ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 28–42
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 28–42

УДК 517.95

КОЕФІЦІЄНТНА ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З ДОВІЛЬНИМ СЛАБКИМ ВИРОДЖЕННЯМ

Анна БОДНАРЧУК, Надія ГУЗИК

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: hryntsiv@ukr.net

Знайдено умови існування та єдиності розв'язку оберненої задачі визначення залежного від часу старшого коефіцієнта параболічного рівняння з виродженням. Виродження рівняння спричинене функцією при похідній за часом, яка перетворюється в нуль у початковий момент часу.

Ключові слова: коефіцієнтна обернена задача, параболічне рівняння, довільне слабке виродження.

1. Вступ. Обернені задачі визначення залежного від часу старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні досліджували в багатьох працях. Однією з перших вважають працю Б.Ф. Джонса [1], де розглядали обернену задачу визначення коефіцієнта температуропровідності у напівобмеженому стержні при заданому значенні теплового потоку. Сьогодні ці задачі вивчені досить ґрунтовно [2]-[5].

Оберненим задачам для параболічних рівнянь з виродженням присвячені праці [6]-[9]. У них припускали, що невідомий залежний від часу старший коефіцієнт рівняння прямує до нуля при $t \to 0$ за степеневим законом. Обернені задачі для параболічних рівнянь із загальним виродженням вивчено у [10], [11]. Досліджено випадки слабкого та сильного виродження.

Мета нашої праці – знайти умови існування та єдиності класичного розв'язку оберненої задачі визначення залежного від часу старшого коефіцієнта у параболічному рівнянні з виродженням. На відміну від [10], [11], виродження рівняння спричинене функцією при похідній за часом. Дослідження проведено у випадку слабкого виродження. Зауважимо, що означення слабкого виродження, використане у цій праці, взято з [12].

2. Формулювання задачі. В області $Q_T = \{(x,t) : 0 < x < h, 0 < t < T\}$ розглядається обернена задача визначення коефіцієнта $a = a(t),\ a(t) > 0,\ t \in [0,T]$ в рівнянні

$$\psi(t)u_t = a(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t) \tag{1}$$

© Боднарчук А., Гузик Н., 2011

з початковою умовою

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайовими умовами

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

та умовою перевизначення

$$a(t)u_x(0,t) = \mu_3(t), \quad t \in [0,T]. \tag{4}$$

Відомо, що $\psi = \psi(t)$ – монотонно зростаюча функція така, що $\psi(t) > 0$, $t \in (0,T]$ та $\psi(0) = 0$.

Означення 1. *Розв'язком задачі* (1)-(4) *назвемо пару функцій* (a,u) *з класу* $C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$, $a(t) > 0, t \in [0,T]$, *що задовольняє рівняння* (1) *та умови* (2)-(4).

Досліджується випадок слабкого виродження, коли $\lim\limits_{t\to+0}\int\limits_0^t \dfrac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0.$

3. Існування розв'язку.

Умови існування розв'язку задачі (1)-(4) подано у такій теоремі.

Теорема 1. *Нехай виконуються умови:*

1) $\varphi \in C^2[0,h]$, $\quad \mu_i \in C^1[0,T]$, $i = 1,2$, $\quad \mu_3 \in C[0,T]$, $\quad b,c,f \in C(\overline{Q}_T)$ *та задовольняють умову Гельдера за змінною* x *з показником* α, $0 < \alpha < 1$;

2) $\varphi'(x) > 0$, $x \in [0,h]$, $\quad \mu_3(t) > 0$, $t \in [0,T]$;

3) $\psi \in C[0,T]$ *– монотонно зростаюча функція,* $\psi(t) > 0$, $t \in (0,T]$, $\psi(0) = 0$, $\lim\limits_{t\to+0}\int\limits_0^t \dfrac{d\tau}{\psi(\tau)} = 0$;

4) $\mu_1(0) = \varphi(0)$, $\quad \mu_2(0) = \varphi(h)$.

Тоді можна зазначити таке число T_0, $0 < T_0 \leqslant T$, *яке визначається вихідними даними, що існує розв'язок задачі* (1)-(4) *при* $x \in [0,h]$, $t \in [0,T_0]$.

Доведення. Зведемо задачу (1)-(4) до системи рівнянь. Для початку в задачі (1)-(3) проведемо заміну змінних

$$u(x,t) = v(x,t) + \varphi(x) - \varphi(0) + \mu_1(t) + \frac{x}{h}\Big(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)\Big). \tag{5}$$

У підсумку стосовно функції $v = v(x,t)$ отримаємо рівняння

$$\psi(t)v_t = a(t)v_{xx} + b(x,t)v_x + c(x,t)v + f(x,t) - \psi(t)\mu_1'(t) - \frac{\psi(t)x}{h}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)) +$$
$$+ a(t)\varphi''(x) + b(x,t)\left(\varphi'(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0))\right) + c(x,t)\Big(\varphi(x) -$$
$$- \varphi(0) + \mu_1(t) + \frac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0))\Big) \tag{6}$$

та однорідні початкову і крайові умови

$$v(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{7}$$

$$v(0,t) = v(h,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{8}$$

Задача (6)-(8) еквівалентна інтегро-диференціальному рівнянню

$$v(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{G_1(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\Big(b(\xi,\tau)v_\xi+c(\xi,\tau)v+f(\xi,\tau)-\psi(\tau)\mu_1'(\tau)+a(\tau)\varphi''(\xi)-$$
$$-\frac{\psi(\tau)\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))+b(\xi,\tau)(\varphi'(\xi)+\frac{1}{h}(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0)))+$$
$$+c(\xi,\tau)(\varphi(\xi)-\varphi(0)+\mu_1(\tau)+\frac{\xi}{h}(\mu_2(\tau)-\mu_1(\tau)-\mu_2(0)+\mu_1(0)))\Big)\,d\xi\,d\tau, \qquad (9)$$

де через $G_1=G_1(x,t,\xi,\tau)$ позначено функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності

$$u_t=\frac{a(t)}{\psi(t)}u_{xx}.$$

Вона визначається формулою

$$G_1(x,t,\xi,\tau)=\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta(t)-\theta(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\Bigg(\exp\left(-\frac{(x-\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)-$$
$$-\exp\left(-\frac{(x+\xi+2nh)^2}{4(\theta(t)-\theta(\tau))}\right)\Bigg). \qquad (10)$$

Тут $\theta(t)=\int\limits_0^t\frac{a(\tau)}{\psi(\tau)}d\tau$.

Позначимо $w(x,t)\equiv u_x(x,t)$. Використовуючи (5), (9), пряму задачу (1)-(3) замінимо системою інтегральних рівнянь стосовно функцій $u=u(x,t)$, $w=w(x,t)$

$$u(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{G_1(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\Big(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)-\psi(\tau)\mu_1'(\tau)-$$
$$-\frac{\psi(t)\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))+a(\tau)\varphi''(\xi)\Big)\,d\xi\,d\tau+\varphi(x)-\varphi(0)+\mu_1(t)+$$
$$+\frac{x}{h}(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)),\quad (x,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (11)$$

$$w(x,t)=\int\limits_0^t\int\limits_0^h\frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\Big(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau)+c(\xi,\tau)u(\xi,\tau)+f(\xi,\tau)-\psi(\tau)\mu_1'(\tau)-$$
$$-\frac{\psi(\tau)\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))+a(\tau)\varphi''(\xi)\Big)\,d\xi\,d\tau+\varphi'(x)+$$
$$+\frac{1}{h}(\mu_2(t)-\mu_1(t)-\mu_2(0)+\mu_1(0)),\quad (x,t)\in\overline{Q}_T. \qquad (12)$$

Зауважимо, що рівняння (12) отримане з рівняння (11) шляхом диференціювання за просторовою змінною. Умову (4) перепишемо у вигляді

$$a(t)w(0,t)=\mu_3(t),\quad t\in[0,T]. \qquad (13)$$

Отож, обернену задачу (1)-(4) зведено до еквівалентної системи рівнянь (11)-(13). Еквівалентність розуміємо в такому сенсі: якщо пара функцій (a,u) є розв'язком задачі (1)-(4), то (a, u, w) є неперервним розв'язком системи (11)-(13), і, навпаки, якщо $(a, u, w) \in C[0,T] \times (C(\overline{Q}_T))^2$ є розв'язком системи рівнянь (11)-(13), то (a, u) – розв'язок задачі (1)-(4) у сенсі наведеного вище означення. Перша частина твердження випливає зі способу отримання системи рівнянь (11)-(13). Для того, щоб довести зворотне твердження, треба показати, що функції (a, u) належать до класу $C[0,T] \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ і задовольняють умови (1)-(4).

Нехай (a, u, w) є неперервним розв'язком системи (11)-(13). Припущення теореми дають підстави продиференціювати (11) по x. Отримаємо

$$u_x(x,t) = \int_0^t \int_0^h \frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \Big[b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)u(\xi,\tau) + f(\xi,\tau) - \psi(\tau)\mu_1'(\tau) -$$
$$- \frac{\psi(t)\xi}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + a(\tau)\varphi''(\xi) \Big] d\xi\, d\tau + \varphi'(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)).$$

Праві частини цієї рівності та (12) збігаються, тому $w(x,t) \equiv u_x(x,t)$. Використовуючи це в (11), робимо висновок, що $u = u(x,t)$ має потрібну гладкість і задовольняє рівняння (1) й умови (2), (3) для довільної неперервної на $[0,T]$ функції $a = a(t)$.

Підставляючи в (13) замість $w(x,t)$ функцію $u_x(x,t)$, приходимо до умови (4), що й завершує доведення еквівалентності задачі (1)-(4) та системи рівнянь (11)-(13).

Оскільки $w(x,t) \equiv u_x(x,t)$, то, враховуючи (3), робимо висновок, що правильною є формула

$$u(x,t) = \mu_1(t) + \int_0^x w(\sigma,t)d\sigma, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T.$$

Тоді рівняння (12) можемо переписати у вигляді

$$w(x,t) = \int_0^t \int_0^h \frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \Bigg(b(\xi,\tau)w(\xi,\tau) + c(\xi,\tau)\bigg(\mu_1(\tau) + \int_0^\xi w(\sigma,\tau)d\sigma\bigg) + f(\xi,\tau) -$$
$$- \psi(\tau)\mu_1'(\tau) - \frac{\psi(\tau)\xi}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) + a(\tau)\varphi''(\xi)\Bigg) d\xi\, d\tau + \varphi'(x) +$$
$$+ \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)), \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{14}$$

Знайдемо апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (13), (14). Для того, щоб оцінити функцію $w = w(x,t)$ знизу, дослідимо поведінку інтегралів, які входять до правої частини рівності (14), при $t \to 0$. Використовуючи оцінку

$$\int_0^h |G_{1x}(x,t,\xi,\tau)|\, d\xi \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}}, \tag{15}$$

робимо висновок, що інтеграл у правій частині формули (14) має таку саму поведінку при $t \to 0$, як і вираз

$$\int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + \int_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \equiv J_1 + J_2.$$

Оскільки $\psi = \psi(t)$ – монотонно зростаюча функція, $a(t) > 0, t \in [0, T]$ – неперервна на $[0, T]$, то, враховуючи означення функції $\theta = \theta(t)$, для J_1, J_2 отримаємо оцінки

$$J_1 = \int\limits_0^t \frac{\psi(\tau) d\theta(\tau)}{a(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} \leqslant C_2 \psi(t) \Bigg(\int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)} \Bigg)^{\frac{1}{2}}, \qquad (16)$$

$$J_2 \leqslant C_3 \int\limits_0^t \frac{d\theta(\tau)}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} = C_4 \Bigg(\int\limits_0^t \frac{d\sigma}{\psi(\sigma)} \Bigg)^{\frac{1}{2}}. \qquad (17)$$

З отриманих оцінок, враховуючи означення слабкого виродження, випливає, що інтеграли J_1, J_2 прямують до нуля при $t \to 0$. Згідно з умовами теореми у правій частині формули (14) відмінним від нуля є лише другий доданок. Сума всіх інших прямує до нуля при $t \to 0$. Отже, можна зазначити таке число t_1, $0 < t_1 \leqslant T$, що правильною буде нерівність

$$\frac{1}{2}\varphi'(x) + \frac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_1(t) - \mu_2(0) + \mu_1(0)) + \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \Bigg(b(\xi,\tau) w(\xi,\tau) +$$

$$+ c(\xi,\tau) \Bigg(\mu_1(\tau) + \int\limits_0^\xi w(\sigma,\tau) d\sigma \Bigg) + f(\xi,\tau) - \psi(\tau)\mu_1'(\tau) - \frac{\psi(\tau)\xi}{h}(\mu_2'(\tau) - \mu_1'(\tau)) +$$

$$+ a(\tau)\varphi''(\xi) \Bigg) d\xi \, d\tau \geqslant 0, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,t_1].$$

Звідси та з (14) отримаємо оцінку $w = w(x,t)$ знизу

$$w(x,t) \geqslant \frac{1}{2} \min_{[0,h]} \varphi'(x) \equiv M_1 > 0, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,t_1]. \qquad (18)$$

З (13), враховуючи (18), одержуємо

$$a(t) \leqslant \frac{\max\limits_{[0,T]} \mu_3(t)}{M_1} \equiv A_1 < \infty, \quad t \in [0, t_1]. \qquad (19)$$

Далі оцінимо функцію $w(x,t)$ зверху. Позначимо $V(t) = \max\limits_{x \in [0,h]} |w(x,t)|$. На підставі рівняння (14) та використовуючи оцінки (15), (19), для функції $V = V(t)$ отримаємо нерівність

$$V(t) \leqslant C_5 \int\limits_0^t \frac{V(\tau) d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + C_6 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} +$$

$$+ C_7 \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\sqrt{\theta(t) - \theta(\tau)}} + C_8, \quad t \in [0, T]. \qquad (20)$$

Позначивши $V_1(t) \equiv V(t) + 1$, останню нерівність зведемо до вигляду

$$V_1(t) \leqslant C_9 + C_{10} \int\limits_0^t \frac{V_1(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{21}$$

Враховуючи умову перевизначення (13), знаходимо

$$\frac{1}{a(\tau)} \leqslant \frac{V_1(t)}{\mu_3(t)}. \tag{22}$$

Тоді нерівність (21) можна переписати у вигляді

$$V_1(t) \leqslant C_9 + C_{11} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)V_1^2(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}. \tag{23}$$

Використовуючи нерівність Коші, піднесемо обидві частини нерівності (23) до квадрата

$$V_1^2(t) \leqslant 2C_9^2 + 2C_{11}^2 \Bigg(\int\limits_0^t \frac{a(\tau)V_1^2(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \Bigg)^2. \tag{24}$$

До інтеграла правої частини нерівності (24) застосуємо нерівність Коші-Буняковського

$$\Bigg(\int\limits_0^t \frac{a(\tau)V_1^2(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \Bigg)^2 \leqslant \int\limits_0^t \frac{a(\tau)V_1^4(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Розглянемо інтеграл

$$\int\limits_0^t \frac{a(\tau)\,d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} = \int\limits_0^t \frac{d\theta(\tau)}{\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} = 2\Bigg(\int\limits_0^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\psi(\sigma)} \Bigg)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_{12}.$$

Використовуючи отриманий результат у нерівності (24), одержимо

$$V_1^2(t) \leqslant C_{13} + C_{14} \int\limits_0^t \frac{a(\tau)V_1^4(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}, \quad t \in [0,T]. \tag{25}$$

У нерівності (25) змінимо t на σ, домножимо її на $\dfrac{a(\sigma)}{\psi(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}}$ та проінтегруємо по σ від 0 до t

$$\int\limits_0^t \frac{a(\sigma)V_1^2(\sigma)d\tau}{\psi(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \leqslant C_{15} + C_{16} \int\limits_0^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\psi(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \int\limits_0^\sigma \frac{a(\tau)V_1^4(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(\sigma)-\theta(\tau)}}.$$

Змінивши межі інтегрування та використавши рівність

$$\int\limits_\tau^t \frac{a(\sigma)d\sigma}{\psi(\sigma)\sqrt{(\theta(t)-\theta(\sigma))(\theta(\sigma)-\theta(\tau))}} = \pi,$$

приходимо до нерівності

$$\int_0^t \frac{a(\sigma)V_1^2(\sigma)d\tau}{\psi(\sigma)\sqrt{\theta(t)-\theta(\sigma)}} \leqslant C_{15} + C_{17}\int_0^t \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\psi(\tau)}. \tag{26}$$

Нерівність (26) використаємо у (23). У підсумку нерівність (23) набуде вигляду

$$V_1(t) \leqslant C_{18} + C_{19}\int_0^t \frac{V_1^4(\tau)d\tau}{\psi(\tau)}. \tag{27}$$

Розв'язуючи (27) як в [13], отримаємо

$$V_1(t) \leqslant \frac{C_{18}}{\sqrt[3]{1 - 3C_{18}^3 C_{19}\int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)}}} \equiv M_2, \quad t \in [0, t_2],$$

де число t_2, $0 < t_2 \leqslant T$ визначається з нерівності

$$1 - 3C_{18}^3 C_{19}\int_0^{t_2} \frac{d\tau}{\psi(\tau)} > 0.$$

Повертаючись до введених позначень, одержимо

$$|w(x,t)| \leqslant M_2, \quad (x,t) \in [0,h] \times [0,t_2]. \tag{28}$$

Оцінка (28) допомагає оцінити $a = a(t)$ знизу

$$a(t) \geqslant \frac{\min\limits_{[0,T]} \mu_3(t)}{M_3} \equiv A_2 > 0 \quad t \in [0,t_2].$$

Отже, апріорні оцінки розв'язків системи рівнянь (13), (14) доведено.

Розглянемо систему рівнянь (13), (14) як операторне рівняння

$$W = PW,$$

де $W = (a, w)$, а оператор P визначається правими частинами рівностей (13), (14), відповідно.

У банаховому просторі $\mathbb{B} = C[0,T_0] \times C(\overline{Q}_{T_0})$ виберемо множину $N = \{(a,w) \in \mathbb{B} : A_2 \leqslant a(t) \leqslant A_1,\ M_1 \leqslant w(x,t) \leqslant M_2,\ (x,t) \in [0,h] \times [0,T_0]\}$, де $T_0 = \min\{t_1, t_2\}$. З побудови множини N робимо висновок, що вона замкнена й опукла, а оператор P переводить її в себе. Для того, щоб застосувати теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора до системи рівнянь (13), (14), залишилось показати, що оператор P цілком неперервний. На підставі рівнянь (13), (14) достатньо довести компактність таких інтегральних операторів:

$$P_1 : \quad \omega(x,t) \to \int_0^t \int_0^h G_{1x}(x,t,\xi,\tau)\omega(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau,$$

$$P_2: \quad \omega(x,t) \to \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \omega(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau.$$

Доведемо, що оператор P_2 цілком неперервний. Для цього, використовуючи теорему Арцела-Асколлі, покажемо рівномірну обмеженість та одностайну неперервність множини $P_2\omega$.

Використавши оцінки (15), (17), отримаємо

$$|P_2\omega(x,t)| = \left| \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \omega(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_N |\omega(x,t)| \left| \int\limits_0^t \frac{d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}} \right| \leqslant C_{20}.$$

Далі доведемо одностайну неперервність множини $P_2\omega$. Розглянемо різницю

$$\Delta = |P_2\omega(x_1,t_1) - P_2\omega(x_2,t_2)| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^h \Big(G_{1x}(x_1,t_1,\xi,\tau) - G_{1x}(x_1,t_2,\xi,\tau) \Big) \frac{\omega(\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\, d\xi\, d\tau \right| +$$

$$+ \left| \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^h \frac{G_{1x}(x_1,t_2,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \omega(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau - \int\limits_0^{t_2} \int\limits_0^h \frac{G_{1x}(x_2,t_2,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \omega(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \right| \equiv \Delta_1 + \Delta_2.$$

Оскільки $\lim\limits_{t\to 0} \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \omega(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau = 0$, то

$$\left| \int\limits_0^t \int\limits_0^h \frac{G_{1x}(x,t,\xi,\tau)}{\psi(\tau)} \omega(\xi,\tau)\, d\xi\, d\tau \right| < \frac{\varepsilon}{8}, \quad \text{якщо} \quad t < \delta_1,\ x \in [0,h]. \tag{29}$$

Тоді

$$\Delta_1 < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{коли} \quad t_1, t_2 < \delta_1.$$

Далі припустимо, що $t_1, t_2 > \delta_1$, та, для визначеності, $t_2 > t_1$. Використовуючи зображення похідної по x від функції Гріна $G_1(x,t,\xi,\tau)$, оцінимо Δ_1

$$\Delta_1 \leqslant C_{21} \int\limits_0^{t_1} \int\limits_0^h \left| \frac{1}{4\sqrt{\pi}(\theta(t_1)-\theta(\tau))^{\frac{3}{2}}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x_1-\xi+2nh)^2}{\theta(t_1)-\theta(\tau)} \right)(x_1-\xi+2nh) + \right.\right.$$

$$\left. + \exp\left(-\frac{(x_1+\xi+2nh)^2}{\theta(t_1)-\theta(\tau)} \right)(x_1+\xi+2nh) \right) - \frac{1}{4\sqrt{\pi}(\theta(t_2)-\theta(\tau))^{\frac{3}{2}}} \times$$

$$\times \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left(\exp\left(-\frac{(x_1-\xi+2nh)^2}{\theta(t_2)-\theta(\tau)} \right)(x_1-\xi+2nh) + \exp\left(-\frac{(x_1+\xi+2nh)^2}{\theta(t_2)-\theta(\tau)} \right) \times \right.$$

$$\left.\left. \times (x_1+\xi+2nh) \right) \right| \frac{1}{\psi(\tau)}\, d\xi\, d\tau.$$

В інтегралі правої частини останньої нерівності проведемо заміну змінних $\theta(t_1)-$ $-\theta(\tau)=\sigma$. Оскільки $\theta(t_1)\leqslant A_2t_1$, то, розбиваючи проміжок інтегрування на два, для Δ_1 отримаємо

$$\Delta_1\leqslant C_{22}\int\limits_0^{\delta_1}\int\limits_0^{h}\left|\frac{1}{4\sqrt{\pi}\sigma^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x_1-\xi+2nh)^2}{\sigma}\right)(x_1-\xi+2nh)+\right.\right.$$

$$\left.+\exp\left(-\frac{(x_1+\xi+2nh)^2}{\sigma}\right)(x_1+\xi+2nh)\right)-\frac{1}{4\sqrt{\pi}(\theta(t_2)-\theta(t_1)+\sigma)^{\frac{3}{2}}}\times$$

$$\times\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left(\exp\left(-\frac{(x_1-\xi+2nh)^2}{\theta(t_2)-\theta(t_1)+\sigma}\right)(x_1-\xi+2nh)+\exp\left(-\frac{(x_1+\xi+2nh)^2}{\theta(t_2)-\theta(t_1)+\sigma}\right)\times\right.$$

$$\left.\left.\times(x_1+\xi+2nh)\right)\right|d\xi\,d\sigma+C_{22}\int\limits_{\delta_1}^{A_2t_1}\left|\int\limits_{\sigma}^{\theta(t_2)-\theta(t_1)+\sigma}\frac{\partial}{\partial s}\left(\int\limits_0^h\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\left((x_1-\xi+2nh)\times\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.\times\exp\left(-\frac{(x_1-\xi+2nh)^2}{4s}\right)+(x_1+\xi+2nh)\exp\left(-\frac{(x_1+\xi+2nh)^2}{4s}\right)\right)d\xi\right)ds\right|d\sigma\equiv$$

$$\equiv\Delta_{1,1}+\Delta_{1,2}.$$

Враховуючи (29), для $\Delta_{1,1}$ одержимо оцінку

$$\Delta_{1,1}<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Для оцінки $\Delta_{1,2}$ обчислимо похідні та проведемо заміни змінних $\dfrac{x_1-\xi+2nh}{2\sqrt{s}}=z$, $\dfrac{x_1+\xi+2nh}{2\sqrt{s}}=z$ в отриманих інтегралах, відповідно. У підсумку одержимо

$$\Delta_{1,2}\leqslant C_{23}\int\limits_{\delta_1}^{A_2t_1}\int\limits_{\sigma}^{\theta(t_2)-\theta(t_1)+\sigma}\frac{1}{s^{\frac{3}{2}}}\,ds\,d\sigma=2C_{23}\int\limits_{\delta_1}^{A_2t_1}\left(\frac{1}{\sqrt{\sigma}}-\frac{1}{\sqrt{\theta(t_2)-\theta(t_1)+\sigma}}\right)d\sigma\leqslant$$

$$\leqslant C_{24}\int\limits_{\delta_1}^{A_2t_1}\frac{\theta(t_2)-\theta(t_1)}{\sigma^{\frac{3}{2}}}\,d\sigma\leqslant C_{25}|t_2-t_1|<\frac{\varepsilon}{4},\quad\text{коли}\quad|t_2-t_1|<\frac{\varepsilon}{4C_{25}}.$$

Остаточно отримали

$$\Delta_1<\frac{\varepsilon}{2},\quad\text{коли}\quad|t_2-t_1|<\frac{\varepsilon}{4C_{25}}.$$

Далі розглянемо Δ_2. Враховуючи (29), отримаємо

$$\Delta_2<\frac{\varepsilon}{4},\quad\text{коли}\quad t_1,t_2<\delta_1.$$

Оцінимо Δ_2 при $t_1,t_2>\delta_1$ і $t_2>t_1$.

$$\Delta_2\leqslant\left|\int\limits_0^{t_1}\int\limits_0^{h}\Big(G_{1x}(x_1,t_2,\xi,\tau)-G_{1x}(x_2,t_2,\xi,\tau)\Big)\frac{\omega(\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\,d\xi\,d\tau\right|+$$

$$+\left|\int_{t_1}^{t_2}\int_0^h \frac{G_{1x}(x_2,t_2,\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\omega(\xi,\tau)\,d\xi\,d\tau\right| = \Delta_{2,1}+\Delta_{2,2}.$$

Враховуючи (15) та (17), для другого доданка Δ_2 одержимо

$$\Delta_{2,2} \leqslant C_{26}\int_{t_1}^{t_2}\frac{d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t_2)-\theta(\tau)}} \leqslant C_{27}|t_2-t_1| < \frac{\varepsilon}{4},$$

коли $|t_2-t_1| < \dfrac{\varepsilon}{4C_{27}}$. Далі оцінимо $\Delta_{2,1}$.

$$\Delta_{2,1} \leqslant \left|\int_0^{\delta_1}\int_0^h \Big(G_{1x}(x_1,t_2,\xi,\tau)-G_{1x}(x_2,t_2,\xi,\tau)\Big)\frac{\omega(\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\,d\xi\,d\tau\right| +$$

$$+\left|\int_{\delta_1}^{t_1}\int_0^h \Big(\int_{x_1}^{x_2} G_{1xx}(x,t_2,\xi,\tau)dx\Big)\frac{\omega(\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\,d\xi\,d\tau\right|.$$

Для оцінки першого доданка останньої нерівності використаємо (29), при оцінюванні другого – зображення похідної функції Гріна. У підсумку отримаємо

$$\Delta_{2,1} \leqslant \frac{\varepsilon}{8} + C_{28}|x_2-x_1| < \frac{\varepsilon}{4}, \quad \text{коли} \quad |x_2-x_1| < \frac{\varepsilon}{8C_{28}}.$$

Отож, для Δ_2 правильна оцінка

$$\Delta_2 < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |t_2-t_1| < \frac{\varepsilon}{4C_{27}}, \quad |x_2-x_1| < \frac{\varepsilon}{8C_{28}}.$$

Як підсумок отримуємо оцінку

$$\Delta < \varepsilon,$$

коли $|t_2-t_1| < \min\left\{\dfrac{\varepsilon}{4C_{25}}, \dfrac{\varepsilon}{4C_{27}}\right\}$, $|x_2-x_1| < \dfrac{\varepsilon}{8C_{28}}$, що завершує доведення компактності множин P_2N. Компактність множини P_1N доводиться за тією самою схемою. Отже, всі умови теореми Шаудера виконуються, а це означає, що існує розв'язок (a,w) системи рівнянь (13), (14) при $x \in [0,h]$, $t \in [0,T_0]$. Після цього функцію $u = u(x,t)$ знаходимо, враховуючи рівняння (11). Враховуючи еквівалентність задачі (1)-(4) та системи (11)-(13), отримуємо існування розв'язку задачі (1)-(4) на звуженому часовому проміжку. Теорему 1 доведено. □

4. Єдиність розв'язку. Знайдемо умови, за яких розв'язок задачі (1)-(4) єдиний.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови:*
1) $\varphi \in C^3[0,h]$, $\quad b,c,f \in C^{1,0}(\overline{Q}_T)$;
2) $\mu_3(t) \neq 0$, $\quad t \in [0,T]$.
Тоді розв'язок задачі (1)-(4) *єдиний.*

Доведення. Припустимо, що існують два розв'язки $(a_i, u_i), i = 1, 2$ задачі (1)-(4). Різниці цих розв'язків позначимо через $a(t) = a_1(t) - a_2(t), u(x,t) = u_1(x,t) - u_2(x,t)$. Вони задовольняють рівняння

$$\psi(t)u_t = a_1(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + a(t)u_{2xx}, \quad (x,t) \in Q_T, \tag{30}$$

та умови

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{31}$$

$$u(0,t) = u(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{32}$$

$$a_1(t)u_x(0,t) + a(t)u_{2x}(0,t) = 0, \quad t \in [0,T]. \tag{33}$$

За допомогою функції Гріна $G_1^*(x,t,\xi,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння

$$\psi(t)u_t = a_1(t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u,$$

розв'язок задачі (30)-(32) подамо у вигляді

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_1^*(x,t,\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\frac{a(\tau)}{\psi(\tau)}\,d\xi\,d\tau. \tag{34}$$

Продиференціювавши (34) по x, отримаємо

$$u_x(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h G_{1x}^*(x,t,\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\frac{a(\tau)}{\psi(\tau)}\,d\xi\,d\tau. \tag{35}$$

З умови перевизначення (4) та припущень теореми одержуємо

$$u_{2x}(0,t) = \frac{\mu_3(t)}{a_2(t)} \neq 0, \quad t \in [0,T]. \tag{36}$$

Врахувавши (36), (35), знаходимо рівняння стосовно функції $a = a(t)$

$$a(t) = \int\limits_0^t K(t,\tau)a(\tau)\,d\tau, \tag{37}$$

де

$$K(t,\tau) = -\frac{a_1(t)}{u_{2x}(0,t)}\int\limits_0^h G_{1x}^*(0,t,\xi,\tau)\frac{u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\,d\xi. \tag{38}$$

Доведемо, що ядро $K(t,\tau)$ інтегрального рівняння (37) має інтегровну особливість. Для цього оцінимо спочатку $u_{2xx}(x,t)$. Випишемо розв'язок $u_2(x,t)$ відповідної задачі $(1)-(3)$ у вигляді (11) та продиференціюємо його двічі по x. Враховуючи властивості функцій Гріна, знаходимо

$$u_{2xx}(x,t) = \varphi''(x) + \int\limits_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,h,\tau)\frac{1}{\psi(\tau)}\Big(b(h,\tau)u_{2\xi}(h,\tau) + c(h,\tau)\mu_2(\tau) + f(h,\tau) -$$

$$-\psi(\tau)\mu_2'(\tau) + a(\tau)\varphi''(h)\Big)\,d\tau - \int\limits_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)\frac{1}{\psi(\tau)}\Big(b(0,\tau)u_{2\xi}(0,\tau) + c(0,\tau)\mu_1(\tau) +$$

$$+f(0,\tau)-\psi(\tau)\mu_1^{'}(\tau)+a(\tau)\varphi''(0)\Big)\,d\tau-\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)\frac{1}{\psi(\tau)}\Big(b(\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)+$$

$$+(b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau))u_{2\xi}(\xi,\tau)+c_\xi(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)+a(\tau)\varphi'''(\xi)-\frac{\psi(\tau)}{h}(\mu_2^{'}(\tau)-\mu_1^{'}(\tau))+$$

$$+f_\xi(\xi,\tau)\Big)\,d\xi\,d\tau=\varphi''(x)+\sum_{i=1}^{3}L_i+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)b(\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\frac{1}{\psi(\tau)}\,d\xi\,d\tau. \quad (39)$$

Через $G_1^{(2)}(x,t,\xi,\tau)$ позначено функцію Гріна для рівняння

$$u_{2t}=\frac{a_2(t)}{\psi(t)}u_{2xx},$$

яка визначається формулою (10) з $\theta_2(t)=\int_0^t\frac{a_2(\tau)}{\psi(\tau)}d\tau$.

Оцінимо кожен з доданків (39). Оскільки

$$L_2\leqslant\left|\int\limits_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)\mu_1^{'}(\tau)\,d\tau\right|+\left|\int\limits_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)\frac{1}{\psi(\tau)}(b(0,\tau)u_{2\xi}(0,\tau)+\right.$$

$$\left.+c(0,\tau)\mu_1(\tau)+f(0,\tau))\,d\tau\right|\equiv L_{2,1}+L_{2,2},$$

то оцінимо для початку інтеграл

$$I\equiv\int\limits_0^t G_{1\xi}^{(2)}(x,t,0,\tau)\frac{a_2(\tau)}{\psi(\tau)}\,d\tau=\int\limits_0^t\Bigg(\frac{1}{2\sqrt{\pi(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{(x+2nh)}{(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\times$$

$$\times\exp\left(-\frac{(x+2nh)^2}{4(\theta_2(t)-\theta_2(\tau))}\right)\Bigg)\frac{a_2(\tau)}{\psi(\tau)}\,d\tau.$$

В отриманому інтегралі почергово проведемо заміни змінних $\theta_2(t)-\theta_2(\tau)=\eta$, $\sigma=\frac{x+2nh}{2\sqrt{\eta}}$. У підсумку отримаємо

$$I=-\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=-\infty}^{-1}\int\limits_{-\infty}^{\frac{x+2nh}{2\sqrt{\theta_2(t)}}}e^{-\sigma^2}\,d\sigma+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{\theta_2(t)}}}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\,d\sigma+\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{\frac{x+2nh}{2\sqrt{\theta_2(t)}}}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\,d\sigma=$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{\theta_2(t)}}}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\,d\sigma-\sum_{n=1}^{+\infty}\int\limits_{-\frac{x+2nh}{2\sqrt{\theta_2(t)}}}^{\frac{x+2nh}{2\sqrt{\theta_2(t)}}}e^{-\sigma^2}\,d\sigma\leqslant\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int\limits_{\frac{x}{2\sqrt{\theta_2(t)}}}^{+\infty}e^{-\sigma^2}\,d\sigma\leqslant 1.$$

Тоді для $L_{2,2}$ правильна оцінка $L_{2,2}\leqslant C_{29}$. Аналогічно $L_{2,1}\leqslant C_{30}$, звідки $L_2\leqslant C_{31}$.

Застосувавши до L_1 наведені міркування, отримаємо $L_1 \leqslant C_{32}$. Враховуючи означення слабкого виродження, оцінимо L_3

$$L_3 = \Big| \int_0^t \int_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)\frac{1}{\psi(\tau)}\Big((b_\xi(\xi,\tau)+c(\xi,\tau))u_{2\xi}(\xi,\tau)+c_\xi(\xi,\tau)u_2(\xi,\tau)+$$

$$+f_\xi(\xi,\tau)\Big)\,d\xi\,d\tau\Big| \leqslant C_{33}\int_0^t\int_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)\frac{1}{\psi(\tau)}\,d\xi\,d\tau \leqslant C_{34}.$$

У підсумку одержали

$$|u_{2xx}(x,t)| \leqslant C_{35} + C_{36}\int_0^t\int_0^h G_{1\xi}^{(2)}(x,t,\xi,\tau)\frac{u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)}{\psi(\tau)}\,d\xi\,d\tau. \qquad (40)$$

Позначимо $V_2(t) = \max\limits_{x\in[0,h]} |u_{2xx}(x,t)|$. На підставі (40), стосовно функції $V_2 = V_2(t)$ отримаємо нерівність

$$V_2(t) \leqslant C_{35} + C_{37}\int_0^t \frac{V_2(\tau)d\tau}{\psi(\tau)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Використовуючи [14, с. 22], знаходимо $V_2(t) \leqslant C_{38},\ t\in[0,T]$, або, повертаючись до введених позначень,

$$|u_{2xx}(x,t)| \leqslant C_{38},\ (x,t)\in\overline{Q}_T.$$

Враховуючи відому оцінку функції Гріна $G_1^*(x,t,\xi,\tau)$ [15, с. 468], знайдемо оцінку ядра інтегрального рівняння (37)

$$|K(t,\tau)| = \Big| -\frac{a_1(t)}{\psi(\tau)u_{2x}(0,t)}\int_0^h G_{1x}^*(0,t,\xi,\tau)u_{2\xi\xi}(\xi,\tau)\,d\xi\Big| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C_{39}}{\psi(\tau)(\theta(t)-\theta(\tau))}\int_0^h \exp\Big(-C_{40}\frac{\xi^2}{\theta(t)-\theta(\tau)}\Big)\,d\xi \leqslant \frac{C_{41}}{\psi(t)\sqrt{\theta(t)-\theta(\tau)}}.$$

Звідси робимо висновок про інтегровність ядра $K(t,\tau)$. Це означає, що інтегральне рівняння Вольтерра другого роду (37) має тільки тривіальний розв'язок $a(t)\equiv 0,\ t\in[0,T]$. Використовуючи це в задачі (30)-(32), знаходимо $u(x,t)\equiv 0$, $(x,t)\in\overline{Q}_T$. Теорему 2 доведено. □

Список використаної літератури

1. *Jones B.F.* The determination of a coefficient in a parabolic differential equation. I. Existence and uniqueness / *Jones B.F.* // J. Math. Mech. – 1962. – Vol. 11, №5. – P. 907-918.
2. *Cannon J.R.* Recovering a time-dependent coefficient in a parabolic differential equation / *Cannon J.R., Rundell W.* // J. Math. Anal. Appl. – 1991 – Vol. 160. – P. 572-582.
3. *Azari H.* Determination of an unknown coefficient in a parabolic inverse problem / *Azari H., Li C., Nie Y., Shang S.* // Dynamics of Continuos, Discrete and Impulsive Systems. Series A: Math. Analysis. – 2004. – Vol. 11. – P. 665-674.

4. *Березницька І.Б.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з інтегральним перевизначенням / *Березницька І.Б., Дребот А.Й., Іванчов М.І., Макар Ю.М.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 1997. – Вип. 48. – С. 71-79.
5. *Иванчов Н.И.* Некоторые обратные задачи для уравнения теплопроводности с нелокальными краевыми условиями / *Иванчов Н.И.* // Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45, №8. – С. 1066-1071.
6. *Ivanchov M.* An inverse problem for a strongly degenerate heat equation / *Ivanchov M., Saldina N.* // J. Inv. Ill-Posed Probl. – 2006. – Vol. 14, №5. – P. 1-16.
7. *Іванчов М.* Обернена задача для рівняння теплопровідності з виродженням / *Іванчов М., Салдіна Н.* // Укр. мат. журн. – 2005. – Т. 57, №11. – С. 1563-1570.
8. *Салдіна Н.В.* Обернена задача для параболічного рівняння з виродженням / *Салдіна Н.В.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія. мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 245-257.
9. *Салдіна Н.* Ідентифікація старшого коефіцієнта в параболічному рівнянні з виродженням / *Салдіна Н.* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. Математика. – 2006. – №288. – С. 99-106.
10. *Салдіна Н.В.* Сильно вироджена обернена параболічна задача з загальною поведінкою коефіцієнтів / *Салдіна Н.В.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія. мех.-мат. – 2006. – Вип. 66. – С. 186-202.
11. *Saldina N.* An inverse problem for a generally degenerate heat equation / *Saldina N.* // Вісн. нац. ун-ту "Львівська Політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2006. – Вип. 566. – С. 59-67.
12. *Калашников А.С.* О растущих решениях линейных уравнений второго порядка с неотрицательной характеристической формой / *Калашников А.С.* // Мат. заметки. – 1968. – Т. 3, №2. – С. 171-178.
13. *Ivanchov M., Hryntsiv N.* Inverse problem for a weakly degenerate parabolic equation in a domain with free boundary / *Ivanchov M., Hryntsiv N.* // J. of Math. Sciences. – 2010. – Vol. 167, №1. – P. 16-29.
14. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / *Ivanchov M.* // Lviv: VNTL Publishers, 2003.
15. *Ладиженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / *Ладиженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н.* // М.: Наука, 1973.

Стаття: надійшла до редакції 16.09.2011
прийнята до друку 14.12.2011

COEFFICIENT INVERSE PROBLEM FOR A PARABOLIC EQUATION WITH AN ARBITRARY WEAK DEGENERATION

Anna BODNARCHUK, Nadiya HUZYK

Ivan Franro National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: hryntsiv@ukr.net

We establish conditions of existence and uniqueness of the solution to the inverse problem for determination of the time-dependent coefficient at the higher order derivative in the degenerate parabolic equation. The degeneration of the equation is caused by the function at the derivative with respect to time, which vanishes at the initial moment of time.

Key words: coefficient inverse problem, parabolic equation, arbitrary weak degeneration.

КОЭФФИЦИЕНТНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ПРОИЗВОЛЬНЫМ СЛАБЫМ ВЫРОЖДЕНИЕМ

Анна БОДНАРЧУК, Надежда ГУЗЫК

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: hryntsiv@ukr.net

Установлено условия существования и единственности решения обратной задачи определения зависящего от времени старшего коэффициента в параболическом уравнении с вырождением. Вырождение уравнения вызвано функцией при производной по времени, которая превращается в нуль в начальный момент времени.

Ключевые слова: коэффициентная обратная задача, параболическое уравнение, произвольное слабое вырождение.