ISSN 2078-3744. Вiсник Львiв. ун-ту. Серiя мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 17–27
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 17–27

УДК 517.53

РОЗПОДIЛ НУЛIВ ЗА АРГУМЕНТАМИ ТА КОЕФIЦIЄНТИ ФУР'Є ЛОГАРИФМА ЦIЛОЇ ФУНКЦIЇ

Оксана БОДНАР, Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ

Львiвський нацiональний унiверситет iменi Iвана Франка,
вул. Унiверситетська, 1, Львiв, 79000
e-mail: matmod@franko.lviv.ua

Для цiлої функцiї f нульового порядку знайдено залежнiсть мiж коефiцiєнтами Фур'є $\ln f$, аргументами та кутовою щiльнiстю її нулiв.

Ключовi слова: цiла функцiя, порядок цiлої функцiї, кутова щiльнiсть нулiв, коефiцiєнти Фур'є.

1. Вступ. Клас невiд'ємних, неперервно диференцiйовних, зростаючих до $+\infty$ на $[0, +\infty)$ функцiй v таких, що $rv'(r)/v(r) \to 0$ при $r \to +\infty$ позначимо через L. Добре вiдомо [1, с.15], що з точнiстю до еквiвалентних функцiй клас L збiгається з класом $L_{пз}$ повiльно зростаючих функцiй. Нехай $\mathcal{H}_0(L)$ – клас цiлих трансцендентних функцiй f нульового порядку, нулi a_j яких задовольняють умову

$$\exists\, v \in L \quad \exists\, A > 0 \quad \forall\, r > 0\colon \quad n(r, 0, f) \leqslant Av(r),$$

де $n(r, 0, f) = n(r)$ – лiчильна функцiя нулiв f. Не зменшуючи загальностi, будемо вважати, що $f(0) = 1$, $v(0) = 0$, $\ln f(z) = \ln |f(z)| + i \arg f(z)$ – однозначна вiтка многозначної функцiї $\mathrm{Ln} f(z)$, визначена в $\mathbb{C} \setminus \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \{z\colon |z| \geq |a_j|, \arg z = \arg a_j = \alpha_j\}$, $\ln f(0) = 0$.

Вважатимемо, що нулi функцiї f з класу $\mathcal{H}_0(L)$ мають кутову щiльнiсть, якщо для всiх α i β, за винятком, можливо, не бiльше, нiж злiченної кiлькостi значень з $[0, 2\pi]$, iснує границя

$$\Delta(\alpha, \beta) = \lim_{r \to +\infty} n(r, \alpha, \beta)/v(r),$$

де $n(r, \alpha, \beta)$ – кiлькiсть нулiв a_j функцiї f, якi лежать в секторi $\{z\colon |z| \leq r,$ $\alpha < \arg z \leq \beta\}$, $0 \leq \alpha < \beta < 2\pi$.

Приймемо для $k \in \mathbb{Z}$

$$n_k(r) = \sum_{|a_j| \leqslant r} e^{-ik\alpha_j}, \qquad N_k(r) = \int\limits_0^r \frac{n_k(t)}{t} dt.$$

З теореми Каратеодорі-Леві (див., наприклад, [2, с. 98]) отримуємо, що нулі функції f з класу $\mathcal{H}_0(L)$ мають кутову щільність тоді і лише тоді, коли для всіх $k \in \mathbb{Z}$ існують скінченні границі ($\delta_k \in \mathbb{C}$)

$$\delta_k = \lim_{r\to+\infty} n_k(r)/v(r). \tag{1}$$

Приймемо

$$G_f(\theta) = i \sum_{k\neq 0} \frac{\delta_k}{k}\, e^{ik\theta}, \tag{2}$$

L^* – підклас функцій v класу L такий, що $rv'(r)/v(r) \searrow 0, r \to +\infty$,

$$v_1(r) = \int_0^r \frac{v(t)}{t} dt, \qquad N(r, 0, f) = N(r) = N_0(r),$$

$\|\cdot\|_p$ $-p$ – норма в просторі $L^p[0, 2\pi]$, $p \in [1, +\infty)$.

Зауваження 1. Оскільки $\delta_{-k} = \overline{\delta}_k$, то, як неважко показати, з (2) випливає

$$G_f(\theta) = -2 \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{Im(\delta_k e^{ik\theta})}{k}.$$

2. Основні результати. В [3] знайдено необхідні та достатні умови на розподіл нулів цілих функцій класу $\mathcal{H}_0(L)$, щоб величини $\ln|f|$, $\arg f$, $\ln f - N(r)$ регулярно зростали в $L^p[0, 2\pi]$ метриці, точніше доведено твердження.

Теорема A. *Якщо $f \in \mathcal{H}_0(L)$ і для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ існують границі (1), то для всіх $p \in [1, +\infty)$*

$$\left\| \frac{\ln f(re^{i\theta}) - N(r)}{v(r)} - iG_f(\theta) \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty. \tag{3}$$

Якщо границі (1) існують для всіх $k \in \mathbb{Z}$, тобто нулі f мають кутову щільність, то для всіх $p \in [1, +\infty)$

$$\left\| \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{v_1(r)} - \delta_0 \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty, \tag{4}$$

$$\left\| \frac{\arg f(re^{i\theta})}{v(r)} - G_f(\theta) \right\|_p \to 0, \quad r \to +\infty. \tag{5}$$

Теорема B. *Якщо $f \in \mathcal{H}_0(L)$ і для деяких числа $p \in [1, +\infty)$ та функції $H \in L^p[0, 2\pi]$ виконується (3), то $\int_0^{2\pi} H(\theta)d\theta = 0$ і для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ існують границі*

$$\Delta_k = \lim_{r\to+\infty} N_k(r)/v_1(r).$$

Якщо $f \in \mathcal{H}_0(L^*)$ і для деяких чисел $p \in [1, +\infty)$, $b_0 \in \mathbb{R}$ та функції $H \in L^p[0, 2\pi]$ виконуються (4) *і* (5)*, то нулі f мають кутову щільність, $b_0 = \delta_0$, $H(\theta) = G_f(\theta)$ для майже всіх $\theta \in [0, 2\pi]$.*

Однією з головних передумов для отримання цих результатів було таке твердження, доведене в [3].

Теорема C. *Нехай $f \in \mathcal{H}_0(L)$, $l_k(r)$ – коефіцієнти Фур'є функції $\ln f$ і для деяких $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ існує границя (1). Тоді для цих k*

$$\lim_{r\to+\infty} l_k(r)/v(r) = -\delta_k/k. \tag{6}$$

Зауваження 2. Легко бачити таке: якщо $f \in \mathcal{H}_0(L)$ і $n(r) \sim v(r)$, то $N(r) = l_0(r) \sim v_1(r)$, $r \to +\infty$.

Наша мета – дати відповіді на запитання.

- Чи правильне твердження обернене до теореми C?
- Чи існують цілі функції класу $\mathcal{H}_0(L)$, нулі яких не мають кутової щільності і границі (1) існують для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$?
- Чи є істотною умова належності функції f до підкласу $\mathcal{H}_0(L^*)$ в теоремі B, тобто чи буде правильною друга частина теореми B для всього класу $\mathcal{H}_0(L)$?

Теорема 1. *Нехай $f \in \mathcal{H}_0(L)$, нулі f лежать на одному промені $\arg z = \alpha$ і для деякого $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ виконується (6). Тоді для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ виконується (1).*

Теорема 2. *Для довільної функції $v \in L$ існує $f \in \mathcal{H}_0(L)$ така, що для деяких $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ виконується (6) і не існують границі (1).*

Теорема 3. *Для довільної функції $v \in L$ існує ціла функція $f \in \mathcal{H}_0(L)$, нулі якої не мають кутової щільності і для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ виконуються умови (1).*

Теорема 4. *Існують функції $v \in L\setminus L^*$ і $f \in \mathcal{H}_0(L)$ такі, що $l_0(r) \sim v_1(r), r \to +\infty$, і границя (1) для $k = 0$ не існує.*

3. Допоміжні результати. Нехай γ – невід'ємна, інтегровна на $[0, +\infty)$ функція, $\gamma(0) = 0$. Для $k \in \mathbb{N}$ приймемо

$$\mathrm{J}_k(r) = \mathrm{J}_k(r;\gamma) = r^k \int_r^{+\infty} \frac{\gamma(t)}{t^{k+1}}dt, \qquad \mathrm{I}_k(r) = \mathrm{I}_k(r;\gamma) = r^{-k} \int_0^r \frac{\gamma(t)}{t^{-k+1}}dt.$$

Для доведення теорем 1-4 будемо використовувати такі твердження.

Лема 1. *Якщо $\gamma \in L$, то для всіх $k \in \mathbb{N}$ отримаємо $\mathrm{J}_k \in L$, $\mathrm{I}_k \in L$ і*

$$\mathrm{J}_k(r) \sim \mathrm{I}_k(r) \sim \gamma(r)/k, \quad r \to +\infty. \tag{7}$$

Навпаки, якщо для деякого $k \in \mathbb{N}$ функція $\mathrm{J}_k \in L_{пз}$ або $\mathrm{I}_k \in L_{пз}$, то $\gamma \in L_{пз}$.

Доведення. a) Якщо $\gamma \in L$, то [3, лема 2] виконується (7). Далі

$$\mathrm{J}_k(r) \geqslant r^k\gamma(r) \int_r^{+\infty} t^{-k-1}dt = \frac{\gamma(r)}{k}, \tag{8}$$

тому

$$\mathrm{J}'_k(r) = \frac{k}{r}\mathrm{J}_k(r) - \frac{\gamma(r)}{r} = \frac{k\mathrm{J}_k(r) - \gamma(r)}{r} \geqslant 0,$$

і завдяки (7)

$$\frac{r\mathrm{J}'_k(r)}{\mathrm{J}_k(r)} = k - \frac{\gamma(r)}{\mathrm{J}_k(r)} \to 0, \quad r \to +\infty,$$

що доводить належність $\mathrm{J}_k(r)$ до класу L.

Аналогічно, $\mathrm{I}_k(r) \in L$, бо

$$\mathrm{I}_k(r) \leqslant r^{-k}\gamma(r)\int\limits_0^r t^{k-1}dt = \frac{\gamma(r)}{k}, \tag{9}$$

$$\mathrm{I}'_k(r) = -\frac{k}{r}\mathrm{I}_k(r) + \frac{\gamma(r)}{r} = \frac{\gamma(r) - k\mathrm{I}_k(r)}{r} \geqslant 0,$$

$$\frac{r\mathrm{I}'_k(r)}{\mathrm{I}_k(r)} = \frac{\gamma(r) - k\mathrm{I}_k(r)}{\mathrm{I}_k(r)} \to 0, \quad r \to +\infty.$$

б) Нехай $\mathrm{J}_k(r) \in L_{пз}$. Тоді

$$\mathrm{J}_k\left(\frac{r}{2}\right) = \left(\frac{r}{2}\right)^k \int\limits_{r/2}^{r} \frac{\gamma(t)}{t^{k+1}}dt + \left(\frac{r}{2}\right)^k \int\limits_{r}^{+\infty} \frac{\gamma(t)}{t^{k+1}}dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{r^k}{k2^k}\gamma(r)t^{-k}\Big|_r^{r/2} + \frac{1}{2^k}\mathrm{J}_k(r) = \frac{2^k - 1}{k2^k}\gamma(r) + \frac{1}{2^k}\mathrm{J}_k(r).$$

Звідси

$$\gamma(r) \geqslant \frac{2^k k\mathrm{J}_k(r/2) - k\mathrm{J}_k(r)}{2^k - 1}$$

і, враховуючи нерівність (див. (8)) $\gamma(2r) \leqslant k\mathrm{J}_k(2r)$, отримуємо

$$1 \leqslant \frac{\gamma(2r)}{\gamma(r)} \leqslant \frac{k\mathrm{J}_k(2r)(2^k - 1)}{2^k k\mathrm{J}_k(r/2) - k\mathrm{J}_k(r)} =$$

$$= (2^k - 1)\left(2^k \frac{\mathrm{J}_k(r/2)}{\mathrm{J}_k(2r)} - \frac{\mathrm{J}_k(r)}{\mathrm{J}_k(2r)}\right)^{-1} \to 1, \quad r \to +\infty.$$

Отже, $\gamma \in L_{пз}$.

в) Нехай, нарешті, $\mathrm{I}_k \in L_{пз}$. Аналогічно до випадку *б* одержимо

$$\mathrm{I}_k(2r) = (2r)^{-k} \int\limits_0^r \frac{\gamma(t)}{t^{-k+1}}dt + (2r)^{-k} \int\limits_r^{2r} \frac{\gamma(t)}{t^{-k+1}}dt \geqslant$$

$$\geqslant 2^{-k}\mathrm{I}_k(r) + \frac{\gamma(r)}{k}2^{-k}(2^k - 1).$$

Звідси і з (9) отримуємо

$$\gamma(2r) \leqslant \frac{k\big(2^k\mathrm{I}_k(4r) - \mathrm{I}_k(2r)\big)}{2^k - 1},$$

$$\gamma(r) \geqslant k\mathrm{I}_k(r),$$

тому

$$1 \leqslant \frac{\gamma(2r)}{\gamma(r)} \leqslant \frac{1}{2^k - 1}\left(2^k \frac{\mathrm{I}_k(4r)}{\mathrm{I}_k(r)} - \frac{\mathrm{I}_k(2r)}{\mathrm{I}_k(r)}\right) \to 1, \quad r \to +\infty,$$

що доводить належність функції γ до класу $L_{пз}$. Лему 1 доведено. $\square$

Позначимо через Ω – клас опуклих стосовно логарифма на $[1,+\infty)$ функцій Φ таких, що $\ln x = o\big(\Phi(x)\big), x \to +\infty$. В [4, теорема 2] знайдено необхідну та достатню умови еквівалентності похідних опуклих функцій. Аналогом цієї теореми для опуклих стосовно логарифма функцій є твердження.

Лема 2. *Нехай $\Phi \in \Omega$. Для того, щоб для довільної функції $\Psi \in \Omega$ такої, що $\Psi(x) \sim \Phi(x)$, $x \to +\infty$, виконувалось співвідношення*

$$\Psi'_{\ln x}(x) \sim \Phi'_{\ln x}(x), \quad x \to +\infty$$

необхідно і достатньо, щоб для довільної, неперервної, зростаючої до $+\infty$ на $[1,+\infty)$ функції l

$$\Phi'_{\ln x}\left(r \exp\left\{\frac{\Phi(x)}{\Phi'_{\ln x}(x) l(x)}\right\}\right) \sim \Phi'_{\ln x}(x), \quad x \to +\infty, \tag{10}$$

де $G'_{\ln x}$ – правостороння похідна стосовно логарифма функції $G \in \Omega$.

Лема 3. *([5]) Для довільної функції $\Phi \in \Omega$ існує ціла функція f така, що*

$$\ln M(r,f) \sim N(r,0,f) \sim \Phi(r), \quad r \to +\infty,$$

де $M(r,f) = \max\big\{|f(z)| : |z| = r\big\}$.

Лема 4. *Нехай $v \in L^*$. Тоді*

$$v^2(r) \geqslant \frac{dv(r)}{d\ln r} \cdot \int\limits_0^r v(t) d\ln t = rv'(r) v_1(r).$$

Доведення. Одержали

$$v(r) = \int\limits_0^r \frac{tv'(t)}{v(t)} \frac{v(t)}{t} dt \geqslant \frac{rv'(r)}{v(r)} \int\limits_0^r \frac{v(t)}{t} dt = \frac{v'_{\ln r}(r)}{v(r)} v_1(r).$$

□

Твердження 1. *Якщо $v \in L^*$, функція l така, як в лемі 2, то*

$$v\left(r \exp\left\{\frac{v(r)}{rv'(r) l(r)}\right\}\right) \sim v(r), \quad r \to +\infty.$$

Доведення. Для $r \geqslant r_0$ отримали

$$v(r) = \exp\left\{\int\limits_{r_0}^r \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right\},$$

де $\varepsilon(r) = rv'(r)/v(r) \searrow 0, v(r_0) = 1$. Прийнявши $r^* = r \exp\left\{\frac{1}{\varepsilon(r) l(r)}\right\}$, отримуємо

$$1 \leqslant v(r^*)/v(r) = \exp\left\{\int\limits_r^{r^*} \frac{\varepsilon(t)}{t} dt\right\} \leqslant \exp\left\{\varepsilon(r) \ln \frac{r^*}{r}\right\} =$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{l(r)}\right\} \to 1, \quad r \to +\infty,$$

що доводить твердження 1. □

Твердження 2. *Якщо $v \in L^*$, функція l – така, як в лемі 2, то*

$$v\left(r\exp\left\{\frac{v_1(r)}{v(r)l(r)}\right\}\right) \sim v(r), \quad r \to +\infty,$$

тобто функція v_1 задовольняє умову (10).

Доведення. Нехай $\widetilde{r} = r\exp\{v_1(r)/(v(r)l(r))\}$. Завдяки лемі 4 отримаємо

$$\widetilde{r} \leqslant r\exp\{v(r)/\left(rv'(r)l(r)\right)\} = r^*,$$

тому $1 \leqslant v(\widetilde{r})/v(r) \leqslant v(r^*)/v(r) \to 1, r \to +\infty$, що доводить твердження 2. □

4. Доведення основних результатів.

4.1. Доведення теореми 1. Нехай $f \in \mathcal{H}_0(L)$. Оскільки ([6])

$$l_k(r) = -r^k \int_r^{+\infty} \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt, \quad k \geqslant 1, \tag{11}$$

$$l_k(r) = r^k \int_0^r \frac{n_k(t)}{t^{k+1}}dt, \quad k \leqslant -1, \tag{12}$$

і нулі функції f розташовані на одному промені $\arg z = \alpha$, то $n_k(r) = e^{-ik\alpha}n(r)$,

$$l_k(r) = -e^{-ik\alpha}\mathrm{J}_k(r; n(r)), \quad k \geqslant 1,$$

$$l_k(r) = e^{-ik\alpha}\mathrm{I}_{-k}(r; n(r)), \quad k \leqslant -1.$$

За умовами теореми 1 для деякого $k \in \mathbb{N}$ одержимо ($\delta_k = \delta_0 e^{-ik\alpha}$)

$$\mathrm{J}_k(r; n(r)) \sim \frac{\delta_k}{k}e^{ik\alpha}v(r) = \frac{\delta_0}{k}v(r), \quad r \to +\infty,$$

або ($\delta_{-k} = \delta_0 e^{ik\alpha}$)

$$\mathrm{I}_k(r; n(r)) \sim \frac{\delta_{-k}}{k}e^{-ik\alpha}v(r) = \frac{\delta_0}{k}v(r), \quad r \to +\infty.$$

Завдяки лемі 1 отримуємо $n(r) \sim \delta_0 v(r), r \to +\infty$,

$$n_k(r) \sim \delta_0 e^{-ik\alpha}v(r) = \delta_k v(r), \quad r \to +\infty,$$

для всіх $k \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$, що доводить теорему 1.

4.2. Доведення теореми 2. Нехай $v \in L$, v^{-1} – функція обернена до v, $\varepsilon > 0$ – довільне число. Оскільки $v(r) < r^\varepsilon$ для всіх достатньо великих r, то функція

$$f_1(z) = \prod_{k=1}^{+\infty}\left(1 - \frac{z}{v^{-1}(k)}\right)$$

є цілою. Врахуємо послідовність натуральних чисел (n_p) таку, що $v^{-1}(n_p) > n_p^2$, $n_{p+1} > 2n_p$ і приймемо $\rho_p = 1/n_p$, $r_p = v^{-1}(n_p)$,

$$f_2(z) = \prod_{p=1}^{+\infty}\left(\left(1 + \frac{z}{r_p}\right)\left(1 - \frac{z}{r_p + \rho_p}\right)\right)^{\left[\frac{v(r_p)}{2}\right]},$$

де $[\cdot]$ означає цілу частину числа. Функція f_2 є цілою, а отже, $f(z) = f_1(z)\cdot f_2(z)$ також ціла функція. Неважко показати, що $n(r) = n_{2k}(r) \leqslant 3v(r)$, $k \in \mathbb{Z}$, тобто $f \in \mathcal{H}_0(L)$ і

$$n_{2k+1}(r) \sim \begin{cases} v(r), & v^{-1}(p) \leqslant r \leqslant v^{-1}(p+1), \quad p \neq n_p, \\ v(r)/2, & r_p \leqslant r < r_p + \rho_p, \\ v(r), & r_p + \rho_p \leqslant r < r_{p+1}, \end{cases}$$

а отже, $n_{2k+1}(r) \nsim v(r)$, $r \to +\infty$.

Для $k \in \mathbb{N}$ і достатньо великих r отримали

$$r^k \int\limits_{r_p}^{r_p+\rho_p} \frac{v(t)}{t^{k+1}}dt \leqslant r^k v(r_p+\rho_p)\frac{(r_p+\rho_p)^{-k} - r_p^{-k}}{-k} \leqslant$$

$$\leqslant 2v(r_p)\Big(\frac{r}{r_p}\Big)^k \frac{\rho_p}{r_p} = 2\Big(\frac{r}{r_p}\Big)^k n_p \frac{\rho_p}{r_p} = 2\Big(\frac{r}{r_p}\Big)^k \frac{1}{v^{-1}(n_p)} \leqslant 2\Big(\frac{r}{r_p}\Big)^k \frac{1}{n_p^2}, \tag{13}$$

і, аналогічно,

$$r^{-k} \int\limits_{r_p}^{r_p+\rho_p} \frac{v(t)}{t^{-k+1}}dt \leqslant r^{-k} v(r_p+\rho_p)\frac{(r_p+\rho_p)^{k} - r_p^{k}}{k} \leqslant$$

$$\leqslant 2v(r_p)\Big(\frac{r_p}{r}\Big)^k \frac{\rho_p}{r_p} \leqslant 2\Big(\frac{r_p}{r}\Big)^k \frac{1}{n_p^2}, \tag{14}$$

Нехай $r \in [r_m + \rho_m, r_{m+1} + \rho_{m+1})$, $k \in \mathbb{N}$, k – непарне число. Тоді (див. (11))

$$l_k(r) = -\big(1+o(1)\big)r^k \int\limits_r^{+\infty} \frac{v(t)}{t^{k+1}}dt + \frac{1+o(1)}{2} r^k \sum_{p=m+1}^{+\infty} \int\limits_{r_p}^{r_p+\rho_p} \frac{v(t)}{t^{k+1}}dt =$$

$$= -\big(1+o(1)\big)\frac{v(r)}{k} + \frac{1+o(1)}{2}\sum\nolimits_1, \quad r \to +\infty.$$

Завдяки (13) одержали

$$0 \leqslant \sum\nolimits_1 \leqslant 2 \sum_{p=m+1}^{+\infty} \Big(\frac{r}{r_p}\Big)^k \frac{1}{n_p^2} \leqslant 4 \sum_{p=m+1}^{+\infty} \frac{1}{n_p^2} \leqslant 4,$$

а отже, $l_k(r) \sim -v(r)/k$, $r \to +\infty$. Аналогічно, з (12) та (14) для $r \in [r_m, r_{m+1})$ отримуємо (k- непарне натуральне число)

$$l_{-k}(r) = \big(1+o(1)\big)r^{-k} \int\limits_0^{r} \frac{v(t)}{t^{-k+1}}dt - \frac{1+o(1)}{2} r^{-k} \sum_{p=1}^{m} \int\limits_{r_p}^{r_p+\rho_p} \frac{v(t)}{t^{-k+1}}dt =$$

$$= \big(1+o(1)\big)\frac{v(r)}{k} - \frac{1+o(1)}{2}\sum\nolimits_2, \quad r \to +\infty,$$

і

$$0 \leqslant \sum\nolimits_2 \leqslant 2 \sum_{p=1}^{m} \Big(\frac{r_p}{r}\Big)^k \frac{1}{n_p^2} \leqslant 2 \sum_{p=1}^{m} \frac{1}{n_p^2} \leqslant 4.$$

Отже, $l_{-k}(r) \sim v(r)/k$, $r \to +\infty$, k – непарне натуральне число. Теорему 2 доведено.

4.3. Доведення теореми 3. Нехай v – довільна функція з класу L. Виберемо дві зростаючі послідовності (r_k) додатних чисел і (m_k) натуральних чисел за індукцією. Приймемо $r_1 \geqslant 1$ таке, що $v(r_1) \in \mathbb{N}$, $m_1 = v(r_1)$ і припустимо, що $r_2, r_3, \ldots, r_k$ і $m_2, m_3, \ldots, m_k$ вже вибрані. Тоді ми беремо r_{k+1} таке, що

$$v(r_{k+1}) \in \mathbb{N}, \quad r_{k+1} > 2r_k, \quad v(r_{k+1}) > (k+1)v(r_k), \tag{15}$$

та $m_{k+1} = v(r_{k+1}) - v(r_k)$.

Оскільки для довільного фіксованого $R > 0$ виконується (див.(15)) $R/r_k < \frac{1}{2}$ для всіх $k \geqslant k_0$ і $m_k > (k+1)v(r_k) - v(r_k) > k$, то ряд $\sum_{k=1}^{+\infty} \left(\frac{R}{r_k}\right)^{m_k}$ – збіжний, а отже, функція

$$f(z) = \prod_{k=1}^{+\infty} \left(1 - \left(\frac{z}{r_k}\right)^{m_k}\right)$$

є цілою. Для $r_k \leqslant r < r_{k+1}$ отримаємо

$$n(r) = \sum_{r_k \leqslant r} m_k = v(r_1) + \sum_{r_1 < r_k \leqslant r} \big(v(r_k) - v(r_{k-1})\big) = v(r_k) \leqslant v(r),$$

тобто, $f \in \mathcal{H}_0(L)$. Далі, якщо $0 \leqslant \alpha < \beta < 2\pi$, то

$$n(r, \alpha, \beta) = \big(1 + o(1)\big) \frac{\beta - \alpha}{2\pi} \sum_{r_k \leqslant r} m_k = \big(1 + o(1)\big) \frac{\beta - \alpha}{2\pi} v(r_k), \quad r \to +\infty,$$

і з (15) отримуємо, що границя $\lim_{r \to +\infty} n(r, \alpha, \beta)/v(r)$ не існує, а отже, нулі f не мають кутової щільності.

З іншого боку, нулі (a_j) цілої функції f дорівнюють

$$a_j = r_1 \exp\left\{\frac{2\pi i}{m_1} j\right\}, \quad j = \overline{1, m_1}; \qquad a_{m_1 + j} = r_2 \exp\left\{\frac{2\pi i}{m_2} j\right\}, \quad j = \overline{1, m_2}; \quad \ldots;$$

$$a_{m_1 + m_2 + \ldots + m_{n-1} + j} = r_n \exp\left\{\frac{2\pi i}{m_n} j\right\}, \quad j = \overline{1, m_n}; \quad \ldots.$$

Зауважимо, що для довільних натурального числа n і цілого $s \neq 0$, $|s| < n$, виконується

$$e^{\frac{2\pi s i}{n}} + e^{\frac{2\pi s i}{n} \cdot 2} + \ldots + e^{\frac{2\pi s i}{n} \cdot (n-1)} + e^{\frac{2\pi s i}{n} \cdot n} = 0.$$

Нехай $k \in \mathbb{Z} \backslash \{0\}$ – довільне число, а $j_0 \in \mathbb{N}$ – найменше число таке, що $m_{j_0} > |k|$. Тоді для всіх $r > r_{j_0}$ одержуємо

$$|n_k(r)| = \left| \sum_{|a_j| \leqslant r} e^{-ik \arg a_j} \right| = \left| \sum_{r_j \leqslant r_{j_0}} e^{-ik \arg a_j} \right| \leqslant \sum_{r_j \leqslant r_{j_0}} 1 \leqslant n(r_{j_0}) = v(r_{j_0}),$$

а отже, $n_k(r)/v(r) \to 0$, $r \to +\infty$, що доводить теорему 3.

4.4. Доведення теореми 4. Нехай (r_k) – послідовність додатних чисел, $r_1 > e^4$, $r_k = o(\ln r_{k+1})$, $k \to +\infty$. Приймемо $r_k^* = r_k^{\sqrt{\ln r_k} - 1}$,

$$v(r) = \begin{cases} (\ln^+ r)^2, & 0 \leqslant r \leqslant r_1, \\ \ln^{3/2} r_k \ln \dfrac{r}{r_k} + \ln^2 r_k, & r_k \leqslant r \leqslant r_k^*, \\ \ln^2 r, & r_k^* \leqslant r \leqslant r_{k+1}. \end{cases}$$

Легко бачити, що v – невід'ємна неперервна зростаюча до $+\infty$ на $[0,+\infty)$ функція. Покажемо, що v – повільно зростаюча функція. Справді, для $r \in \big[r_{k-1}^*, r_k/2\big]$ виконується

$$1 \leqslant v(2r)/v(r) = \ln^2(2r)/\ln^2 r \to 1, \quad k \to +\infty.$$

Якщо $r \in \big[r_k/2, r_k\big]$, то

$$1 \leqslant \frac{v(2r)}{v(r)} \leqslant \frac{v(2r_k)}{v(r_k/2)} = \big(\ln^{3/2} r_k \ln 2 + \ln^2 r_k\big)/\ln^2(r_k/2) \to 1, \quad k \to +\infty.$$

Далі, для $r \in \big[r_k, \frac{1}{2}r_k^*\big]$ одержуємо

$$1 \leqslant \frac{v(2r)}{v(r)} = 1 + \frac{\ln^{3/2} r_k \ln 2}{\ln^{3/2} r_k \ln(r/r_k) + \ln^2 r_k} \leqslant 1 + \frac{\ln 2}{\sqrt{\ln r_k}} \to 1, \quad k \to +\infty.$$

Нарешті, якщо $r \in \big[\frac{1}{2}r_k^*, r_k^*\big]$, то

$$1 \leqslant v(2r)/v(r) \leqslant v(2r_k^*)/v(r_k^*/2) =$$

$$= \frac{(\sqrt{\ln r_k} - 1)^2 \ln^2(2r_k)}{\ln^{3/2} r_k\big((\sqrt{\ln r_k} - 2)\ln r_k - \ln 2\big) + \ln^2 r_k} \to 1, \quad k \to +\infty.$$

Отже, $v \in L_{пз}$. Зауважимо, що $v(r) < \ln^{5/2} r$ на $[1,+\infty)$. Насправді, на $[r_{k-1}^*, r_k]$ це очевидно, а на $[r_k, r_k^*]$ отримуємо

$$\Big(\ln^{5/2} r - v(r)\Big)'_{\ln r} = \frac{5}{2}\ln^{3/2} r - \ln^{3/2} r_k > 0$$

і $\ln^{5/2} r_k > v(r_k) = \ln^2 r_k$. Приймемо $v_1(r) = \int\limits_1^r v(t)/t\, dt$. Тоді $v_1 \in L$, v_1 – опукла стосовно логарифма на $[1,+\infty)$ і

$$v_1(r_k) = \int\limits_1^{r_{k-1}^*} \frac{v(t)}{t}\, dt + \int\limits_{r_{k-1}^*}^{r_k} \frac{\ln^2 t}{t}\, dt = \mathrm{A}(r_{k-1}^*) + \frac{\ln^3 r_k}{3} -$$

$$-\frac{(\sqrt{\ln r_{k-1}} - 1)^3 \ln^3 r_{k-1}}{3} = \frac{\ln^3 r_k}{3}\big(1 + o(1)\big), \quad k \to +\infty,$$

бо

$$\mathrm{A}(r_{k-1}^*) \leqslant \int\limits_1^{r_{k-1}^*} \frac{\ln^{5/2} t}{t}\, dt = \frac{2(\sqrt{\ln r_{k-1}} - 1)^{7/2} \ln^{7/2} r_{k-1}}{7} = o(\ln r_k), \quad k \to +\infty.$$

Далі

$$v_1(r_k)/\big(r_k v_1'(r_k)\big) = \frac{v_1(r_k)}{v(r_k)} = \frac{1 + o(1)}{3}\ln r_k, \quad k \to +\infty,$$

і для $l(r) = \sqrt{\ln r}$ отримуємо

$$(v_1)'_{\ln r}\bigg(r_k \exp\Big\{v_1(r_k)/\big(v(r_k) l(r_k)\big)\Big\}\bigg) = v\bigg(r_k \exp\Big\{\frac{(1 + o(1))\ln r_k}{3 l(r_k)}\Big\}\bigg) =$$

$$= \ln^{3/2} r_k \frac{(1+o(1))\ln r_k}{3l(r_k)} + \ln^2 r_k = \frac{1+o(1)}{3}\frac{\ln^{5/2} r_k}{l(r_k)} + \ln^2 r_k = \frac{4+o(1)}{3}\ln^2 r_k \nsim$$

$$\nsim (v_1)'_{\ln r}(r_k) = \ln^2 r_k, \quad r \to +\infty.$$

За лемою 2 існує функція $\Psi \in \Omega$, що $\Psi(r) \sim v_1(r)$ і $\Psi'_{\ln r} \nsim v(r)$ при $r \to +\infty$. Завдяки лемі 3 отримуємо, шо існує ціла функція f така, що $\ln M(r,f) \sim N(r,0,f) \sim \Psi(r)$, $r \to +\infty$. Добре відомо, що порядок повільно зростаючої функції дорівнює нулю, оскільки $\Psi(r) \sim v_1(r)$, $r \to +\infty$, $n(r,0,f) \leqslant N(2r,0,f)/\ln 2$, $l_0(r) = N(r,0,f)$, то $f \in \mathcal{H}_0(L)$, $l_0(r) \sim v_1(r)$ і $n(r) \nsim v(r)$, $r \to +\infty$. Теорему 4 доведено.

5. Висновки. Ми побудували приклади функцій і дали відповіді на запитання, які виникли під час доведення необхідних і достатніх умов на регулярне зростання $\ln f, \ln|f|, \arg f$ (див. [3]) у випадку цілої функції f повільного зростання.

Список використаної літератури

1. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции. / *Сенета Е.* – М.: Наука, 1985. – 142 с.
2. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции. / *Кондратюк А.А.* – Львов, 1988. – 196 с.
3. *Боднар О.В.* Критерії регулярності логарифма модуля та аргумента цілої функції / *Боднар О.В., Заболоцький М.В.* // Укр. мат. журн. – 2010. – Т. 62, №7. – С. 885-893.
4. *Філевич П.В.* Асимптотична рівність похідних логарифмів максимуму модуля і максимального члена цілої функції / *Філевич П.В.* // Матем. вісник НТШ. – 2009. – Т. 6. – С. 252-260.
5. *Clunie J.* On integral functions having prescribed asymptotic growth. II. / *Clunie J., Kövari T.* // Can. J. Math. – 1966. – Vol. 18. – P. 7-20.
6. *Калинець Р.З.* Про регулярність зростання модуля і аргумента цілої функції в $L^p_{[0,2\pi]}$–метриці / *Калинець Р.З., Кондратюк А.А.* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №7. – С. 889-896.

Стаття: надійшла до редакції 07.09.2011
прийнята до друку 14.12.2011

DISTRIBUTION OF ZEROS FOR THE ARGUMENTS AND FOURIER COEFFICIENTS OF LOGARITHM OF AN ENTIRE FUNCTION

Oksana BODNAR, Mykola ZABOLOTSKII

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: matmod@franko.lviv.ua

For an entire function f of zero order we have established relationship between the Fourier coefficients of $\ln f$, arguments and angular density of it's zeros.

Key words: an entire function, order of entire function, angular density of zeros, Fourier coefficients.

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ КОРНЕЙ ПО АРГУМЕНТАМ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ФУРЬЕ ЛОГАРИФМА ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ

Оксана БОДНАР, Николай ЗАБОЛОЦКИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: matmod@franko.lviv.ua

Для целой функции f нулевого порядка установлена зависимость между коэффициентами Фурье $\ln f$, аргументами и угловой плотностью ее корней.

Ключевые слова: целая функция, порядок целой функции, угловая плотность корней, коэффициенты Фурье.