ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 191–206*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 191–206

УДК 517.95

ХАРАКТЕР ТОЧКОВИХ СТЕПЕНЕВИХ ОСОБЛИВОСТЕЙ РОЗВ'ЯЗКУ НЕЛІНІЙНОЇ ПЕРШОЇ УЗАГАЛЬНЕНОЇ КРАЙОВОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ РІВНЯННЯ ТЕПЛОПРОВІДНОСТІ

Оксана ЧМИР

Львівський державний університет безпеки життєдіяльності,
вул. Клепарівська, 35, Львів, 79000
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

Використовуючи принцип Шаудера, досліджено характер точкових степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Ключові слова: нелінійна крайова задача; узагальнена функція; ваговий функційний простір; неперервний оператор; компактна множина; теорема Шаудера про нерухому точку.

1. Вступ. Існує багато праць, автори яких досліджували узагальнені крайові задачі для лінійних і напівлінійних еліптичних та параболічних рівнянь (див., наприклад, [1] та бібліографію, а також [2], [3]). У статтях [4, 5, 6, 7] досліджували крайові задачі для рівняння теплопровідності з нелінійними крайовими умовами, а у [8] – нелінійні еліптичні крайові задачі при заданих на межі функціях із сильними степеневими особливостями. Використовуючи дані цих досліджень, продовжено дослідження [9] нелінійних крайових задач для рівняння теплопровідності в узагальнених функціях.

Ми вивчаємо характер степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

2. Основна частина.

2.1. Основні позначення та формулювання задачі. Нехай $n \in \mathbb{N}$, Ω – обмежена область в $\mathbb{R}^n$ з межею $S = \partial\Omega$ класу C^∞, $Q = \Omega \times (0, T]$, $\Sigma = S \times (0, T]$, $0 < T < +\infty$.

Використовуватимемо позначення:

$||x - y|| = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^2}$ – евклідова відстань в $\mathbb{R}^n$, $P = (x, t)$, $M = (y, \tau)$, $\widehat{P} = (\hat{x}, \hat{t})$, $d(P, M) = |PM| = d(x, t; y, \tau) = \sqrt{||x - y||^2 + |t - \tau|}$– параболічна відстань в $\mathbb{R}^{n+1}$; η – мультиіндекс з компонентами $(\eta_1, ..., \eta_n)$, $\eta_i \in \mathbb{Z}_+$, $i = \overline{1, n}$, $|\eta| = \eta_1 + ... + \eta_n$ – довжина мультиіндексу η, $D^\eta \equiv D^\eta_x = \frac{\partial^{|\eta|}}{\partial x_1^{\eta_1} \cdot ... \cdot \partial x_n^{\eta_n}}$.

Нехай $\varepsilon_0 > 0$ – таке задане число, що паралельна до S поверхня S_{ε_0} є класу C^∞ та надалі вважатимемо, що $\varepsilon_0 \leqslant 1$. Через $\widetilde{\varrho}(\sigma)$ позначатимемо нескінченно диференційовну невід'ємну функцію, яка має порядок σ при $\sigma \to 0$. При довільній фіксованій точці $\widehat{P} \in \overline{Q}$ введемо функцію ϱ_0 точки $P \in \overline{Q}$ таку, що $0 < \varrho_0(P, \widehat{P}) \leqslant 1$ та

$$\varrho_0(P, \widehat{P}) = \begin{cases} \widetilde{\varrho}(|P\widehat{P}|), & |P\widehat{P}| < \frac{\varepsilon_0}{2}, \\ 1, & |P\widehat{P}| \geqslant \varepsilon_0. \end{cases}$$

Нехай $D(\overline{Q}) = C^\infty(\overline{Q})$, $D(\overline{\Sigma}) = C^\infty(\overline{\Sigma})$, $D(\overline{\Omega}) = C^\infty(\overline{\Omega})$;
$D^0(\overline{Q}) = \{\varphi \in D(\overline{Q}) : \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi\mid_{t=T} = 0,\ k = 0, 1, \dots\}$,
$D^0(\overline{\Sigma}) = \{\varphi \in D(\overline{\Sigma}) : \frac{\partial^k}{\partial t^k}\varphi\mid_{t=T} = 0,\ k = 0, 1, \dots\}$,
$D_0(\overline{\Omega}) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}) : \varphi|_S = 0\}$, ν – орт внутрішньої нормалі до S.

Надалі позначатимемо через $(D^0(\overline{\Sigma}))'$, $(D_0(\overline{\Omega}))'$ – простори лінійних неперервних функціоналів відповідно на просторах функцій $D^0(\overline{\Sigma})$, $D_0(\overline{\Omega})$, через $(\varphi, F)_1$ – значення узагальненої функції $F \in (D^0(\overline{\Sigma}))'$ на основній функції $\varphi \in D^0(\overline{\Sigma})$, через $(\varphi, F)_2$ – значення $F \in (D_0(\overline{\Omega}))'$ на $\varphi \in D_0(\overline{\Omega})$.

Нехай $(\hat{x}, \hat{t}) \in \Sigma$. Припустимо, що:

1) функції $f_0(x, t, \mathrm{v})$, $f_1(x, t, \mathrm{v})$ визначені відповідно в $Q \times \mathbb{R}$, $\Sigma \times \mathbb{R}$;

$$2)\ F_1(x,t) = \sum_{|l| \leqslant p_1} \sum_{m=0}^{p_2} C_{lm} D_x^l \delta(x - \hat{x}) \delta^{(m)}(t - \hat{t}), \tag{1}$$

$$F_2(x) = \sum_{|r| \leqslant p_3} C_r D_x^r \delta(x - \hat{x}),$$

де C_{lm}, C_r – сталі; p_1, p_2, p_3 – невід'ємні цілі числа.

Розглянемо нелінійну першу узагальнену крайову задачу

$$Lu(x,t) \equiv \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = f_0(x, t, u(x,t)), \quad (x,t) \in Q, \tag{2}$$

$$u(x,t)\mid_\Sigma = F_1(x,t) + f_1(x, t, u(x,t)), \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{3}$$

$$u(x,0) = F_2(x), \quad x \in \Omega. \tag{4}$$

При $k \in \mathbb{R}$ введемо функційні простори:
$\mathcal{M}_k(\overline{Q}, \widehat{P}) = \{\mathrm{v}$:
$$||\mathrm{v}; \widehat{P}||_k = \max\{\int_Q \varrho_0^k(x, t, \hat{x}, \hat{t})|\mathrm{v}(x,t)|\, dxdt; \int_\Sigma \varrho_0^k(x, t, \hat{x}, \hat{t})|\mathrm{v}(x,t)|\, dSdt\} < +\infty\},$$
$X_k(\overline{Q}, \widehat{P}) = \{\psi \in D^0(\overline{Q})\ :\ \psi(\cdot, 0) \in D_0(\overline{\Omega}),\quad \psi\mid_{\overline{\Sigma}} = 0,$
$$L^*\psi(x,t) = O(\varrho_0^k(x, t, \hat{x}, \hat{t})),\ \ \varrho_0(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \to 0\},$$
де L^* – оператор, формально спряжений до L, $L^*\mathrm{v} = -\left(\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial t} + \triangle^* \mathrm{v}\right)$.

Означення 1. *Розв'язком задачі (2)-(4) називається функція $u \in \mathcal{M}_k(\overline{Q}, \widehat{P})$ така, що*

$$\int_Q L^*\psi \cdot u\, dxdt = \int_Q \psi(x,t) \cdot f_0(x, t, u(x,t))\, dxdt + (\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial \nu}, F_1(x,t))_1 +$$

$$+\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial\nu}\cdot f_1(x,t,u(x,t))\,dSdt+(\psi(\cdot,0),F_2(\cdot))_2 \quad \textit{для довільної} \quad \psi\in X_k(\overline{Q},\widehat{P}).$$

Позначимо через $G(x,t,y,\tau)$ функцію Гріна першої крайової задачі для рівняння теплопровідності, яка визначена в точках $(x,t;y,\tau)\in\overline{Q}\times\overline{Q}$ при $(x,t)\neq(y,\tau)$. Існування її та багато властивостей одержуємо з [10, 11]. З цих результатів випливає, що:

1) $G(x,t;y,\tau)=0$ при $t<\tau$;

2) для будь-яких мультиіндексів η, η_0

$$\left|\frac{\partial^{\eta_0}}{\partial t^{\eta_0}}D_x^{\eta}G(x,t;y,\tau)\right|\leqslant\widehat{C}_{\eta,\,\eta_0}\,[d(x,t;y,\tau)]^{-n-|\eta|-2\eta_0},$$

де $\widehat{C}_{\eta,\,\eta_0}$ – додатні сталі.

Подібно до результатів [2, 12] доведено таку властивість функції G.

Лема 1. *Нехай* $(\hat{x},\hat{t})\in\overline{Q}$, $|\eta|\leqslant 1$. *Тоді при* $r>-n-2$

$$\int\limits_{Q}\varrho_0^r(y,\tau,\hat{x},\hat{t})|D_x^{\eta}G(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau\leqslant\widehat{L}_{1,\,\eta}\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{r+2-|\eta|},\,1\}\quad\forall\,(x,t)\in\overline{Q},$$

а при $r>-n-1$

$$\int\limits_{\Sigma}\varrho_0^r(y,\tau,\hat{x},\hat{t})|D_x^{\eta}G(x,t;y,\tau)|\,dS_yd\tau\leqslant\widehat{L}_{2,\,\eta}\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{r+1-|\eta|},\,1\}\quad\forall\,(x,t)\in\overline{Q}.$$

Зауваження 1. Подібно до доведення теореми 2 [3] доводимо, що розв'язок задачі (2)-(4) є розв'язком у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$ інтегрального рівняння

$$u(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega}G(x,t;y,\tau)\cdot f_0(y,\tau,u(y,\tau))\,dy+(\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y},F_1(y,\tau))_1+$$
$$+\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\cdot f_1(y,\tau,u(y,\tau))\,dS_yd\tau+(G(x,t;y,0),F_2(y))_2, \tag{5}$$

і навпаки.

Позначимо

$$(H\mathrm{v})(x,t)=\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\Omega}G(x,t;y,\tau)\cdot f_0(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\,dy+$$
$$+\int\limits_{\Sigma}\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\cdot f_1(y,\tau,\mathrm{v}(y,\tau))\,dS_yd\tau,$$
$$h(x,t)=g_1(x,t)+g_2(x,t)=(\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y},F_1(y,\tau))_1+(G(x,t;y,0),F_2(y))_2,$$
$$(H_1\mathrm{v})(x,t)=(H\mathrm{v})(x,t)+h(x,t).$$

Рівняння (5) набуде вигляду $u(x,t)=(Hu)(x,t)+h(x,t)$.

У [9] отримано існування розв'язку задачі (2)-(4) у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$. Зокрема, при $k > k_0 = \max\{p_1 + 2p_2, p_3 - 1\}$, $f_0(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{\beta_0}$ та $f_1(x,t,\mathrm{v}) = |\mathrm{v}|^{\beta_1}$, де $\beta_0 \in (0, \frac{n+2}{k+n+2})$, $\beta_1 \in (0, \frac{n+1}{k+n+1})$, існує розв'язок задачі (2)-(4) у просторі $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$. Якщо β_0, β_1 відомі, то також отримано простори $\mathcal{M}_k(\overline{Q}, \widehat{P})$, для яких існує розв'язок $u \in \mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$ задачі (2)-(4).

2.2. Характер точкових степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Для довільної фіксованої точки $\widehat{P} = (\hat{x}, \hat{t}) \in \Sigma$ та $\alpha \in \mathbb{R}_- \cup \{0\}$ введемо функційний простір

$$\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P}) = \{\mathrm{v} \in C(\overline{Q} \setminus \{\widehat{P}\}) : \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\mathrm{v}(y,\tau) \in C(\overline{Q}) \\ (||\mathrm{v};\ \widehat{P}||'_\alpha = \sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})|\mathrm{v}(y,\tau)| < +\infty)\}.$$

Оскільки при $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ та $k + \alpha > -n - 1$ виконується

$$||\mathrm{v};\ \widehat{P}||_k = \max\{\int\limits_Q \varrho_0^k(M,\widehat{P})|\mathrm{v}(y,\tau)|\,dyd\tau;\ \int\limits_\Sigma \varrho_0^k(M,\widehat{P})|\mathrm{v}(y,\tau)|\,dSd\tau\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\widehat{C}\int\limits_Q \varrho_0^k(M,\widehat{P})[\varrho_0(M,\widehat{P})]^\alpha\,dyd\tau; \widehat{C}\int\limits_\Sigma \varrho_0^k(M,\widehat{P})[\varrho_0(M,\widehat{P})]^\alpha\,dSd\tau\} \leqslant$$

$$\leqslant \max\{\widehat{C}\int\limits_{\{M:\,|M\widehat{P}|<\varepsilon_0\}} [\varrho_0(M,\widehat{P})]^{k+\alpha}\,dyd\tau + \widehat{C}\int\limits_{\{M:\,|M\widehat{P}|\geqslant\varepsilon_0\}} dyd\tau;$$

$$\widehat{C}\int\limits_{\{M:\,|M\widehat{P}|<\varepsilon_0\}} [\varrho_0(M,\widehat{P})]^{k+\alpha}\,dSd\tau + \widehat{C}\int\limits_{\{M:\,|M\widehat{P}|\geqslant\varepsilon_0\}} dSd\tau\} < +\infty,$$

то $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P}) \subset \mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$ при $k > -\alpha - n - 1$, де $\widehat{C}$ – додатна стала.

Нехай $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P}) = \{\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P}) : ||\mathrm{v};\ \widehat{P}||'_\alpha \leqslant \widetilde{C}\}$ – замкнена куля радіуса $\widetilde{C}$ у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Лема 2. *Нехай виконуються припущення (1) та* $\alpha \leqslant \min\{-(1+p_1+2p_2); -p_3\}-n$. *Тоді* $h \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$, *а саме, існує додатна стала* $\widehat{K}_0$ *така, що* $||h;\ \widehat{P}||'_\alpha \leqslant \widehat{K}_0 < +\infty$.

Доведення. Проводячи подібні міркування, як при доведенні леми 3 із [9], одержуємо

$$|g_1(x,t)| \leqslant K_1[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+1+p_1+2p_2)} = K_1[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+1+p_1+2p_2+\alpha)}\times \\ \times[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^\alpha \leqslant \widehat{K}_0[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^\alpha$$

при $\alpha \leqslant -(n+1+p_1+2p_2)$;

$$|g_2(x,t)| \leqslant K_2[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-(n+p_3)} \leqslant \widehat{K}_0[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^\alpha$$

при $\alpha \leqslant -(n+p_3)$, де K_1, K_2 – додатні сталі. □

Розглянемо нелінійну першу узагальнену крайову задачу

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} - \triangle u(x,t) = |u(x,t)|^{\beta_0}, \quad (x,t) \in Q, \tag{6}$$

$$u\,|_\Sigma = F_1(x,t) + |u(x,t)|^{\beta_1}, \quad (x,t) \in \Sigma, \tag{7}$$

$$u\,|_{t=0} = F_2(x), \quad x \in \Omega \tag{8}$$

при β_0, $\beta_1 \in (0,1)$.

Лема 3. *Якщо* β_0, $\beta_1 \in (0,1)$,

$$\max\left\{-\frac{n+2}{\beta_0}; -\frac{n+1}{\beta_1}\right\} < \alpha \leqslant \min\{-(1+p_1+2p_2); -p_3\} - n,$$

то існує стала $\widetilde{K}_0 > 0$ *така, що при всіх* $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ *оператор* H_1 *відображає* $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q}, \widehat{P})$ *в себе.*

Доведення. При $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q}, \widehat{P})$, де $\widetilde{C}$ – довільна додатна стала, розглянемо

$$||H_1\mathrm{v}; \widehat{P}||_\alpha^{'} \leqslant \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\Big(\int_0^t d\tau \int_\Omega |G(x,t;y,\tau)| \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}\,dy +$$

$$+\int_\Sigma |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_1}\,dS_y d\tau\Big) + ||h; \widehat{P}||_\alpha^{'}.$$

Використовуючи лему 1 при $\alpha\beta_0 > -n-2$, $\alpha\beta_1 > -n-1$ і лему 2 при $\alpha \leqslant \min\{-(1+p_1+2p_2); -p_3\} - n$, одержимо

$$||H_1\mathrm{v}; \widehat{P}||_\alpha^{'} \leqslant \widehat{L}_{1,0}\widetilde{C}^{\beta_0} \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \{\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(\beta_0-1)+2}, [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\}\} +$$

$$+\widehat{L}_{2,1}\widetilde{C}^{\beta_1} \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \{\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(\beta_1-1)}, [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\}\} + \widehat{K}_0.$$

Якщо виконуються умови

$$\begin{cases} \alpha\beta_0 > -n-2, \\ \alpha\beta_1 > -n-1, \\ \alpha(\beta_0-1)+2 \geqslant 0, \\ \alpha(\beta_1-1) \geqslant 0, \\ -\alpha \geqslant 0, \end{cases}$$

то знаходимо $||H_1\mathrm{v}; \widehat{P}||_\alpha^{'} \leqslant \widetilde{C}^{\,'}$ при $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q}, \widehat{P})$, де $\widetilde{C}^{\,'} = \widehat{L}_{1,0}\widetilde{C}^{\beta_0} + \widehat{L}_{2,1}\widetilde{C}^{\beta_1} + \widehat{K}_0$.

Зауважимо, що при β_0, $\beta_1 \in (0,1)$ існує стала $\widetilde{K}_0 > 0$ така, що $\widetilde{C}^{\,'} \leqslant \widetilde{C}$ при $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$. Отже, за умов леми одержуємо існування додатної сталої $\widetilde{K}_0$ такої, що при всіх $\widetilde{C} > \widetilde{K}_0$ оператор H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\widetilde{C}}(\overline{Q}, \widehat{P})$ в себе. □

Лема 4. *Нехай* β_0, $\beta_1 \in (0,1)$, $\max\{-\frac{2}{\beta_0}; -\frac{n+1}{\beta_1}\} < \alpha \leqslant 0$. *Тоді для довільного* $\varepsilon > 0$ *існує* $\sigma = \sigma(\varepsilon) > 0$ *таке, що для довільної підобласті* $V \subset Q$, *міра якої* $m(V)$ *менша за* σ, *для довільних* $(x,t) \in \overline{Q}$ *виконується*

$$[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int_{V\cap Q} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_0} \cdot |G(x,t;y,\tau)|\,dyd\tau < \varepsilon, \tag{9}$$

$$[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int_{V\cap\Sigma} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\,dS_y d\tau < \varepsilon. \tag{10}$$

Доведення. Доведення (9) проведено у лемі 1 [13] і виконується при $\alpha\beta_0+2>0$. Доведення (10) проводимо подібно як і доведення (9), розділяючи особливості функції $\varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}$. Нехай V – довільна підобласть в Q, $(\hat{x},\hat{t})$ – фіксована точка Σ, $\sigma\in(0,1)$ – яке-небудь число. Далі позначатимемо через C_j, $j=\overline{1,13}$ – додатні сталі.

1. Нехай точка $(x,t)\in\overline{Q}$ така, що $||x-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}$, тобто $|P\widehat{P}|<\sigma$.

а) Якщо $||y-\hat{x}||<\frac{\sigma}{\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}|<\frac{\sigma^2}{2}$ $(|M\widehat{P}|<\sigma)$, то $||x-y||\leqslant||x-\hat{x}||+||y-\hat{x}||<\frac{2\sigma}{\sqrt{2}}$, $|t-\tau|<\sigma^2$, тобто $|MP|<\sqrt{3}\sigma$, а тоді

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=$$
$$=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|M\widehat{P}|<\sigma\}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_yd\tau\leqslant$$
$$\leqslant[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|<\frac{\sigma}{2};\\ \frac{\sigma}{2}\leqslant|M\widehat{P}|<\sigma\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_yd\tau+$$
$$+[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|\geqslant\frac{\sigma}{2};\\ |M\widehat{P}|<\frac{\sigma}{2}\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_yd\tau+$$
$$+[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|\geqslant\frac{\sigma}{2};\\ \frac{\sigma}{2}\leqslant|M\widehat{P}|<\sigma\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_yd\tau=$$
$$=J_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)+J_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)+J_3(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma).\qquad(11)$$

Зробимо заміну змінних в інтегралі J_1

$$\begin{array}{lll} y_i=\hat{x}_i+\xi_i\sigma, & x_i=\hat{x}_i+s_i\sigma, & \\ \tau=\hat{t}+\xi_{n+1}\sigma^2; & t=\hat{t}+s_{n+1}\sigma^2, & i=\overline{1,n}.\end{array}\qquad(12)$$

У нових змінних

$$M=\overline{\xi}=(\xi_1,\ldots,\xi_n,\xi_{n+1}),\quad|\overline{\xi}|=\sqrt{\xi_1^2+...+\xi_n^2+|\xi_{n+1}|}=\sqrt{||\xi||^2+|\xi_{n+1}|},$$
$$|M\widehat{P}|=\sqrt{||y-\hat{x}||^2+|\tau-\hat{t}|}=\sqrt{\sigma^2||\xi||^2+\sigma^2|\xi_{n+1}|}=\sigma\cdot|\overline{\xi}|,$$
$$|MP|=\sqrt{||y-x||^2+|\tau-t|}=\sqrt{\sigma^2||s-\xi||^2+\sigma^2|s_{n+1}-\xi_{n+1}|}=\sigma\cdot d(\overline{s};\overline{\xi}),$$

де

$$d(\overline{s};\overline{\xi})=\sqrt{||s-\xi||^2+|s_{n+1}-\xi_{n+1}|},\qquad dS_yd\tau=\sigma^{n+1}dS_\xi d\xi_{n+1}.$$

Використовуючи гладкість поверхні Σ, відомо, що $|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\leqslant\widehat{C}_{1,0}|MP|^{-n-1+\gamma}$, де $\gamma\in(0,1)$. Тоді

$$J_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|<\frac{\sigma}{2}\\ \frac{\sigma}{2}\leqslant|M\widehat{P}|<\sigma\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_yd\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_1[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\cdot\sigma^{\alpha\beta_1}\cdot\sigma^{\gamma}\int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}\colon d(\overline{s};\overline{\xi})<\frac{1}{2}\}} d^{-n-1+\gamma}(\overline{s};\overline{\xi})\,dS_\xi d\xi_{n+1}\leqslant C_2\sigma^{\alpha(\beta_1-1)+\gamma},$$

де збіжність інтеграла випливає з формули 3 [14, с. 588].

Проводячи подібну заміну змінних (12) в інтегралі J_2, одержуємо

$$J_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=$$

$$=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma\colon |MP|\geqslant\frac{\sigma}{2};\\ |M\widehat{P}|<\frac{\sigma}{2}\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_y d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_3[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\cdot\sigma^{\alpha\beta_1}\int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}\colon|\overline{\xi}|<\frac{1}{2}\}}|\overline{\xi}|^{\alpha\beta_1}\,dS_\xi d\xi_{n+1}\leqslant C_4\cdot\sigma^{\alpha(\beta_1-1)}.$$

Тут збіжність інтеграла випливає з формули 3 [14, с. 588] при $\alpha\beta_1>-n-1$.

$$J_3(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma\colon |MP|\geqslant\frac{\sigma}{2};\\ \frac{\sigma}{2}\leqslant|M\widehat{P}|<\sigma\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_y d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_5\sigma^{\alpha(\beta_1-1)-n-1}m(V).$$

Отже, при $m(V)<\sigma^{n+1}$ із (11) та вище описаних міркувань, одержуємо

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)\leqslant C_6(\sigma^{\alpha(\beta_1-1)+\gamma}+\sigma^{\alpha(\beta_1-1)}+\sigma^{\alpha(\beta_1-1)-n-1}m(V))\leqslant C_7\sigma^{\alpha(\beta_1-1)}.$$

Оскільки $\alpha(\beta_1-1)>0$ при $\alpha<0$ та $\beta_1<1$, то за заданим $\varepsilon>0$, вибравши $\sigma<\min\{\left(\frac{\varepsilon}{C_7}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}};1\}$, при $(x,t)\in\overline{Q}$ такій, що $|P\widehat{P}|<\sigma$ та $m(V)<\sigma^{n+1}$, отримаємо

$$\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)<\frac{\varepsilon}{2}.$$

б) Якщо $|M\widehat{P}|\geqslant\sigma$, то подібно знаходимо

$$\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma)=$$

$$=[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma\colon|M\widehat{P}|\geqslant\sigma\}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_y d\tau\leqslant$$

$$\leqslant[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma\colon|M\widehat{P}|\geqslant\sigma;\\ |MP|<\frac{\sigma}{2}\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_y d\tau+$$

$$+[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma\colon|M\widehat{P}|\geqslant\sigma;\\ |MP|\geqslant\frac{\sigma}{2}\}}}[\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\cdot|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}|\,dS_y d\tau\leqslant$$

$$\leqslant C_8(\sigma^{\alpha(\beta_1-1)+\gamma}+\sigma^{\alpha(\beta_1-1)-n-1}m(V))\leqslant C_9\sigma^{\alpha(\beta_1-1)}\quad\text{при}\quad m(V)<\sigma^{n+1}.$$

За заданим $\varepsilon > 0$, вибравши $\sigma < \min\{\left(\frac{\varepsilon}{C_9}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}; 1\}$, при $(x,t) \in \overline{Q}$ такій, що $|P\widehat{P}| < \sigma$ та $m(V) < \sigma^{n+1}$, отримаємо

$$\mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\sigma < \min\{\left(\frac{\varepsilon}{C_7}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}; \left(\frac{\varepsilon}{C_9}\right)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}; 1\}$ таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$ такої, що $m(V) < \sigma^{n+1}$

$$\mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) = \mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) + \mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \varepsilon \quad \forall\, (x,t) \in \overline{Q}, \quad |P\widehat{P}| < \sigma.$$

2. При $(x,t) \in \overline{Q}$ такій, що $|P\widehat{P}| \geqslant \sigma$, розглянемо

$$\mathcal{J}(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) =$$
$$= [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|<\frac{\sigma}{2}\}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right| dS_y d\tau +$$
$$+ [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|\geqslant\frac{\sigma}{2}\}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1} \cdot \left|\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}\right| dS_y d\tau =$$
$$= \mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) + \mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma). \tag{13}$$

При $|P\widehat{P}| \geqslant \sigma$ та $||x-y|| < \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$, $|t-\tau| < \frac{\sigma^2}{8}$ ($|MP| < \frac{\sigma}{2}$) виконується $||y-\hat{x}|| \geqslant ||x-\hat{x}|| - ||x-y|| > \frac{\sigma}{\sqrt{2}} - \frac{\sigma}{2\sqrt{2}} = \frac{\sigma}{2\sqrt{2}}$, $|\tau-\hat{t}| \geqslant |t-\hat{t}| - |t-\tau| > \frac{\sigma^2}{2} - \frac{\sigma^2}{8} = \frac{3\sigma^2}{8}$, тобто $|M\widehat{P}| > \frac{\sigma}{\sqrt{2}}$. Тоді, використовуючи заміну змінних (12),

$$\mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_{10} \cdot \sigma^{\alpha\beta_1} \int\limits_{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|<\frac{\sigma}{2}\}} |MP|^{-n-1+\gamma}\, dS_y d\tau \leqslant$$
$$\leqslant C_{10} \cdot \sigma^{\alpha\beta_1+\gamma} \int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\, d(\overline{s};\overline{\xi})<\frac{1}{2}\}} d^{-n-1+\gamma}(\overline{s};\overline{\xi})\, dS_\xi d\xi_{n+1};$$

$$\mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_{11} \cdot \sigma^{-n-1} \Big(\int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|\geqslant\frac{\sigma}{2};\\ |M\widehat{P}|<\frac{\sigma}{2}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\, dS_y d\tau +$$
$$+ \int\limits_{\substack{V\cap\{(y,\tau)\in\Sigma:\,|MP|\geqslant\frac{\sigma}{2};\\ |M\widehat{P}|\geqslant\frac{\sigma}{2}\}}} [\varrho_0(y,\tau,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha\beta_1}\, dS_y d\tau \Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_{12}\sigma^{-n-1} \Big(\sigma^{\alpha\beta_1+n+1} \int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\,|\overline{\xi}|<\frac{1}{2}\}} |\overline{\xi}|^{\alpha\beta_1}\, dS_\xi d\xi_{n+1} + \sigma^{\alpha\beta_1} \int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\,|\overline{\xi}|\geqslant\frac{1}{2}\}} \sigma^{n+1}\, dS_\xi d\xi_{n+1} \Big) \leqslant$$
$$\leqslant C_{12} \Big(\sigma^{\alpha\beta_1} \int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\,|\overline{\xi}|<\frac{1}{2}\}} |\overline{\xi}|^{\alpha\beta_1}\, dS_\xi d\xi_{n+1} + \sigma^{\alpha\beta_1} m(V) \Big).$$

З теореми 5 (про абсолютну неперервність інтеграла Лебега) [15, с. 301] випливає, що для довільного $\eta > 0$ існує $\delta > 0$ таке, що

$$\int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\, d(\overline{s};\overline{\xi})<\frac{1}{2}\}} d^{-n-1+\gamma}(\overline{s};\overline{\xi})\, dS_\xi d\xi_{n+1} < \eta \quad \text{при} \quad m(V) < \delta;$$

$$\int\limits_{V\cap\{\overline{\xi}:\, |\overline{\xi}|<\frac{1}{2}\}} |\overline{\xi}|^{\alpha\beta_1}\, dS_\xi d\xi_{n+1} < \eta \quad \text{при} \quad m(V) < \delta.$$

Вибираючи $\eta < \sigma^{n+1}$, одержуємо

$$\mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_{10}\sigma^{\alpha\beta_1+n+1+\gamma};$$

$$\mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) \leqslant C_{12}(\sigma^{\alpha\beta_1+n+1} + \sigma^{\alpha\beta_1}m(V)) \leqslant C_{13}\sigma^{\alpha\beta_1+n+1} \quad \text{при } m(V) < \delta < \sigma^{n+1}.$$

Отже, для довільного $\varepsilon > 0$ існує

$$\sigma < \min\{\left(\frac{\varepsilon}{C_{10}}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta_1+n+1+\gamma}};\ \left(\frac{\varepsilon}{C_{13}}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta_1+n+1}};\ 1\}$$

таке, що для довільної підобласті $V \subset Q$ такої, що $m(V) < \sigma^{n+1}$

$$\mathcal{J}(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) = \mathcal{J}_1(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) + \mathcal{J}_2(x,t,\hat{x},\hat{t},\sigma) < \varepsilon \quad \forall\, (x,t) \in \overline{Q}, \quad |P\widehat{P}| \geqslant \sigma.$$

□

Теорема 1. *Нехай* β_0, $\beta_1 \in (0,1)$,

$$\max\Big\{-\frac{2}{\beta_0};\ -\frac{n+1}{\beta_1}\Big\} < \alpha \leqslant \min\{-(1+p_1+2p_2);\ -p_3\} - n.$$

Тоді існує розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$ *крайової задачі (6)-(8) і при* $k > -\alpha-n-1$ *цей розв'язок належить простору* $\mathcal{M}_k(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

Доведення. Використаємо теорему Шаудера. З доведення леми 3 випливає, що H_1 відображає $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ в себе.

Покажемо, що H_1 – цілком неперервний оператор у просторі $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$.

При v, w $\in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$

$$||H_1\mathrm{v} - H_1\mathrm{w};\ \widehat{P}||'_\alpha \leqslant \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |G(x,t;y,\tau)| \cdot ||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0} -$$

$$-|\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_0}|\, dy + \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \int\limits_\Sigma |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial\nu_y}| \cdot ||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_1} - |\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_1}|\, dS_y d\tau.$$

Використовуючи формулу $|a^\mu - b^\mu| \leqslant |a-b|^\mu$ при a, $b > 0$, $\mu \in (0,1)$, матимемо

$$\int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |G(x,t;y,\tau)| \cdot ||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0} - |\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_0}|\, dy \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \varrho_0^{\alpha\beta_0}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |G(x,t;y,\tau)| \cdot (\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\mathrm{v}(y,\tau) - \mathrm{w}(y,\tau)|)^{\beta_0}\, dy \leqslant$$

$$\leqslant (||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \widehat{P}||_\alpha^{'})^{\beta_0} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega \varrho_0^{\alpha\beta_0}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |G(x,t;y,\tau)|\, dy;$$

$$\int\limits_\Sigma |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \cdot ||\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_1} - |\mathrm{w}(y,\tau)|^{\beta_1}|\, dS_y d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_\Sigma \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \cdot (\sup_{(y,\tau)\in\overline{Q}} \varrho_0^{-\alpha}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\mathrm{v}(y,\tau) - \mathrm{w}(y,\tau)|)^{\beta_1}\, dS_y d\tau \leqslant$$

$$\leqslant (||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \widehat{P}||_\alpha^{'})^{\beta_1} \int\limits_\Sigma \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau.$$

Використовуючи лему 1 при $\alpha\beta_0 > -n-2$, $\alpha\beta_1 > -n-1$, одержуємо

$$||H_1\mathrm{v} - H_1\mathrm{w};\, \widehat{P}||_\alpha^{'} \leqslant$$

$$\leqslant \widehat{L}_{1,0}(||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \widehat{P}||_\alpha^{'})^{\beta_0} \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \{\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(\beta_0-1)+2},\, [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\}\}+$$

$$+\widehat{L}_{2,1}(||\mathrm{v}-\mathrm{w};\, \widehat{P}||_\alpha^{'})^{\beta_1} \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \{\max\{[\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{\alpha(\beta_1-1)},\, [\varrho_0(x,t,\hat{x},\hat{t})]^{-\alpha}\}\}.$$

Звідси, враховуючи умови на α, випливає, що H_1 – неперервний оператор в $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$.

Покажемо компактність оператора H_1 на $\widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$. З доведення леми 3 випливає, що множина $\{\varrho_0^{-\alpha} H_1\mathrm{v} : \mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})\}$ – рівномірно обмежена. Доведемо, що ця множина одностайно неперервна, тобто для довільного $\varepsilon > 0$ існує $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta$, $|z_0| < \delta$ та довільних $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\,\widetilde{C}}(\overline{Q},\, \widehat{P})$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H_1\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H_1\mathrm{v})(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H\mathrm{v})(x,t)|+$$

$$+ \sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot h(x+z,t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot h(x,t)| < \varepsilon.$$

Вважаємо

$$\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) = 0, \quad \varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) G(x+z,t+z_0;y,\tau) = 0,$$

$$\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} = 0,$$

$$\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t})(H\mathrm{v})(x+z,t+z_0) = 0,$$

$$\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) h(x+z,t+z_0) = 0,$$

якщо $(x+z, t+z_0) \notin Q$.

Зафіксуємо $\varepsilon > 0$. Оскільки за лемою 2 $h \in \widetilde{\mathcal{M}}_\alpha(\overline{Q},\ \widehat{P})$, то $\varrho_0^{-\alpha} h \in C(\overline{Q})$. Тому існує $\widehat{\delta}_1 = \widehat{\delta}_1(\varepsilon) > 0$ таке, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widehat{\delta}_1$, $|z_0| < \widehat{\delta}_1$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot h(x+z, t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x, t, \hat{x}, \hat{t}) \cdot h(x,t)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Розглянемо для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$

$$\mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0) = |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot (H\mathrm{v})(x+z, t+z_0) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot (H\mathrm{v})(x,t)| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^t d\tau \int\limits_\Omega |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot G(x+z, t+z_0; y, \tau) - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot G(x,t;y,\tau)| \times$$

$$\times |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}\, dy + \varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \int\limits_t^{t+z_0} d\tau \int\limits_\Omega |G(x+z, t+z_0; y, \tau)| \cdot |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_0}\, dy +$$

$$+ \int\limits_\Sigma |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \times$$

$$\times |\mathrm{v}(y,\tau)|^{\beta_1}\, dS_y d\tau = \mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0) + \mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0) + \mathcal{I}_3(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0).$$

З доведення теореми 1 [13] випливає існування $\widetilde{\delta}_1 = \widetilde{\delta}_1(\varepsilon) > 0$ такого, що для довільних $(z, z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widetilde{\delta}_1$, $|z_0| < \widetilde{\delta}_1$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} (\mathcal{I}_1(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0) + \mathcal{I}_2(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0)) < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Нехай $\eta_1 > 0$ – досить мале і довільне число, $\Sigma_{\eta_1} \subset \Sigma$ така, що $\mathrm{dist}(x, \hat{x}) \geqslant \eta_1$, $\mathrm{dist}(t, \hat{t}) \geqslant \eta_1$.

Тоді для довільних $\mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha,\, \widetilde{C}}(\overline{Q},\ \widehat{P})$ та $(x,t) \in \overline{Q}$ отримаємо

$$\mathcal{I}_3(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0) \leqslant \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_\Sigma |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} -$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \cdot \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau =$$

$$= \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_{\eta_1}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \times$$

$$\times \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau + \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} |\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} -$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| \cdot \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau =$$

$$= \mathcal{I}_{31}(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0) + \mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t}; z, z_0).$$

Нехай $\delta_0 > 0$ – фіксоване число. За заданим δ_0 вибираємо число $\eta_1 < \frac{\varepsilon_0}{2}$ таке, щоб $m(\Sigma \setminus \Sigma_{\eta_1}) \leqslant \delta_0$ та

$$\eta_1 < \Big(\frac{\varepsilon}{12\widetilde{C}^{\beta_1}\widetilde{C}_0}\Big)^{\frac{1}{\alpha(\beta_1-1)}}.$$

За лемою 4 існує $\delta_0 = \delta_0(\varepsilon) > 0$, існує відповідне $\eta_1 > 0$ такі, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z, t+z_0) \in Q$

$$\int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^{\beta_1}}, \tag{14}$$

$$\int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_0}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^{\beta_1}}. \tag{15}$$

Тоді з (14), (15) при $(x,t) \in \overline{Q}$

$$\mathcal{I}_{31}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) \leqslant \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma\setminus\Sigma_{\eta_1}} \Big(|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y}|+$$

$$+|\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\Big) \cdot \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau < \widetilde{C}^{\beta_1}\Big(\frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^{\beta_1}} + \frac{\varepsilon}{24\widetilde{C}^{\beta_1}}\Big) = \frac{\varepsilon}{12},$$

а, отже,

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \mathcal{I}_{31}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{12}.$$

Виберемо $0 < \eta_2 < \frac{\eta_1}{2}$. Для довільної $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$ та числа η_2 визначимо множини

$$U_{\eta_2}(x,t) \stackrel{def}{=} \{(y,\tau) \in \Sigma_{\eta_1} : ||x-y|| \leqslant \eta_2,\ |t-\tau| \leqslant \eta_2^2\}.$$

Обчислимо

$$m(U_{\eta_2}(x,t)) = \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} dy d\tau = \int\limits_{||x-y||\leqslant\eta_2} dy \cdot \int\limits_{|t-\tau|\leqslant\eta_2^2} d\tau = 2\sigma_n \eta_2^{n+2},$$

де σ_n – площа поверхні сфери одиничного радіуса в $\mathbb{R}^n$. Якщо вибрати

$$\eta_2 < \min\{\frac{\eta_1}{2};\ \Big(\frac{\delta_0}{2\sigma_n}\Big)^{\frac{1}{n+2}}\},$$

то $m(U_{\eta_2}(x,t)) < \delta_0$. Тоді з (14) та (15) для довільних $(x,t) \in \overline{Q}$ та $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $(x+z,t+z_0) \in Q$

$$\int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36\widetilde{C}^{\beta_1}}, \tag{16}$$

$$\int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36\widetilde{C}^{\beta_1}}. \tag{17}$$

Виберемо $\delta_1 < \min\{\delta_0; \frac{\eta_2}{2}\}$. При $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$ таких, що $||z|| \leqslant \delta_1(< \frac{1}{4}\eta_1)$, $|z_0| \leqslant \delta_1(< \frac{1}{4}\eta_1)$, маємо $(x+z, t+z_0) \in Q_{\frac{\eta_1}{4}}$. При $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{4}}$, $(y,\tau) \in \Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)$, $||x-y|| \geqslant \eta_2$, $|t-\tau| \geqslant \eta_2^2$, а отже, $(x,t) \neq (y,\tau)$. Тому функція

$$\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}$$

рівномірно неперервна в області

$$V = \{(x,t;y,\tau) : (x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{4}}},\ (y,\tau) \in \overline{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)}\}.$$

Тоді існує $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) \in (0;\delta_1]$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_2$, $|z_0| < \delta_2$, $(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \subset \overline{Q_{\frac{\eta_1}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)}$ при $\alpha\beta_1 > -n-1$ виконується

$$|\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| < \frac{\varepsilon}{36A\widetilde{C}^{\beta_1}},$$

де $A = \int\limits_{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau$, тоді

$$\int\limits_{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} -$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36A\widetilde{C}^{\beta_1}} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36\widetilde{C}^{\beta_1}}. \tag{18}$$

Отже, при $(x,t) \in Q_{\frac{\eta_1}{2}}$ із (16), (17) та (18) випливає існування $\delta_2 = \delta_2(\varepsilon) > 0$ такого, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_2$, $|z_0| < \delta_2$

$$\mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) = \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} -$$

$$-\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau \leqslant \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \times$$

$$\times \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau + \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \times$$

$$\times \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau + \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1} \setminus U_{\eta_2}(x,t)} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x+z,t+z_0,\hat{x},\hat{t}) \times$$

$$\times \frac{\partial G(x+z,t+z_0;y,\tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau < \frac{\varepsilon}{36} + \frac{\varepsilon}{36} + \frac{\varepsilon}{36} = \frac{\varepsilon}{12},$$

а отже,

$$\sup_{(x,t) \in \overline{Q_{\frac{\eta_1}{2}}}} \mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{12}.$$

При $(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_1(< \frac{\eta_1}{4})$, $|z_0| < \delta_1(< \frac{\eta_1}{4})$ буде $(x+z, x+z_0) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}} \subset Q$ або $(x+z, t+z_0) \notin Q$. За рівномірною неперервністю функції $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t})\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}$ на замкненій множині $V_1 = (\overline{Q \setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}}) \times Q_{\eta_1}$ враховуючи, що $-\alpha \geqslant 0$, $\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \leqslant 1$, одержуємо: існує $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon) \in (0, \delta_1]$ таке, що для довільних $(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \subset \overline{Q \setminus Q_{\frac{3\eta_1}{4}}}$, $(y,\tau) \in \overline{\Sigma_{\eta_1}}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_3$, $|z_0| < \delta_3$ виконується

$$|\varrho_0^{-\alpha}(x+z, t+z_0, \hat{x}, \hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x+z, t+z_0; y, \tau)}{\partial \nu_y} - \varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}| < \frac{\varepsilon}{12B\widetilde{C}^{\beta_1}},$$

де

$$B = \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau,$$

звідки

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\in Q}} \mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) \leqslant \widetilde{C}^{\beta_1} \frac{\varepsilon}{12B\widetilde{C}^{\beta_1}} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t})\, dS_y d\tau = \frac{\varepsilon}{12}.$$

Для тих точок $(x,t) \in \overline{Q \setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}}$, $(y,\tau) \in \Sigma_{\eta_1}$, $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \delta_1$, $|z_0| < \delta_1$, для яких $(x+z, t+z_0) \notin Q$ отримаємо

$$\sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\notin Q}} \mathcal{I}_{32}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) \leqslant \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \varrho_0^{\alpha\beta_1}(y,\tau,\hat{x},\hat{t}) \cdot |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \times$$

$$\times \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau \leqslant \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^{\beta_1} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} \eta_1^{\alpha\beta_1} |\varrho_0^{-\alpha}(x,t,\hat{x},\hat{t}) \cdot \frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{(x,t)\in\overline{Q\setminus Q_{\frac{\eta_1}{2}}} \\ (x+z,t+z_0)\notin Q}} \widetilde{C}^{\beta_1} \eta_1^{\alpha\beta_1} \eta_1^{-\alpha} \int\limits_{\Sigma_{\eta_1}} |\frac{\partial G(x,t;y,\tau)}{\partial \nu_y}|\, dS_y d\tau \leqslant \widetilde{C}^{\beta_1} \widetilde{C}_0 \eta_1^{\alpha(\beta_1 - 1)} < \frac{\varepsilon}{12},$$

де остання нерівність виконується згідно з вибором η_1. Зауважимо, що при $\beta_1 \in (0,1)$ також $\alpha(\beta_1 - 1) > 0$.

Доведено, що існує $\widetilde{\delta}_2 = \min\{\delta_1, \delta_2, \delta_3\} > 0$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widetilde{\delta}_2$, $|z_0| < \widetilde{\delta}_2$

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \mathcal{I}_3(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{6}.$$

Отже, існує $\widehat{\delta}_2 = \min\{\widetilde{\delta}_1, \widetilde{\delta}_2\} > 0$ таке, що для довільних $(z,z_0) \in \mathbb{R}^{n+1}$, $||z|| < \widehat{\delta}_2$, $|z_0| < \widehat{\delta}_2$ виконується

$$\sup_{(x,t)\in\overline{Q}} \mathcal{I}(x,t,\hat{x},\hat{t};z,z_0) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отож, множина $\{H_1 \mathrm{v} : \mathrm{v} \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha, \widetilde{C}}(\overline{Q}, \widehat{P})\}$ – одностайно неперервна. За теоремою Шаудера та за умов лем 2, 3, 4 крайова задача (6)-(8) має розв'язок $u \in \widetilde{\mathcal{M}}_{\alpha}(\overline{Q}, \widehat{P})$. $\square$

3. Висновки. Ми знайшли достатні умови існування та характер точкових степеневих особливостей розв'язку нелінійної першої узагальненої крайової задачі для рівняння теплопровідності.

Список використаної літератури

1. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D' / *Лопушанська Г.П.* – Львів, 2002.
2. *Лопушанська Г.П.* Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах / *Лопушанська Г.П.* // Мат. студії. – 2001. – Т. 15, № 2. – С. 179-190.
3. *Чмир О.Ю.* Про формулювання узагальненої крайової задачі для півлінійного параболічного рівняння / *Чмир О.Ю.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 134-143.
4. *Galaktionov V.* On critical Fujita exponents for heat equations with a nonlinear condition on the boundary / *Galaktionov V., Livine H.* // Israel J. Math. – 1996. – Vol. 94. – P. 125-146.
5. *Hu B.* On critical exponents for the heat equation with a mixed nonlinear Dirichlet-Newmann nonlinear boundary condition / *Hu B., Yin H.* // J. Math. Anal. Appl. – 1997. – Vol. 209. – P. 683-711.
6. *Gomez J.* Blow-up results and localization of blow-up points for the heat equation with a nonlinear boundary condition / *Gomez J., Marquez V., Wolanski N.* // J. Diff. Equations. – 1991. – Vol. 92. – P. 384-401.
7. *Lin Z.G.* The blow-up properties of solutions to semilinear heat equation with nonlinear boundary conditions / *Lin Z.G., Wang M.X.* // Z. Angew. Math. Phys. – 1999. – Vol. 50. – P. 361-374.
8. *Lopushanska H.* Solutions with strong power singularities to nonlinear elliptic boundary value problems / *Lopushanska H.* // Матем. вісник НТШ. – 2006. – Т. 3. – С. 247-260.
9. *Чмир О.Ю.* Про розв'язок нелінійної першої крайової задачі для рівняння теплопровідності в узагальнених функціях / *Чмир О.Ю., Меньшикова О.В.* // Вісник нац. ун-ту "Львівська Політехніка". Фіз.-мат. науки. – 2009. – Вип. 660. – С. 14-19.
10. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач / *Ивасишен С.Д.* – К., 1990.
11. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы / *Эйдельман С.Д.* – М., 1964.
12. *Ивасишен С.Д.* О композиции параболических ядер / *Ивасишен С.Д.* // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 32. – № 1. – С. 35-45.
13. *Чмир О.Ю.* Точкові особливості розв'язку нелінійного інтегрального рівняння Вольтерра / *Чмир О.Ю.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 220-234.
14. *Прудников А.П.* Интегралы и ряды / *Прудников А.П., Брычков Ю.А., Маричев О.И.* – М., 1981.
15. *Колмогоров А.Н.* Элементы теории функций и функционального анализа / *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* – М., 1976.

Стаття: надійшла до редакції 30.03.2011
прийнята до друку 21.09.2011

CHARACTER POINTED POWER SINGULARITIES OF THE SOLUTION OF THE NONLINEAR FIRST GENERALIZED BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR HEAT EQUATION

Oksana CHMYR

Lviv State University of Vital Activity Safety,
Kleparivska Str., 35, Lviv, 79000
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

Using the Schauder method the character pointed power singularities of the solution of the nonlinear first generalized boundary value problem for heat equation are investigated.

Key words: nonlinear boundary value problem, generalized function, weight functional space, continuous operator, compact set, Schauder fixed-point theorem.

О ХАРАКТЕРЕ ТОЧЕЧНЫХ СТЕПЕННЫХ ОСОБЕННОСТЯХ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ПЕРВОЙ ОБОБЩЁННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

Оксана ЧМЫРЬ

Львовский государственный университет безопасности жизнедеятельности,
ул. Клепаровская, 35, Львов, 79000
e-mail: o_chmyr@yahoo.com

С помощью принципа Шаудера исследовано характер точечных степенных особенностей решения нелинейной первой обобщённой краевой задачи для уравнения теплопроводности.

Ключевые слова: нелинейная краевая задача, обобщённая функция, весовое функциональное пространство, непрерывный оператор, компактное множество, теорема Шаудера о неподвижной точке.