|u|^{r-2}u \in C([0,T];Z^*)$, яка задовольняє початкову умову (42) та інтегральну тотожність*

$$\frac{2}{r}[|u|^{\frac{r}{2}-1}(|u|^{\frac{r}{2}-1}u)_t, \varphi z]_Q + \sum_{i=1}^{n}\Big[a_i(x,t)|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}(|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u)_{x_i}, \varphi z_{x_i}\Big]_Q + \\ + \sum_{i=1}^{n}\Big[b_i(x,t,u)u_{x_i}, \varphi z\Big]_Q + [g(x,t,u),\varphi z]_Q = [f,\varphi z]_Q,$$

для всіх $z \in Z$, $\varphi \in C^\infty([0,T])$, $\varphi(0) = 0$.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови (**A2**)-(**F2**) та $r \geqslant 2$, $2 \leqslant \gamma_1 \leqslant \gamma_2 \leqslant \ldots \leqslant \gamma_n$, $1 < q_0 \leqslant q^0 < \gamma_n$, $\frac{\gamma_i-2}{2} < s_{i0} \leqslant s_i^0 < \gamma_i - 1$, $i = \overline{1,n}$,*

$$\frac{\max\{r,\gamma_n\}}{2} < \min\{r,\gamma_1\}, \quad \gamma_n \geqslant \frac{\gamma_1}{\gamma_1-(r-1)}, \quad 1 < \frac{\gamma_1}{r-1} \leqslant \frac{\gamma_n}{r-1} \leqslant 2.$$

Тоді задача (40)-(42) має розв'язок.

Доведення. Як ми вже зазначали, використаємо метод еліптичної регуляризації. Розв'язок задачі (40)-(42) наближаємо розв'язками крайових задач для рівняння еліптичного типу

$$-\varepsilon(\mathcal{R}u^\varepsilon)_{tt} + (\mathcal{R}u^\varepsilon)_t - \sum_{i=1}^{n}(a_i(x,t)|u^\varepsilon|^{\gamma_i-2}u^\varepsilon_{x_i})_{x_i} + \\ + \sum_{i=1}^{n} b_i(x,t,u^\varepsilon)u^\varepsilon_{x_i} + g(x,t,u^\varepsilon) = f(x,t), \tag{43}$$

$$u^\varepsilon|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \quad u^\varepsilon|_{t=0} = 0, \quad u^\varepsilon_t|_{t=T} = 0. \tag{44}$$

Оскільки виконуються умови теореми 1, то для кожного $\varepsilon > 0$ існує u^ε – узагальнений розв'язок цієї задачі. Ця функція для кожного $z \in V$ та $\varphi \in C^\infty([0,T])$, $\varphi(0) = 0$ задовольняє рівність

$$\Big[\varepsilon|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}\frac{2}{r}(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t, \varphi' z\Big]_Q + \Big[|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}\frac{2}{r}(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t, \varphi z\Big]_Q = \langle Fu^\varepsilon, \varphi z\rangle_{\mathcal{Z}(Q_{0,T})}, \quad (45)$$

де

$$\langle \mathcal{F}u^\varepsilon, w\rangle_{\mathcal{Z}(Q_{0,T})} = \int\limits_0^T \langle F(t)u^\varepsilon(t), w(t)\rangle_Z dt,$$

$$\langle F(t)u^\varepsilon(t), z\rangle_Z = (f(t), z)_\Omega - \sum_{i=1}^n \Big(a_i(t)|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}\frac{2}{\gamma_i}(|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^\varepsilon)_{x_i}, z_{x_i}\Big)_\Omega -$$
$$- \sum_{i=1}^n \Big(b_i(t, u^\varepsilon)u^\varepsilon_{x_i}, z\Big)_\Omega - (g(t, u^\varepsilon), z)_\Omega, \quad t \in (0,T).$$

З оцінки (32) випливає, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}} \Big[\sum_{i=1}^n |(|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^\varepsilon)_{x_i}|^2 + \sum_{i=1}^n |u^\varepsilon|^{\gamma_i}\Big] dxdt \leqslant C_{23}, \quad (46)$$

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |\sqrt{\varepsilon}(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t|^2 dxdt \leqslant C_{24}, \quad (47)$$

де $C_{23}, C_{24} > 0$ не залежать від $\varepsilon > 0$. Звідси та з нерівності Фрідріхса отримаємо

$$\varepsilon \int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^r dxdt = \varepsilon \int\limits_{Q_{0,T}} ||u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon|^2 dxdt \leqslant \varepsilon C_{25} \int\limits_{Q_{0,T}} |(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t|^2 dxdt \leqslant C_{26},$$

де стала $C_{26} > 0$ не залежить від $\varepsilon > 0$, якщо, наприклад, $\varepsilon \leqslant 1$.

З отриманих оцінок випливає існування послідовності $\{u^{\varepsilon_m}\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \{u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ такої, що

$$|u^{\varepsilon_m}|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^{\varepsilon_m} \underset{\varepsilon_m\to 0}{\longrightarrow} \chi_{\frac{\gamma_i}{2}} \ \text{– слабко в } L^2(0,T; H_0^1(\Omega)),$$
$$\sqrt{\varepsilon_m}(|u^{\varepsilon_m}|^{\frac{r}{2}-1}u^{\varepsilon_m})_t \underset{\varepsilon_m\to 0}{\longrightarrow} \chi^0_{\frac{r}{2}} \ \text{– слабко в } L^2(Q_{0,T}).$$

Цих збіжностей буде недостатньо для граничного переходу. Тому отримаємо додаткові оцінки на функції u^ε.

З нерівності Гельдера одержимо, що

$$\int\limits_{\Omega_t} f(t)z dx \leqslant \Big(\int\limits_{\Omega_t} |f(t)|^{\gamma_n'} dx\Big)^{\frac{1}{\gamma_n'}} \Big(\int\limits_{\Omega_t} |z|^{\gamma_n} dx\Big)^{\frac{1}{\gamma_n}}. \quad (48)$$

Нехай $\gamma_i > 2$, $i \in \{1, \dots, n\}$. Оскільки

$$\frac{1}{\frac{2\gamma_i}{(\gamma_i-2)\gamma_i'}} + \frac{1}{\frac{2}{\gamma_i'}} = \frac{(\gamma_i-2)\gamma_i'}{2\gamma_i} + \frac{\gamma_i'}{2} = \frac{\gamma_i'}{2}\Big(\frac{\gamma_i-2}{\gamma_i} + 1\Big) = \frac{\gamma_i'}{2}\Big(\frac{2\gamma_i-2}{\gamma_i}\Big) = \gamma_i'\frac{\gamma_i-1}{\gamma_i} = 1,$$

то з нерівності Юнга зі степенями $\frac{2\gamma_i}{(\gamma_i-2)\gamma_i'} > 1$, $\frac{2}{\gamma_i'} > 1$ одержимо

$$||u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}(|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^\varepsilon)_{x_i}|^{\gamma_i'} = |u^\varepsilon|^{\frac{(\gamma_i-2)\gamma_i'}{2}} |(|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^\varepsilon)_{x_i}|^{\gamma_i'} \leqslant$$

$$\leqslant C_{27}(|u^\varepsilon|^{\gamma_i} + |(|u^\varepsilon|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u^\varepsilon)_{x_i}|^2).$$

Якщо $\gamma_i = 2$, то ця оцінка очевидна.

Нехай для кожного $i \in \{1,\dots,n\}$ $1 < \beta_i \leqslant \frac{2}{\gamma_i'}$. Тоді, використовуючи нерівність Юнга зі степенем β_i, отримаємо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |b(x,t,u^\varepsilon)u^\varepsilon_{x_i}|^{\gamma_i'}dxdt \leqslant b^0 \int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^{(s_i(x)-1)\gamma_i'}|u^\varepsilon_{x_i}|^{\gamma_i'}dxdt =$$

$$= b^0 \int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^{(s_i(x)-1)\gamma_i'-\delta_i}|u^\varepsilon|^{\delta_i}|u^\varepsilon_{x_i}|^{\gamma_i'}dxdt \leqslant C_{28}J_i^1 + C_{29}J_i^2,$$

де $\delta_i = \frac{\gamma_i - \gamma_i'\beta_i}{\beta_i}$,

$$J_i^1 = \int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^{((s_i(x)-1)\gamma_i'-\delta_i)\beta_i'}dxdt, \quad J_i^2 = \int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^{\gamma_i-\gamma_i'\beta_i}|u^\varepsilon_{x_i}|^{\gamma_i'\beta_i}dxdt.$$

Використовуючи до J_i^1 наслідок 1 з $s(x) = ((s_i(x)-1)\gamma_i' - \delta_i)\beta_i'$ та лему 2.3 з [1, с. 443] до J_i^2, з $\alpha_0 = \gamma_i - 2$, $\alpha_1 = 2 - \gamma_i'\beta_i$, $\alpha_2 = \gamma_i'\beta_i$, відповідно, одержимо

$$\int\limits_{Q_{0,T}} |b(x,t,u^\varepsilon)u^\varepsilon_{x_i}|^{\gamma_i'}dxdt \leqslant C_{30} \int\limits_{Q_{0,T}} |u^\varepsilon|^{\gamma_i-2}|u^\varepsilon_{x_i}|^2dxdt + C_{31}.$$

Крім того, за допомогою нерівності Юнга зі степенем $\frac{\gamma_n}{(q(x)-1)\gamma_n'} > 1$ (тут завдяки умові теореми, а саме того, що $q(x) < \gamma_n$) отримаємо

$$|g(x,t,u^\varepsilon)|^{\gamma_n'} \leqslant g^0|u^\varepsilon|^{(q(x)-1)\gamma_n'} \leqslant C_{32}|u^\varepsilon|^{\gamma_n} + C_{33}.$$

Використовуючи ці оцінки та (46), отримаємо, що $F(t)u^\varepsilon(t) \in Z^*$. Тому для всіх $z \in \mathcal{Z}(Q_{0,T})$ одержимо нерівність

$$\langle \mathcal{F}u^\varepsilon, z\rangle_{\mathcal{Z}(Q_{0,T})} \leqslant C_{34}\Big\{\sum_{i=1}^n\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |z_{x_i}|^{\gamma_i}dxdt\Big)^{\frac{1}{\gamma_i}} + \sum_{i=1}^n\Big(\int\limits_{Q_{0,T}} |z|^{\gamma_i}dxdt\Big)^{\frac{1}{\gamma_i}}\Big\},$$

де стала $C_{34} > 0$ – не залежить від $\varepsilon > 0$. Отже, $||\mathcal{F}u^\varepsilon; [\mathcal{Z}(Q_{0,T})]^*|| \leqslant C_{35}$. Оскільки $L^{\gamma_n}(0,T;W_0^{1,\gamma_n}(\Omega)) \circlearrowleft \mathcal{Z}(Q_{0,T})$, то $[\mathcal{Z}(Q_{0,T})]^* \circlearrowleft L^{\gamma_n'}(0,T;W^{-1,\gamma_n'}(\Omega))$, тому

$$||\mathcal{F}u^\varepsilon; L^{\gamma_n'}(0,T;W^{-1,\gamma_n'}(\Omega))|| \leqslant C_{36}, \tag{49}$$

де стала $C_{36} > 0$ – не залежить від $\varepsilon > 0$.

Нехай $\widehat{u^\varepsilon} = |u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}\frac{2}{r}(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t$. Тоді з рівності (45) аналогічно як в [1] одержимо, що в сенсі простору V^* виконуються рівності

$$-\varepsilon\widehat{u^\varepsilon}_t(t) + \widehat{u^\varepsilon}(t) = F(t)u^\varepsilon(t), \quad t \in (0,T), \tag{50}$$

$$\widehat{u^\varepsilon}(T) = 0. \tag{51}$$

Задача (50), (51) така сама як і задача (10), тому з леми 6 отримаємо оцінку (11).

Враховуючи (49) та те, що

$$\widehat{u^\varepsilon} = |u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}\frac{2}{r}(|u^\varepsilon|^{\frac{r}{2}-1}u^\varepsilon)_t = \frac{1}{r-1}(\mathcal{R}u^\varepsilon)_t$$

одержимо, що

$$||(\mathcal{R}u^\varepsilon)_t; L^{\gamma_n'}(0,T;W^{-1,\gamma_n'}(\Omega))|| \leqslant C_{37}, \tag{52}$$

де $C_{37}>0$ – не залежить від $\varepsilon>0$.

Отримаємо додаткові оцінки на елементи множини $\{\mathcal{R}u^\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$. Припустимо, що $i\in\{1,\ldots,n\}$. З умови теореми випливає, що $\frac{\gamma_i}{r-1}>1$. Тому з леми 2.3 з [1, с. 443] для $G=Q_{0,T}$, $\alpha_0=(r-2)\frac{\gamma_i}{r-1}-2+\frac{\gamma_i}{r-1}=\gamma_i-2$, $\alpha_1=2-\frac{\gamma_i}{r-1}$, $\alpha_2=\frac{\gamma_i}{r-1}$ одержимо, що

$$\int\limits_{Q_{0,T}}\left|\frac{1}{r-1}(|u^\varepsilon|^{r-2}u^\varepsilon)_{x_i}\right|^{\frac{\gamma_i}{r-1}}dxdt=\int\limits_{Q_{0,T}}|u^\varepsilon|^{\alpha_0+\alpha_1}|u^\varepsilon_{x_i}|^{\alpha_2}dxdt\leqslant$$

$$\leqslant M_1\int\limits_{Q_{0,T}}|u^\varepsilon|^{\alpha_0}|u^\varepsilon_{x_i}|^{\alpha_1+\alpha_2}dxdt=M_1\int\limits_{Q_{0,T}}|u^\varepsilon|^{\gamma-2}|u^\varepsilon_{x_i}|^2dxdt\leqslant C_{38},$$

де $C_{38}>0$ не залежить від $\varepsilon>0$, $i\in\{1,\ldots,n\}$. Звідси отримаємо, що

$$||\mathcal{R}u^\varepsilon; L^{\frac{\gamma_1}{r-1}}(0,T;W_0^{1,\frac{\gamma_1}{r-1}}(\Omega))||\leqslant C_{39}. \tag{53}$$

Тут $C_{39}>0$ не залежить від $\varepsilon>0$.

Відомо таке: якщо $s_1\leqslant s_2$, то $W_0^{1,s_2}(\Omega)\overline{\circlearrowleft}W_0^{1,s_1}(\Omega)$. Тому $W^{-1,s_1'}(\Omega)\overline{\circlearrowleft}W^{-1,s_2'}(\Omega)$ (тут $\frac{1}{s_2}\leqslant\frac{1}{s_1}$, тобто $1-\frac{1}{s_2'}\leqslant 1-\frac{1}{s_1'}$, $\frac{1}{s_1'}\leqslant\frac{1}{s_2'}$, $s_2'\leqslant s_1'$). У нас

$$\mathcal{R}u^\varepsilon\in L^{\frac{\gamma_1}{r-1}}(0,T;W_0^{\frac{\gamma_1}{r-1}}(\Omega))\circlearrowleft L^{\frac{\gamma_1}{r-1}}(Q_{0,T}).$$

Оскільки

$$\gamma_n\geqslant\frac{\gamma_1}{\gamma_1-(r-1)},$$

то $\gamma_n'\leqslant\frac{\gamma_1}{r-1}$. Тому $L^{\frac{\gamma_1}{r-1}}(\Omega)\overline{\circlearrowleft}L^{\gamma_n}(\Omega)\overline{\circlearrowleft}W^{-1,\gamma_n'}(\Omega)$. Підсумуємо наші результати. Ми маємо трійку просторів

$$W_0^{1,\frac{\gamma_1}{r-1}}(\Omega)\overset{K}{\circlearrowleft}L^{\frac{\gamma_1}{r-1}}(\Omega)\circlearrowleft W^{-1,\gamma_n'}(\Omega) \tag{54}$$

та оцінки (52), (53). Тоді з леми IV.1 [15, с.393] та леми 1.18 [12, с.39] випливає, що

$$\mathcal{R}u^{\varepsilon_m}\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}\mathcal{R}u\quad\text{– сильно в } L^{\frac{\gamma_1}{r-1}}(Q_{0,T}) \text{ та м.с. в } Q_{0,T}. \tag{55}$$

Отже, $\chi_{\frac{\gamma}{2}}=|u|^{\frac{\gamma_i}{2}-1}u$, $\chi^0_{\frac{r}{2}}=0$. Тому, записавши (45) для $\varepsilon=\varepsilon_m$ та спрямувавши $m\to\infty$, отримаємо інтегральну тотожність, яка означає, що u – розв'язок (40)-(42). З (54) випливає, що $W_0^{\frac{\gamma_1}{r-1}}(\Omega)\overset{K}{\circlearrowleft}W^{-1,\gamma_n'}(\Omega)$.

Справді, якщо $\{z^m\}$ – обмежена послідовність в просторі $W_0^{\frac{\gamma_1}{r-1}}(\Omega)$, то, можливо при переході до підпослідовності, $\{z^m\}$ – сильно збіжна в $L^{\frac{\gamma_1}{r-1}}(\Omega)$ до деякого z. Тоді

$$||z-z^m;W^{-1,\gamma_n'}(\Omega)||\leqslant C_{40}||z-z^m;L^{\frac{\gamma_1}{r-1}}(\Omega)||\underset{m\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Отже, застосувавши пункт 3 [16, лема 2, теореми 1,2] для $S_0=W_0^{1,\frac{\gamma_1}{r-1}}(\Omega)$ (нормований простір є півнормованою множиною), $A_1=W^{-1,\gamma_n'}(\Omega)$, отримаємо, що

$Y \overset{K}{\circlearrowleft} C([0,T];A_1)$. Тому $\mathcal{R}u \in C([0,T];W^{-1,\gamma_n'}(\Omega))$ і, зокрема, задовольняє початкову умову (42) в тому сенсі, що ця функція є границею послідовності функцій, які задовольняють умову (42). □

5. Висновки. Ми знайшли умови існування розв'язку для еліптичних і параболічних рівнянь з подвійною нелінійністю та змінними степенями нелінійності. Розв'язок існує в просторах Лебега і Соболєва. Доведення існування розв'язку крайових задач для еліптичних рівнянь проводиться класичним методом Фаедо-Гальоркіна, а от існування розв'язку мішаних задач для параболічних рівнянь – методом еліптичної регуляризації.

Список використаної літератури

1. *Бугрій О.М.* Про задачі з однорідними граничними умовами для нелінійних рівнянь з виродженням / *Бугрій О.М.* // Укр. матем. вісн. – 2008. – Т. 5, №4. – С. 435-469.
2. *Бокало Т.М.* Подвійно нелінійні параболічні рівняння зі змінними показниками нелінійності в молодших членах / *Бокало Т.М., Бугрій О.М.* // Вісн. Одеськ. нац. ун-ту. Матем. і мех. – 2010. – Т. 15, Вип. 18. – С. 22-37.
3. *Bernis F.* Qualitative properties for some non-linear higher order degenerate parabolic equations / *Bernis F.* // Houston J. Math. 14. – 1998. – №3. – С. 319-351.
4. *Шишков А.Е.* Распространения возмущений в сингулярной задаче Коши для квазилинейных вырождающихся параболических уравнений / *Шишков А.Е.* // Матем. сборн. – 1996. – Т. 187, №9. – С. 139-160.
5. *Дегтярев С.П.* $L_1 - L_\infty$ оценки решения задачи Коши для анизотропного вырождающегося параболического уравнения с двойной нелинейностью и растущими начальными данными / *Дегтярев С.П., Тедеев А.Ф.* // Матем. сборн. – 2007. – Т. 198, №9. – С. 639-660.
6. *Лаптев Г.И.* Слабые решения квазилинейных параболических уравнений второго порядка с двойной нелинейностью / *Лаптев Г.И.* // Матем. сборн. – 1997. – Т. 188, №9. – С. 84-112.
7. *Бокало Т.М.* Невироджені подвійно нелінійні параболічні рівняння / *Бокало Т.М., Бугрій О.М.* // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 63, №5. – С. 612-628.
8. *Бугрій О.М.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації / *Бугрій О.М., Лавренюк С.П.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 33-43.
9. *Buhrii O.M.* Uniqueness of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *Buhrii O.M., Mashiyev R.A.* // Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Appl. – 2009. – Vol. 70, №6. – P. 2325-2331.
10. *Mashiyev R.A.* Existence of solutions of the parabolic variational inequality with variable exponent of nonlinearity / *Mashiyev R.A., Buhrii O.M.* // J. of Math. Anal. and Appl. – 2011. – Vol. 377. – P.450-463.
11. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. – М.: Мир, 1972.
12. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грёгер К., Захариас К.* // М.: Мир, 1978.
13. *Панков А.А.* Ограниченные и почти периодические решения нелинейных дифференциально-операторных уравнений. / *Панков А.А.* // К.: Наук. думка., 1985.
14. *Aubin J.-P.* Un theoreme de compacite / *Aubin J.-P.* // Comptes rendus hebdomadaires des seances de l'academie des sciences. – 1963. – Vol. 256, №24. – P. 5042-5044.

15. *Bernis F.* Existence results for doubly nonlinear higher order parabolic equations on unbounded domains / *Bernis F.* // Math. Ann. – 1988. – Vol. 279. – P. 373-394.
16. *Дубинский Ю.А.* Некоторые интегральные неравенства и разрешимость вырождающихся квазилинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений / *Дубинский Ю.А.* // Матем. сборн. – 1964. – Т. 64 (106), №3. – С. 458-480.

Стаття: надійшла до редакції 07.10.2011
прийнята до друку 14.12.2011

ON SOLVABILITY OF SOME NONLINEAR DEGENERATE ANISOTROPIC PARABOLIC EQUATIONS

Taras BOKALO

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: tbokalo@gmail.com

There are studied a Dirichlet-Neuman boundary problem for anisotropic elliptic equations and an initial-boundary problem for degenerate anisotropic parabolic equations. The considered equations enclose the terms with variable exponents of nonlinearity. It is obtained the existence conditions of all examined problems in an anisotropic Sobolev spaces.

Key words: doubly nonlinear equations, variable exponents of nonlinearity, existence theorem.

О РАЗРЕШИМОСТИ НЕКОТОРЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ НЕЛИНЕЙНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ УРАВНЕНИЙ

Тарас БОКАЛО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: tbokalo@gmail.com

Рассмотрено краевую задачу Дирихле-Неймана для вырождающихся анизотропных эллиптических уравнений и первую смешанную задачу для вырождающихся анизотропных параболических уравнений. Уравнения содержат члены со переменными показателями нелинейности. Найдено условия разрешимости этих задач в анизотропных пространствах Соболева.

Ключевые слова: уравнения с двойной нелинейностью, переменные показатели нелинейности, теорема существования решения.