ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 75. С. 5–16
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 75. P. 5–16

УДК 517.956.3

ГЛОБАЛЬНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ МІШАНОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ ВИРОДЖЕНОЇ ГІПЕРБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ

Руслан АНДРУСЯК, Володимир КИРИЛИЧ, Ольга ПЕЛЮШКЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ru.andrusyak@gmail.com, vkyrylych@ukr.net, olpelushkevych@ukr.net

Використовуючи метод характеристик і принцип Банаха про нерухому точку, знайдено умови існування та єдиності глобального узагальненого (неперервного) розв'язку мішаної задачі з нелокальними крайовими умовами для гіперболічної інтегро-диференціальної системи, причому частина рівнянь системи не містить похідної за часом від шуканих функцій.

Ключові слова: гіперболічна система, метод характеристик, принцип Банаха, нерухома точка.

1. Вступ. Гіперболічні рівняння та системи описують процеси, які мають хвильову природу. Зокрема, початково-крайові задачі для гіперболічних систем виникають у газо- та гідродинаміці, теорії "мілкої води", теорії біологічних популяцій, в оптимальному керуванні тощо [1]-[3]. Коректне формулювання задач для одновимірних гіперболічних систем визначається поведінкою характеристичних кривих, що описують поширення збурень. Хоча збурення поширюються зі скінченними швидкостями, проте у прикладних проблемах виникають задачі для систем, що одночасно моделюють "швидкі" (наприклад, електромагнітні) та досить "повільні" хвилі. Такі задачі погано піддаються розв'язанню чисельними методами, тому для них є актуальним знаходження асимптотичних розвинень розв'язків за малим параметром [4], що приводить до необхідності досліджувати задачі для вироджених систем [5]-[9]. Таким системам відповідають характеристики, які є функціями часу та декілька характеристик ортогональних часовій осі. З фізичного погляду ці характеристики означають безмежну швидкість поширення збурень, що розуміють як граничний випадок характеристик рівнянь з малим параметром.

При переході до безмежних швидкостей відбувається втрата частини початкових умов. Тому у разі формулювання задачі для виродженої гіперболічної системи початкові умови задають стосовно функцій, які відповідають "повільним" збуренням, а при знаходженні асимптотичних розвинень розв'язків відповідних задач з малим параметром виникає проблема примежевого шару (сингулярність) [4].

Ми досліджуємо мішану задачу для виродженої гіперболічної інтегро-диференціальної системи з нелокальними крайовими умовами. Особливістю задачі є інтегральні доданки за часовою та просторовою змінними у правій частині системи та крайових умовах. Результатом дослідження є умови глобальної розв'язності задачі у півсмузі. Відшукання узагальненого розв'язку задачі зведено до знаходження нерухомої точки оператора, причому глобальність розв'язку вдалося довести завдяки спеціально підібраній метриці з ваговими функціями [7, 8].

2. Формулювання задачі. В області $\Pi = \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ розглядаємо лінійну гіперболічну інтегро-диференціальну систему, яка збурена інтегральними доданками. Особливістю системи є також те, що частина рівнянь не містить похідної за часом від шуканих функцій

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \lambda_i(x,t)\frac{\partial u_i}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m}\left(a_{ik}(x,t)u_k(x,t) + \int_0^t A^1_{ik}(x,t,\sigma)u_k(x,\sigma)d\sigma + \right.$$
$$\left. + \int_0^x A^2_{ik}(x,t,z)u_k(z,t)dz\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(b_{ik}(x,t)v_k(x,t) + \int_0^t B^1_{ik}(x,t,\sigma)v_k(x,\sigma)d\sigma + \right.$$
$$\left. + \int_0^x B^2_{ik}(x,t,z)v_k(z,t)dz\right) + f_i(x,t), \quad i \in \{1,\ldots,m\}; \quad (1)$$

$$\frac{\partial v_j}{\partial x} = \sum_{k=1}^{m}\left(c_{jk}(x,t)u_k(x,t) + \int_0^t C^1_{jk}(x,t,\sigma)u_k(x,\sigma)d\sigma + \right.$$
$$\left. + \int_0^x C^2_{jk}(x,t,z)u_k(z,t)dz\right) + \sum_{k=1}^{n}\left(d_{jk}(x,t)v_k(x,t) + \int_0^t D^1_{jk}(x,t,\sigma)v_k(x,\sigma)d\sigma + \right.$$
$$\left. + \int_0^x D^2_{jk}(x,t,z)v_k(z,t)dz\right) + g_j(x,t), \quad j \in \{1,\ldots,n\}. \quad (2)$$

Функції u_i підпорядкуємо початковим умовам

$$u_i(x,0) = q_i(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l. \quad (3)$$

Припустимо, що функції $\lambda_i(0,t)$ та $\lambda_i(l,t)$ не змінюють знак на відрізку $[0,T]$. Визначимо підмножини індексів I_0, I_l множини $\{1,\ldots,m\}$ так: $I_0 = \{i : \lambda_i(0,t) > 0\}$, $I_l = \{i : \lambda_i(l,t) < 0\}$. Нехай ці множини містять r_0 та r_l елементів, відповідно. Доповнимо задачу крайовими умовами вигляду

$$\sum_{k=1}^{m}\Big(\gamma^0_{ik}(t)u_k(0,t) + \gamma^l_{ik}(t)u_k(l,t) + \int_0^t \Big(\Gamma^0_{ik}(t,\tau)u_k(0,\tau) + \Gamma^l_{ik}(t,\tau)u_k(l,\tau)\Big)d\tau\Big) +$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\Big(\psi_{ik}(t)v_k(0,t)+\int_0^t\Big(\Psi^0_{ik}(t,\tau)v_k(0,\tau)+\Psi^l_{ik}(t,\tau)v_k(l,\tau)\Big)d\tau\Big)=\delta_i(t),$$

$$i\in\{1,\dots,r_0+r_l+n\}. \quad (4)$$

3. Узагальнений розв'язок задачі. Нехай $\lambda_i\in C(\overline{\Pi})\cap \mathrm{Lip}_x(\overline{\Pi})$. Позначимо через $\varphi_i(t;x_0,t_0)$ розв'язок задачі Коші

$$\frac{dx}{dt}=\lambda_i(x,t),\quad (x,t)\in\overline{\Pi},\quad x(t_0)=x_0,\quad (x_0,t_0)\in\overline{\Pi}.$$

Зауважимо, що криві $x=\varphi_i(t;x_0,t_0)$ є характеристиками рівнянь (1), а рівняння (2) мають характеристики вигляду $t=t_0$. Нехай крива $x=\varphi_i(t;x_0,t_0)$, $t\leqslant t_0$ досягає межі області $\overline{\Pi}$ в точці $t=\chi_i(x_0,t_0)$.

Проінтегрувавши рівняння (1)-(2) вздовж відповідних характеристик, отримаємо систему інтегральних рівнянь

$$u_i(x,t)=u_i\Big(\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t),\chi_i(x,t)\Big)+\int_{\chi_i(x,t)}^{t}\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\Bigg(a_{ik}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)u_k(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)+$$

$$+\int_0^{\tau}A^1_{ik}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,\sigma)u_k(\varphi_i(\tau;x,t),\sigma)d\sigma+\int_0^{\varphi_i(\tau;x,t)}A^2_{ik}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,z)u_k(z,\tau)dz\Bigg)+$$

$$+\sum_{k=1}^{n}\Bigg(b_{ik}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)v_k(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)+\int_0^{\tau}B^1_{ik}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,\sigma)v_k(\varphi_i(\tau;x,t),\sigma)d\sigma+$$

$$+\int_0^{\varphi_i(\tau;x,t)}B^2_{ik}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,z)v_k(z,\tau)dz\Bigg)+f_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau)\Bigg)d\tau,\quad i\in\{1,\dots,m\};\quad (5)$$

$$v_j(x,t)=v_j(0,t)+\int_0^x\Bigg(\sum_{k=1}^{m}\Bigg(c_{jk}(y,t)u_k(y,t)+\int_0^t C^1_{jk}(y,t,\sigma)u_k(y,\sigma)d\sigma+$$

$$+\int_0^y C^2_{jk}(y,t,z)u_k(z,t)dz\Bigg)+\sum_{k=1}^{n}\Bigg(d_{jk}(y,t)v_k(y,t)+\int_0^t D^1_{jk}(y,t,\sigma)v_k(y,\sigma)d\sigma+$$

$$+\int_0^y D^2_{jk}(y,t,z)v_k(z,t)dz\Bigg)+g_j(y,t)\Bigg)dy,\quad j\in\{1,\dots,n\}.\quad (6)$$

Нехай крайові умови (4) можна переписати у вигляді

$$u_i(0,t)=\sum_{s\notin I_0}\mu^1_{is}(t)u_s(0,t)+\sum_{s\notin I_l}\nu^1_{is}(t)u_s(l,t)+$$

$$+\sum_{s=1}^{m}\int_0^t \Big(G_{is}^1(t,\tau)u_s(0,\tau)+H_{is}^1(t,\tau)u_s(l,\tau)\Big)d\tau+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\int_0^t \Big(F_{is}^1(t,\tau)v_s(0,\tau)+K_{is}^1(t,\tau)v_s(l,\tau)\Big)d\tau+\omega_i^1(t), \quad i\in I_0; \quad (7)$$

$$u_i(l,t)=\sum_{s\notin I_0}\mu_{is}^2(t)u_s(0,t)+\sum_{s\notin I_l}\nu_{is}^2(t)u_s(l,t)+$$
$$+\sum_{s=1}^{m}\int_0^t \Big(G_{is}^2(t,\tau)u_s(0,\tau)+H_{is}^2(t,\tau)u_s(l,\tau)\Big)d\tau+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\int_0^t \Big(F_{is}^2(t,\tau)v_s(0,\tau)+K_{is}^2(t,\tau)v_s(l,\tau)\Big)d\tau+\omega_i^2(t), \quad i\in I_l; \quad (8)$$

$$v_j(0,t)=\sum_{s\notin I_0}\mu_{js}^3(t)u_s(0,t)+\sum_{s\notin I_l}\nu_{js}^3(t)u_s(l,t)+$$
$$+\sum_{s=1}^{m}\int_0^t \Big(G_{js}^3(t,\tau)u_s(0,\tau)+H_{js}^3(t,\tau)u_s(l,\tau)\Big)d\tau+$$
$$+\sum_{s=1}^{n}\int_0^t \Big(F_{js}^3(t,\tau)v_s(0,\tau)+K_{js}^3(t,\tau)v_s(l,\tau)\Big)d\tau+\omega_j^3(t), \quad j\in\{1,\ldots,n\}. \quad (9)$$

Це можна зробити, якщо для всіх $t\in[0,T]$ є невиродженою матриця, що складається з відповідних коефіцієнтів $\gamma_{ik}^0(t)$, $\gamma_{ik}^l(t)$, $\psi_{ik}(t)$.

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(3), (7)-(9) називатимемо набір функцій (u,v) з неперервними в $\overline{\Pi}$ компонентами, що задовольняють інтегральну систему (5), (6) та умови (3), (7)-(9).*

Зауважимо таке: якщо умови (4) можна переписати у вигляді (7)-(9), то узагальнений розв'язок задачі (1)-(3), (7)-(9) є узагальненим розв'язком задачі (1)-(4).

4. Теорема про глобальну розв'язність. Визначимо області

$$\Delta_1=\{(x,t,\sigma):\ 0<x<l,\ \ 0<t<T,\ \ 0<\sigma<t\},$$
$$\Delta_2=\{(x,t,z):\ \ 0<x<l,\ \ 0<t<T,\ \ 0<z<x\},$$
$$\Delta_3=\{(t,\tau):\ \ 0<t<T,\ \ 0<\tau<t\}.$$

Теорема 1. *Нехай функції λ_i, a_{ik}, b_{ik}, f_i, c_{ik}, d_{ik}, g_i є неперервними в $\overline{\Pi}$, A_{ik}^1, B_{ik}^1, C_{ik}^1, D_{ik}^1 – в $\overline{\Delta}_1$, A_{ik}^2, B_{ik}^2, C_{ik}^2, D_{ik}^2 – в $\overline{\Delta}_2$, γ_{ik}^0, γ_{ik}^l, ψ_{ik}, δ_i – на відрізку $[0,T]$, а Γ_{ik}^0, Γ_{ik}^l, Ψ_{ik}^0, Ψ_{ik}^l – в $\overline{\Delta}_3$; функції λ_i задовольняють умову Ліпшиця за змінною*

x в $\overline{\Pi}$, причому $\lambda_i(0,t)$ та $\lambda_i(l,t)$ не змінюють знак на відрізку $[0,T]$; а також виконуються умови узгодження

$$q_i(0) = \sum_{s\notin I_0} \mu^1_{is}(0)q_s(0) + \sum_{s\notin I_l} \nu^1_{is}(0)q_s(l) + \omega^1_i(0), \quad i \in I_0$$

$$q_i(l) = \sum_{s\notin I_0} \mu^2_{is}(0)q_s(0) + \sum_{s\notin I_l} \nu^2_{is}(0)q_s(l) + \omega^2_i(0), \quad i \in I_l.$$

Тоді існує единий узагальнений розв'язок задачі (1)-(3), (7)-(9).

Доведення. Введемо метричний простір $\mathcal{Q}$, що складається з наборів функцій $w = (u, v)$ з неперервними в $\overline{\Pi}$ компонентами, причому функції u_i підпорядковані умові (3). Метрику в просторі $\mathcal{Q}$ визначимо так:

$$\rho(w^1, w^2) = \max\Big\{\max_{i,x,t}\big|u^1_i(x,t) - u^2_i(x,t)\big|\,\alpha_i(x)e^{-at},$$
$$\max_{j,x,t}\big|v^1_j(x,t) - v^2_j(x,t)\big|\,\beta_j(x)e^{-at}\Big\}, \quad (10)$$

з деякою додатною сталою a та додатними неперервними на $[0,l]$ функціями α_i, β_j, які виберемо далі.

В просторі $\mathcal{Q}$ визначимо оператор $\mathcal{B} = (\mathcal{B}_1, \ldots, \mathcal{B}_m)$. Якщо $\chi_i(x,t) = 0$, то $\mathcal{B}_i[w](x,t) = q_i(\varphi_i(0; x,t))$. Якщо виконується умова $\varphi_i(\chi_i(x,t); x,t) = 0$, то

$$\mathcal{B}_i[w](x,t) = \sum_{s\notin I_0} \mu^1_{is}(\chi_i(x,t))u_s(0,\chi_i(x,t)) + \sum_{s\notin I_l} \nu^1_{is}(\chi_i(x,t))u_s(l,\chi_i(x,t)) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{m} \int_0^{\chi_i(x,t)} \Big(G^1_{is}(\chi_i(x,t),\tau)u_s(0,\tau) + H^1_{is}(\chi_i(x,t),\tau)u_s(l,\tau)\Big)d\tau +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \int_0^{\chi_i(x,t)} \Big(F^1_{is}(\chi_i(x,t),\tau)v_s(0,\tau) + K^1_{is}(\chi_i(x,t),\tau)v_s(l,\tau)\Big)d\tau + \omega^1_i(\chi_i(x,t)),$$

а якщо ж $\varphi_i(\chi_i(x,t); x,t) = l$, то

$$\mathcal{B}_i[w](x,t) = \sum_{s\notin I_0} \mu^2_{is}(\chi_i(x,t))u_s(0,\chi_i(x,t)) + \sum_{s\notin I_l} \nu^2_{is}(\chi_i(x,t))u_s(l,\chi_i(x,t)) +$$
$$+ \sum_{s=1}^{m} \int_0^{\chi_i(x,t)} \Big(G^2_{is}(\chi_i(x,t),\tau)u_s(0,\tau) + H^2_{is}(\chi_i(x,t),\tau)u_s(l,\tau)\Big)d\tau +$$
$$+ \sum_{s=1}^{n} \int_0^{\chi_i(x,t)} \Big(F^2_{is}(\chi_i(x,t),\tau)v_s(0,\tau) + K^2_{is}(\chi_i(x,t),\tau)v_s(l,\tau)\Big)d\tau + \omega^2_i(\chi_i(x,t)).$$

За побудовою оператора $\mathcal{B}$ рівність

$$u_i\Big(\varphi_i(\chi_i(x,t); x,t), \chi_i(x,t)\Big) = \mathcal{B}_i[w](x,t), \quad i \in \{1, \ldots, m\}, \quad (x,t) \in \overline{\Pi}$$

еквівалентна крайовим умовам (7)-(8). Враховуючи останню рівність, в просторі Q визначимо оператор $\mathcal{A} = (\mathcal{A}_1^1, \dots, \mathcal{A}_m^1, \mathcal{A}_1^2, \dots, \mathcal{A}_n^2)$, де

$$\mathcal{A}_i^1[w](x,t) = \mathcal{B}_i[w](x,t) + \int\limits_{\chi_i(x,t)}^{t} \left(\sum_{k=1}^{m} \left(a_{ik}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) u_k(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) + \right.\right.$$

$$+ \int\limits_0^{\tau} A_{ik}^1(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,\sigma) u_k(\varphi_i(\tau;x,t),\sigma) d\sigma + \left. \int\limits_0^{\varphi_i(\tau;x,t)} A_{ik}^2(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,z) u_k(z,\tau) dz \right) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \left(b_{ik}(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) v_k(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) + \int\limits_0^{\tau} B_{ik}^1(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,\sigma) v_k(\varphi_i(\tau;x,t),\sigma) d\sigma + \right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_0^{\varphi_i(\tau;x,t)} B_{ik}^2(\varphi_i(\tau;x,t),\tau,z) v_k(z,\tau) dz \right) + f_i(\varphi_i(\tau;x,t),\tau) \right) d\tau, \quad i \in \{1,\dots,m\};$$

$$\mathcal{A}_j^2[w](x,t) = \sum_{s \notin I_0} \mu_{js}^3(t) u_s(0,t) + \sum_{s \notin I_l} \nu_{js}^3(t) u_s(l,t) + \sum_{s=1}^{m} \int\limits_0^t \left(G_{js}^3(t,\tau) u_s(0,\tau) + \right.$$

$$\left. + H_{js}^3(t,\tau) u_s(l,\tau) \right) d\tau + \sum_{s=1}^{n} \int\limits_0^t \Big(F_{js}^3(t,\tau) v_s(0,\tau) + K_{js}^3(t,\tau) v_s(l,\tau) \Big) d\tau +$$

$$+ \omega_j^3(t) + \int\limits_0^x \left(\sum_{k=1}^{m} \left(c_{jk}(y,t) u_k(y,t) + \int\limits_0^t C_{jk}^1(y,t,\sigma) u_k(y,\sigma) d\sigma + \right.\right.$$

$$\left. + \int\limits_0^y C_{jk}^2(y,t,z) u_k(z,t) dz \right) + \sum_{k=1}^{n} \left(d_{jk}(y,t) v_k(y,t) + \int\limits_0^t D_{jk}^1(y,t,\sigma) v_k(y,\sigma) d\sigma + \right.$$

$$\left.\left. + \int\limits_0^y D_{jk}^2(y,t,z) v_k(z,t) dz \right) + g_j(y,t) \right) dy, \quad j \in \{1,\dots,n\}.$$

Відшукання узагальненого розв'язку задачі (1)-(3), (7)-(9) зводиться до знаходження нерухомої точки оператора $\mathcal{A}$ в просторі $\mathcal{Q}$. Зауважимо, що $\mathcal{A}[w] \in \mathcal{Q}$, якщо $w \in \mathcal{Q}$. Це випливає з відомих теорем математичного аналізу, враховуючи неперервність функцій φ_i, χ_i за всіма компонентами, а також припущення 3, 5 теореми. Покажемо, що при певних вагових функціях метрики оператор $\mathcal{A}$ буде оператором стиску.

Нехай стала L обмежує зверху для всіх допустимих значень індексів та аргументів такі вирази $\sum\limits_{s \notin I_0} |\mu_{is}^k| + \sum\limits_{s \notin I_l} |\nu_{is}^k|$, $\sum\limits_{s=1}^{m} |G_{is}^k| + \sum\limits_{s=1}^{m} |H_{is}^k| + \sum\limits_{s=1}^{n} |F_{is}^k| + \sum\limits_{s=1}^{n} |K_{is}^k|$,

$\sum\limits_{s=1}^{m}|a_{is}|+\sum\limits_{s=1}^{n}|b_{is}|$, $\sum\limits_{s=1}^{m}|A^k_{is}|+\sum\limits_{s=1}^{n}|B^k_{is}|$, $\sum\limits_{s=1}^{m}|c_{is}|+\sum\limits_{s=1}^{n}|d_{is}|$, $\sum\limits_{s=1}^{m}|C^k_{is}|+\sum\limits_{s=1}^{n}|D^k_{is}|$. З означення метрики випливають співвідношення

$$|u^1_i(x,t)-u^2_i(x,t)|\leqslant\frac{\rho(w^1,w^2)}{\alpha_i(x)}e^{at},\qquad |v^1_j(x,t)-v^2_j(x,t)|\leqslant\frac{\rho(w^1,w^2)}{\beta_j(x)}e^{at},$$

для w^1, $w^2\in\mathcal{Q}$, звідки отримуємо оцінку

$$|\mathcal{B}_i[w^1](x,t)-\mathcal{B}_i[w^2](x,t)|\leqslant L\left(e^{a\chi_i(x,t)}\max\left\{\max_{i\notin I_0}\alpha_i^{-1}(0),\quad \max_{i\notin I_l}\alpha_i^{-1}(l)\right\}+\right.$$
$$\left.+\int\limits_0^{\chi_i(x,t)}e^{a\tau}d\tau\max\left\{\max_i\alpha_i^{-1}(0),\ \max_i\alpha_i^{-1}(l),\ \max_j\beta_j^{-1}(0),\ \max_j\beta_j^{-1}(l)\right\}\right)\rho(w^1,w^2).$$

Введемо позначення $\mu=(\max\limits_{i,x,t}|\lambda_i(x,t)|)^{-1}$. Якщо $\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t)=0$, то правильна оцінка $\chi_i(x,t)\leqslant t-\mu x$. За умови $\varphi_i(\chi_i(x,t);x,t)=l$ виводимо оцінку $\chi_i(x,t)\leqslant$ $\leqslant t-\mu(l-x)$ (див. [8]). Використавши отримані співвідношення, доводимо оцінки

$$\left|\mathcal{A}^1_i[w^1](x,t)-\mathcal{A}^1_i[w^2](x,t)\right|\alpha_i(x)e^{-at}\leqslant$$
$$\leqslant L\left(\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\alpha_j(0)},\quad \max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\alpha_j(l)},\right.\right.$$
$$\left.\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\alpha_j(0)},\quad \max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\alpha_j(l)}\right\}+$$

$$+\int\limits_0^t e^{a(\tau-t)}d\tau\max\left\{\max_{i,j}\frac{\alpha_i(x)}{\alpha_j(0)},\quad \max_{i,j}\frac{\alpha_i(x)}{\alpha_j(l)},\quad \max_{i,j}\frac{\alpha_i(x)}{\beta_j(0)},\quad \max_{i,j}\frac{\alpha_i(x)}{\beta_j(l)}\right\}+$$
$$+\left(\int\limits_0^t e^{a(\tau-t)}d\tau+\int\limits_0^t d\tau\int\limits_0^\tau e^{a(\sigma-t)}d\sigma+\int\limits_0^t e^{a(\tau-t)}d\tau\int\limits_0^{\varphi_i(\tau;x,t)}dz\right)\times$$
$$\left.\times\max\left\{\max_{i,j,z}\frac{\alpha_i(x)}{\alpha_j(z)},\quad \max_{i,j,z}\frac{\alpha_i(x)}{\beta_j(z)}\right\}\right)\rho(w^1,w^2)\leqslant$$

$$\leqslant L\left(\max\left\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\alpha_j(0)},\quad \max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\alpha_j(l)},\right.\right.$$

$$\left.\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\alpha_j(0)},\quad \max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\alpha_j(l)}\right\}+$$

$$\left.+\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{l}{a}\right)\max\left\{\max_{i,j,z}\frac{\alpha_i(x)}{\alpha_j(z)},\quad \max_{i,j,z}\frac{\alpha_i(x)}{\beta_j(z)}\right\}\right)\rho(w^1,w^2),$$

$$\left|\mathcal{A}_i^2[w^1](x,t)-\mathcal{A}_i^2[w^2](x,t)\right|\beta_i(x)e^{-at}\leqslant$$

$$\leqslant L\left(\max\left\{\max_{\substack{i\\ j\notin I_0}}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(0)},\quad \max_{\substack{i\\ j\notin I_l}}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(l)}\right\}+\right.$$

$$+\int\limits_0^t e^{a(\tau-t)}d\tau\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(0)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(l)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(0)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(l)}\right\}+$$

$$+\int\limits_0^x \max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(y)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(y)}\right\}dy+$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^t e^{a(\sigma-t)}\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(y)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(y)}\right\}d\sigma dy+$$

$$\left.+\int\limits_0^x\int\limits_0^y \max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(z)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(z)}\right\}dzdy\right)\rho(w^1,w^2)\leqslant$$

$$\leqslant L\left(\max\left\{\max_{\substack{i\\ j\notin I_0}}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(0)},\quad \max_{\substack{i\\ j\notin I_l}}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(l)}\right\}+\right.$$

$$+\frac{1}{a}\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(0)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(l)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(0)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(l)}\right\}+$$

$$+\left(1+\frac{1}{a}\right)\int\limits_0^x \max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(y)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(y)}\right\}dy+$$

$$\left.+\int\limits_0^x\int\limits_0^y \max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(z)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(z)}\right\}dzdy\right)\rho(w^1,w^2).$$

З останніх оцінок одержимо нерівність

$$\rho\left(\mathcal{A}[w^1],\mathcal{A}[w^2]\right)\leqslant L\max_x\Bigg(\max\Bigg\{\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\alpha_j(0)},\quad \max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\alpha_j(l)},$$

$$\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\alpha_j(0)},\quad \max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\alpha_j(l)}\Bigg\}+$$

$$+\left(\frac{2}{a}+\frac{1}{a^2}+\frac{l}{a}\right)\max\left\{\max_{i,j,z}\frac{\alpha_i(x)}{\alpha_j(z)},\quad \max_{i,j,z}\frac{\alpha_i(x)}{\beta_j(z)}\right\}+$$

$$+\max\left\{\max_{\substack{i\\ j\notin I_0}}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(0)},\quad \max_{\substack{i\\ j\notin I_l}}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(l)}\right\}+$$

$$+\frac{1}{a}\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(0)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(l)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(0)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(l)}\right\}+$$

$$+\left(1+\frac{1}{a}\right)\int\limits_0^x\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(y)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(y)}\right\}dy+$$

$$+\int\limits_0^x\int\limits_0^y\max\left\{\max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(z)},\quad \max_{i,j}\frac{\beta_i(x)}{\beta_j(z)}\right\}dzdy\Bigg)\,\rho(w^1,w^2).$$

Виберемо вагові функції метрики так, щоб $\mathcal{A}$ був оператором стиску в просторі $\mathcal{Q}$

$$\alpha_i(x)=\begin{cases}e^{px(l-x)}, & i\in I_0\cup I_l,\\ e^{px}, & i\in I_0\setminus I_l,\\ e^{p(l-x)}, & i\in I_l\setminus I_0,\\ e^{pl}, & i\notin I_0\cup I_l,\end{cases}$$

$\beta_j(x)=\varepsilon e^{-px}$, $j\in\{1,\ldots,n\}$, де ε, p – деякі додатні параметри. Якщо виконуються умови

$$p\leqslant a\mu,\qquad pl\leqslant a\mu, \tag{11}$$

то правильні оцінки

$$\max_x\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\alpha_j(0)}=\max_x\max_{\substack{i\in I_0,\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{\alpha_j(l)}=$$

$$=\max_x\max_{i\in I_0}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu x}}{e^{pl}}=\max_x\max\left\{e^{px(l-x)-a\mu x-pl},\quad e^{px-a\mu x-pl}\right\}=e^{-pl},$$

$$\max_x\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_0}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\alpha_j(0)}=\max_x\max_{\substack{i\in I_l,\\ j\notin I_l}}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{\alpha_j(l)}=$$

$$=\max_x\max_{i\in I_l}\frac{\alpha_i(x)e^{-a\mu(l-x)}}{e^{pl}}=\max_x\max\left\{e^{px(l-x)-a\mu(l-x)-pl},\ e^{p(l-x)-a\mu(l-x)-pl}\right\}=e^{-pl}.$$

Також правильні співвідношення

$$\max_x \max_{\substack{i \\ j\notin I_0}} \frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(0)} = \max_x \max_{\substack{i \\ j\notin I_l}} \frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(l)} = \max_x \varepsilon e^{-px-pl} = \varepsilon e^{-pl},$$

$$\max_x \int_0^x \max\left\{\max_{i,j} \frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(y)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x)}{\beta_j(y)}\right\} dy \leqslant \max_x \int_0^x \left(\varepsilon e^{-px} + \frac{\varepsilon e^{-px}}{\varepsilon e^{-py}}\right) dy \leqslant \varepsilon l + \frac{1}{p},$$

$$\max_x \int_0^x \int_0^y \max\left\{\max_{i,j} \frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(z)}, \max_{i,j} \frac{\beta_i(x)}{\beta_j(z)}\right\} dzdy \leqslant \max_x \int_0^x \int_0^y \left(\varepsilon e^{-px} + \frac{\varepsilon e^{-px}}{\varepsilon e^{-pz}}\right) dzdy \leqslant$$
$$\leqslant \max_x \int_0^x \left(\varepsilon e^{-px} y + \frac{1}{p} e^{p(y-x)}\right) dy \leqslant \frac{\varepsilon l^2}{2} + \frac{1}{p^2}.$$

Остаточно одержимо нерівність

$$\rho(A[w^1], A[w^2]) \leqslant$$
$$\leqslant L \max_x \left(e^{-pl} + \left(\frac{2}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{l}{a}\right) \max\left\{\max_{i,j,z} \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_j(z)}, \quad \max_{i,j,z} \frac{\alpha_i(x)}{\beta_j(z)}\right\} + \right.$$
$$+ \varepsilon e^{-pl} + \frac{1}{a} \max\left\{\max_{i,j,z} \frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(z)}, \quad \max_{i,j,z} \frac{\beta_i(x)}{\beta_j(z)}\right\} +$$
$$\left. + \left(1 + \frac{1}{a}\right)\left(\varepsilon l + \frac{1}{p}\right) + \left(\frac{\varepsilon l^2}{2} + \frac{1}{p^2}\right)\right) \rho(w^1, w^2).$$

Фіксуємо значення параметра ε достатньо малим, а параметр p достатньо великим, щоб задовольнити умову

$$e^{-pl} + \varepsilon e^{-pl} + 2\varepsilon l + \frac{2}{p} + \frac{\varepsilon l^2}{2} + \frac{1}{p^2} < \frac{1}{2L}.$$

Тоді функції α_i, β_i стають відомими, а також існує стала M така, що

$$M = \max_x \max\left\{\max_{i,j,z} \frac{\alpha_i(x)}{\alpha_j(z)}, \quad \max_{i,j,z} \frac{\alpha_i(x)}{\beta_j(z)}, \quad \max_{i,j,z} \frac{\beta_i(x)}{\alpha_j(z)}, \quad \max_{i,j,z} \frac{\beta_i(x)}{\beta_j(z)}\right\}.$$

Насамкінець фіксуємо значення параметра a достатньо великим, щоб задовольнити умови (11) та нерівності

$$a \geqslant 1, \qquad \frac{3}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{l}{a} < \frac{1}{2LM}.$$

Тоді $\mathcal{A}$ є оператором стиску в просторі $\mathcal{Q}$ з вибраною метрикою.

Отож, на підставі теореми Банаха існує єдина нерухома точка оператора $\mathcal{A}$ в просторі $\mathcal{Q}$, яка є узагальненим розв'язком задачі (1)-(3), (7)-(9). $\square$

Зауваження 1. Якщо умови теореми 1 виконуються на часовому проміжку $[0, +\infty)$, причому функції λ_i локально справджують умову Ліпшиця, то існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)-(3), (7)-(9) в півсмузі $\overline{\Pi}_\infty = \{(x,t) : 0 \leqslant x \leqslant l, 0 \leqslant t < +\infty\}$.

Список використаної літератури

1. *Рождественский Б.Л.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике / *Рождественский Б.Л., Яненко Н.Н.* – М.: Наука, 1978.
2. *Куликовский А.Г.* Математические вопросы численного решения гиперболических систем уравнений / *Куликовский А.Г., Погорелов Н.В., Семенов А.Ю.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2001.
3. *Аргученцев А.В.* Оптимальное управление гиперболическими системами / *Аргученцев А.В.* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2007.
4. *Бутузов В.Ф.* Об одной сингулярно возмущенной системе уравнений в частных производных первого порядка / *Бутузов В.Ф., Каращук А.Ф.* // Матем. заметки. – 1995. – Т. 57, № 3. – С. 338-349.
5. *Лапин Д.С.* Смешанная задача для сингулярной квазилинейной гиперболической системы с одной пространственной переменной / *Лапин Д.С., Филимонов А.М.* // Матем. заметки. – 2003. – Т. 73, № 2. – С. 315-318.
6. *Кирилич В.М.* Обобщенная непрерывная разрешимость задачи с неизвестными границами для сингулярных гиперболических систем квазилинейных уравнений / *Кирилич В.М., Филимонов А.М.* // Матем. студії. – 2008. – Т. 30, № 1. – С. 42-60.
7. *Андрусяк Р.В.* Задача для сингулярної гіперболічної системи в кутовій області / *Андрусяк Р.В., Кирилич В.М., Пелюшкевич О.В.* // Прикл. проблеми механіки і математики. – 2011. – Вип. 9. – С. 15-22.
8. *Мауленов О.* О разрешимости смешанной задачи для вырожденной полулинейной гиперболической системы на отрезке / *Мауленов О., Мышкис А.Д.* // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. – 1981. – № 5. – С. 25-29.
9. *Митропольский Ю.А.* О методах усреднения гиперболических систем с быстрыми и медленными переменными. Смешанная задача / *Митропольский Ю.А., Хома Г.П.* // Укр. матем. журн. – 1979. – № 4. – С. 398-406.

Стаття: надійшла до редакції 15.11.2011
прийнята до друку 14.12.2011

GLOBAL SOLVABILITY OF A MIXED PROBLEM FOR DEGENERATE HYPERBOLIC SYSTEM

Ruslan ANDRUSYAK, Volodymyr KYRYLYCH, Olga PELIUSHKEVYCH

Ivan Franko National University of Lviv,
Universytetska Srt., 1, Lviv, 79000
e-mail: ru.andrusyak@gmail.com, vkyrylych@ukr.net, olpelushkevych@ukr.net

By applying the method of characteristics and the Banach fixed point theorem we established the existence and uniqueness of a global weak (continuous) solution to an initial-boundary value problem with nonlocal boundary conditions for a hyperbolic integro-differential system involving equations without time derivative of unknown functions.

Key words: hyperbolic system, method of characteristics, the Banach theorem, fixed point.

ГЛОБАЛЬНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВЫРОЖДЕННОЙ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Руслан АНДРУСЯК, Владимир КИРИЛИЧ, Ольга ПЕЛЮШКЕВИЧ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ru.andrusyak@gmail.com, vkyrylych@ukr.net, olpelushkevych@ukr.net

Используя метод характеристик и принцип Банаха о неподвижной точке, установлено условия существования и единственности глобального обобщенного (непрерывного) решения смешанной задачи с нелокальными краевыми условиями для гиперболической интегро-дифференциальной системы, причем часть уравнений системы не содержит производной по времени от искомых функций.

Ключевые слова: гиперболическая система, метод характеристик, принцип Банаха, неподвижная точка.