ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 143–156
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 143–156

УДК 517.53+517.54

ПРО ЦІЛІ РОЗВ'ЯЗКИ ЛІНІЙНИХ ДИФЕРЕНЦІАЛЬНИХ РІВНЯНЬ З ПОЛІНОМІАЛЬНИМИ КОЕФІЦІЄНТАМИ

Ярослав МАГОЛА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: mahola@ukr.net

Досліджено властивості цілих розв'язків диференціальних рівнянь вигляду

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0,$$

де $n \geqslant 3$, $2 \leqslant m \leqslant n$ і $a_k^{(j)}$ – комплексні числа.

Зазначено умови на параметри $a_k^{(j)}$, за яких існує цілий розв'язок f цього рівняння такий, що всі похідні $f^{(lm-1)}, (l \in \mathbb{N})$ є опуклими або близькими до опуклих функціями в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Вивчено зростання такої функції f.

Ключові слова: ціла функція, опуклість, близькість до опуклості, регулярне зростання.

1. Вступ. Однолиста аналітична в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функція

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} f_j z^j \tag{1}$$

називається опуклою, якщо $f(\mathbb{D})$ – опукла область. Добре відомо [1, с. 203], що умова $\mathrm{Re}\{1 + zf''(z)/f'(z)\} > 0 (z \in \mathbb{D})$ є необхідною і достатньою для опуклості функції f в $\mathbb{D}$. Функція f називається [1, с. 583] близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо існує така опукла в $\mathbb{D}$ функція Φ, що $\mathrm{Re}\{f'(z)/\Phi'(z)\} > 0 (z \in \mathbb{D})$. Кожна близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція є однолистою в $\mathbb{D}$ і $f_1 \neq 0$ [1, с. 583]. Близька до опуклої в $\mathbb{D}$ функція f характеризується тим, що $f(\mathbb{D})$ – лінійно досяжна зовні область [1, с. 584], тобто $\mathbb{C} \backslash \overline{f(\mathbb{D})}$ можна заповнити проведеними з $\partial f(\mathbb{D})$ променями, які належать до $\mathbb{C} \backslash \overline{f(\mathbb{D})}$. Оскільки $f_1 \neq 0$, то звідси випливає, що функція (1) близька до опуклої в $\mathbb{D}$ тоді і лише тоді, коли близькою до опуклої в $\mathbb{D}$ є функція $F(z) = z + \sum_{j=2}^{\infty} (f_j/f_1) z^j$.

© Магола Я., 2011

С. Шах [2], вивчаючи властивості цілих розв'язків диференціального рівняння

$$z^2w'' + (a_1^{(1)}z^2 + a_2^{(1)}z)w' + (a_1^{(0)}z^2 + a_2^{(0)}z + a_3^{(0)})w = 0, \tag{2}$$

довів таку теорему.

Теорема 1. *Якщо*

$$a_1^{(0)} \neq 0, \quad a_1^{(1)} = a_2^{(0)} = a_3^{(0)} = 0, \quad a_2^{(1)} \geqslant 1, \quad |a_1^{(0)}|^{1/2} \leqslant \log(2+\sqrt{3}) = 1.31...,$$

то існує цілий розв'язок (1) *рівняння* (2) *з* $f_0 = 1, f_{2j+1} = 0 (j \geqslant 0)$ *такий, що всі непарні похідні* $f', f''', \dots$ *однолисті в* $\mathbb{D}$ *і* $\ln M_f(r) = (1+o(1))\sqrt{|a_1^{(0)}|r}$, *при* $r \to \infty$, *де* $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$.

Безпосереднім узагальненням рівняння С. Шаха є диференціальне рівняння

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{j+1} a_k^{(n-j)} z^{n-k+1} \right) w^{(n-j)} = 0. \tag{3}$$

В [3] доведено теорему.

Теорема 2. *Аналітична в околі початку координат функція* (1) *є розв'язком диференціального рівняння* (3) *тоді і лише тоді, коли для кожного* $s \in \mathbb{Z}_+$

$$\sum_{p=0}^{\min\{s,n\}} \sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-p} a_{n+1-k-p}^{(k)} \frac{(s-p)!}{(s-k-p)!} f_{s-p} = 0, \tag{4}$$

де $a_1^{(n)} = 1$.

Вважатимемо, що $n \geqslant 3$, $2 \leqslant m \leqslant n$:

1) $a_k^{(j)} = 0$ для $k = 1, 2, ..., n-j-m, n-j-m+2, ..., n-j$ та $j = \overline{0, n-m-1}$;
2) $a_k^{(n-m)} = 0$ для $k = \overline{2, m}$;
3) $a_k^{(n-j)} = 0$ для $k = \overline{1, j}$ та $j = \overline{1, m-1}$.

Тоді рівняння (3) у цьому випадку можна записати у вигляді

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0, \tag{5}$$

а з теореми 2 неважко отримати такий наслідок.

Твердження 1. *Нехай* $n \geqslant 3$, $2 \leqslant m \leqslant n$. *Аналітична в околі початку координат функція* (1) *є розв'язком диференціального рівняння* (5) *тоді і лише тоді, коли*

$$\sum_{k=0}^{s} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{s!}{(s-k)!} f_s = 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant m-1, \tag{6}$$

і для $s \geqslant m$

$$\sum_{k=0}^{\min\{s,n\}} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{s!}{(s-k)!} f_s + \sum_{k=0}^{\min\{s,n\}-m} a_{n+1-k-m}^{(k)} \frac{(s-m)!}{(s-k-m)!} f_{s-m} = 0, \tag{7}$$

де $a_1^{(n)} = 1$.

Припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} = 0$. Якщо виберемо $f_0 = 1$, $f_1 = \cdots = f_{m-1} = 0$, то умова (6) буде виконуватись, і отже, розв'язок рівняння (5) шукатимемо у вигляді

$$f(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_{mj} z^{mj} = 1 + f_m z^m + f_{2m} z^{2m} + \cdots . \tag{8}$$

2. Основна теорема. Справджується таке твердження.

Теорема 3. *Нехай $n \geqslant 3$, $2 \leqslant m \leqslant n$ і $j_0 = [n/m]$, а $\varkappa_m = \max\{\varkappa_{1,m}, \varkappa_{2,m}\}$, де*

$$\varkappa_{1,m} = \max\left\{ \left| \sum_{k=m}^{pm} \frac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{(pm-k)!} \right| \left| \sum_{k=0}^{pm} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} \right|^{-1}, \quad p = \overline{1, j_0} \right\} \tag{9}$$

і

$$\varkappa_{2,m} = \max\left\{ \left| \sum_{k=m}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{(pm-k)!} \right| \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} \right|^{-1}, \quad p > j_0 + 1 \right\}. \tag{10}$$

Припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} = 0$. Тоді існує цілий розв'язок (8) диференціального рівняння (5) з такими властивостями:

а) якщо $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varkappa_m^j}{(jm)!} \leqslant 1$, то всі похідні $f^{(lm-1)}(l \in \mathbb{N})$ близькі до опуклих в $\mathbb{D}$;

б) якщо $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(jm+1)\varkappa_m^j}{(jm)!} \leqslant 1$, то всі похідні $f^{(lm-1)}(l \in \mathbb{N})$ опуклі в $\mathbb{D}$;

в) функція f має регулярне зростання, тобто при $r \to \infty$

$$\ln M_f(r) = \frac{m+q-1}{m}(1+o(1)) \left(\sqrt[m]{|a_q^{(n-m-q+1)}|} r \right)^{\frac{m}{m+q-1}}, \tag{11}$$

де $q = \min\left\{ j \in \{1, ..., n+1-m\} : a_j^{(n-m-j+1)} \neq 0 \right\}.$

Доведення. Почнемо з твердження *а*. Для функції (8) формула (7) набула вигляду

$$\sum_{k=0}^{\min\{jm,n\}} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{(jm)!}{(jm-k)!} f_{jm} +$$

$$+ \sum_{k=0}^{\min\{jm,n\}-m} a_{n+1-k-m}^{(k)} \frac{((j-1)m)!}{((j-1)m-k)!} f_{(j-1)m} = 0, \quad j \geqslant 1.$$

Зрозуміло, що $j_0 = \max\{j : jm \leqslant n\} \geqslant 1$, а з формули (7) для $j \leqslant j_0$ отримаємо $\min\{jm, n\} = jm$, і отже,

$$f_{jm} = -\frac{((j-1)m)!}{(jm)!} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j-1)m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{jm} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(jm-k)!}} f_{(j-1)m} =$$

$$= \dots = \frac{(-1)^j}{(jm)!} \prod_{s=1}^{j} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j-s)m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-s)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j-s+1)m} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(j-s+1)m-k)!}}. \tag{12}$$

Ця формула правильна і для j_0, тобто

$$f_{j_0 m} = \frac{(-1)^{j_0}}{(j_0 m)!} \prod_{s=1}^{j_0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j_0-s)m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j_0-s)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j_0-s+1)m} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j_0-s+1)m-k)!}}. \tag{13}$$

Якщо $j > j_0$, то $\min\{jm, n\} = n$ і з (7) одержуємо

$$f_{jm} = -\frac{((j-1)m)!}{(jm)!} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(jm-k)!}} f_{(j-1)m} =$$

$$= (-1)^{j-j_0} \frac{(j_0 m)!}{(jm)!} \prod_{s=1}^{j-j_0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-s)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j-s+1)m-k)!}} f_{j_0 m} =$$

$$= (-1)^{j-j_0} \frac{(j_0 m)!}{(jm)!} (-1)^{j_0} \frac{1}{(j_0 m)!} \prod_{s=1}^{j-j_0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-s)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j-s+1)m-k)!}} \times$$

$$\times \prod_{s=1}^{j_0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j_0-s)m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j_0-s)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j_0-s+1)m} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j_0-s+1)m-k)!}}.$$

Отже, для $j > j_0$

$$f_{jm} = \frac{(-1)^j}{(jm)!} \prod_{s=1}^{j-j_0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-s)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j-s+1)m-k)!}} \prod_{s=1}^{j_0} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j_0-s)m} \frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j_0-s)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j_0-s+1)m} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j_0-s+1)m-k)!}}. \tag{14}$$

Легко перевірити, що для $(lm-1)$-ї похідної функції (8) правильна рівність

$$f^{(lm-1)}(z)=\sum_{j=0}^{\infty}\frac{((j+l)m)!}{(jm+1)!}f_{jm+lm}z^{jm+1}=\frac{(lm)!}{1!}f_{lm}z+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{((j+l)m)!}{(jm+1)!}f_{(j+l)m}z^{jm+1}.$$

Функція $f^{(lm-1)}$ є опуклою чи близькою до опуклої тоді і лише тоді, коли такою є функція

$$F_l(z)=z+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{((j+l)m)!}{(jm+1)!(lm)!}\frac{f_{(j+l)m}}{f_{lm}}z^{jm+1}=z+\sum_{j=1}^{\infty}F^{(l)}_{jm+1}z^{jm+1}. \tag{15}$$

Якщо $j+l\leqslant j_0$, то з огляду на (12)

$$F^{(l)}_{jm+1}=\frac{(-1)^j}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j+l-s)m}\frac{a^{(k)}_{n+1-k-m}}{((j+l-s)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j+l-s+1)m}\frac{a^{(k)}_{n+1-k}}{((j+l-s+1)m-k)!}}. \tag{16}$$

Якщо $j+l>j_0$ і $l\leqslant j_0$, то з огляду на (12) і (14)

$$F^{(l)}_{jm+1}=\frac{(-1)^j}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j-(j_0-l)}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-m}\frac{a^{(k)}_{n+1-k-m}}{((j+l-s)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{(k)}_{n+1-k}}{((j+l-s+1)m-k)!}}\times$$

$$\times\prod_{s=1+l}^{j_0}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j_0+l-s)m}\frac{a^{(k)}_{n+1-k-m}}{((j_0+l-s)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j_0+l-s+1)m}\frac{a^{(k)}_{n+1-k}}{((j_0+l-s+1)m-k)!}}. \tag{17}$$

Нарешті, якщо $l>j_0$, то з огляду на (14)

$$F^{(l)}_{jm+1}=\frac{(-1)^j}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{n-m}\frac{a^{(k)}_{n+1-k-m}}{((j+l-s)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{(k)}_{n+1-k}}{((j+l-s+1)m-k)!}}. \tag{18}$$

Оцінимо $|F_{jm+1}|$. Для $j+l\leqslant j_0$ з формули (16) отримаємо

$$|F^{(l)}_{jm+1}|=\frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\left|\frac{\displaystyle\sum_{k=m}^{(j+l-s+1)m}\frac{a^{(k-m)}_{n+1-k}}{((j+l-s+1)m-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{(j+l-s+1)m}\frac{a^{(k)}_{n+1-k}}{((j+l-s+1)m-k)!}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\max\left\{\left|\frac{\sum\limits_{k=m}^{(j+l-s+1)m}\frac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{(j+l-s+1)m}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}\right| : j+l\leqslant j_0, 1\leqslant s\leqslant j\right\}.$$

Легко побачити таке: якщо $j+l\leqslant j_0$ і $1\leqslant s\leqslant j$, то $j+l-s+1\leqslant j_0$. Тому з попередньої нерівності отримуємо

$$|F_{jm+1}^{(l)}|\leqslant \frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\varkappa_{1,m}=\frac{\varkappa_{1,m}^{j}}{(jm+1)!}. \tag{19}$$

Якщо ж $l>j_0$, то з (18) одержуємо

$$|F_{jm+1}^{(l)}|=\frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\left|\frac{\sum\limits_{k=0}^{n-m}\frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j+l-s)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}\right|=$$

$$=\frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\left|\frac{\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}\right|\leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\max\left\{\left|\frac{\sum\limits_{k=m}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k-m)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)m-k)!}}\right| : l>j_0, 1\leqslant s\leqslant j\right\}.$$

Якщо $l>j_0$ і $1\leqslant s\leqslant j$, то $j+l-s+1\geqslant j_0+2\geqslant j_0+1$. Тому з останньої нерівності отримуємо оцінку

$$|F_{jm+1}^{(l)}|\leqslant \frac{1}{(jm+1)!}\prod_{s=1}^{j}\varkappa_{2,m}=\frac{\varkappa_{2,m}^{j}}{(jm+1)!}. \tag{20}$$

Нарешті, якщо $j+l>j_0$ і $l\leqslant j_0$, то з формули (17) одержуємо

$$|F_{jm+1}^{(l)}|\leqslant \frac{\varkappa_{1,m}^{j_0-l}\varkappa_{2,m}^{j-(j_0-l)}}{(jm+1)!}. \tag{21}$$

Отже, у всіх трьох випадках правильна нерівність

$$|F_{jm+1}^{(l)}|\leqslant \frac{\varkappa_{m}^{j}}{(jm+1)!}. \tag{22}$$

Тепер використаємо таку лему [4, 5, 6].

Лема 1. *Якщо* $f(z)=z+\sum_{s=2}^{\infty}f_s z^s$ *і* $\sum_{s=2}^{\infty}s|f_s|\leqslant 1$, *то* f *є близькою до опуклої в* $\mathbb{D}$.

За цією лемою функція $F_l(z)$ (а звідси і $f^{(lm-1)}(z)(l\geqslant 1)$) є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$, якщо $\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varkappa_m^j}{(jm)!}\leqslant 1$, тобто твердження *а* доведено.

Для доведення твердження *б* використаємо таку лему [6].

Лема 2. *Якщо* $f(z)=z+\sum_{s=2}^{\infty}f_s z^s$ *і* $\sum_{s=2}^{\infty}s^2|f_s|\leqslant 1$, *то* f *є опуклою в* $\mathbb{D}$.

За цією лемою з (22) отримуємо твердження *б*.

Нарешті, доведемо твердження *в*. Для $j\geqslant j_0$ з (7) отримуємо

$$(jm)!\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(jm-k)!}f_{jm}=-((j-1)m)!\sum_{k=0}^{n-m}\frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m-k)!}f_{(j-1)m}.$$

Оскільки $a_1^{(n)}=1$, то

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(jm-k)!}=\frac{a_1^{(n)}}{(jm-n)!}+\frac{a_2^{(n-1)}}{(jm+1-n)!}+\dots+\frac{a_{n+1}^{(0)}}{(jm)!}=\frac{1+o(1)}{(jm-n)!},\quad j\to\infty.$$

З іншого боку, якщо $a_1^{(n-m)}\neq 0$, то

$$\sum_{k=0}^{n-m}\frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m-k)!}=\frac{a_1^{(n-m)}}{(jm-n)!}+\frac{a_2^{(n-m-1)}}{(jm+1-n)!}+$$

$$+\dots+\frac{a_{n+1-m}^{(0)}}{(jm-m)!}=\frac{a_1^{(n-m)}}{(jm-n)!}(1+o(1)),\quad j\to\infty.$$

Якщо ж $a_1^{(n-m)}=a_2^{(n-m-1)}=\dots=a_{q-1}^{(n-m-q+2)}=0$ і $a_q^{(n-m-q+1)}\neq 0$, то при $j\to\infty$

$$\sum_{k=0}^{n-m}\frac{a_{n+1-k-m}^{(k)}}{((j-1)m-k)!}=\frac{a_q^{(n-m-q+1)}}{(jm-n+q-1)!}+\dots+\frac{a_{n+1-m}^{(0)}}{((j-1)m)!}=\frac{a_q^{(n-m-q+1)}(1+o(1))}{(jm+q-n-1)!}.$$

Тому

$$\frac{(jm)!}{(jm-n)!}f_{jm}=-(1+o(1))((j-1)m)!\frac{a_q^{(n-m-q+1)}}{(jm-n+q-1)!}f_{(j-1)m},\quad j\to\infty,$$

звідки

$$f_{jm}=-\frac{(1+o(1))}{(jm)^{m+q-1}}a_q^{(n-m-q+1)}f_{(j-1)m},\quad j\to\infty.$$

Отже, для кожного $\varepsilon\in(0,1)$ і всіх $j\geqslant j_0(\varepsilon)$

$$\frac{(1-\varepsilon)}{(jm)^{m+q-1}}|a_q^{(n-m-q+1)}||f_{(j-1)m}|\leqslant|f_{jm}|\leqslant\frac{(1+\varepsilon)}{(jm)^{m+q-1}}|a_q^{(n-m-q+1)}||f_{(j-1)m}|.$$

Тому для всіх $j \geqslant 1$

$$K_1 \frac{((1-\varepsilon)|a_q^{(n-m-q+1)}|)^j}{\prod_{s=0}^{j}(sm)^{m+q-1}} \leqslant |f_{jm}| \leqslant K_2 \frac{((1+\varepsilon)|a_q^{(n-m-q+1)}|)^j}{\prod_{s=0}^{j}(sm)^{m+q-1}},$$

тобто

$$K_1 \frac{\left(\sqrt[m]{(1-\varepsilon)|a_q^{(n-m-q+1)}|}\right)^{jm}}{\prod_{s=0}^{j}(sm)^{m+q-1}} \leqslant |f_{jm}| \leqslant K_2 \frac{\left(\sqrt[m]{(1+\varepsilon)|a_q^{(n-m-q+1)}|}\right)^{jm}}{\prod_{s=0}^{j}(sm)^{m+q-1}}, \tag{23}$$

де K_1, K_2 – додатні сталі.

Розглянемо функцію

$$f^*(r) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{r^{jm}}{\prod_{s=0}^{j}(sm)^p}, \quad p = m+q-1 \geqslant 2. \tag{24}$$

Нехай $\mu_{f^*}(r)$ – максимальний член ряду (24), а $\nu_{f^*}(r)$ – його центральний індекс. Оскільки $r_{jm} = (jm)^{p/m} \uparrow \infty,\ j \to \infty$, то $\nu_{f^*}(r) = jm$ при $r_{(j-1)m+1} \leqslant r < r_{jm+1}$. Звідси випливає, що $(\nu_{f^*}(r) - m)^{p/m} \leqslant r \leqslant (\nu_{f^*}(r))^{p/m}$, тобто $\nu_{f^*}(r) = (1+o(1))r^{m/p}$ при $r \to \infty$,

$$\ln \mu_{f^*}(r) = \ln \mu_{f^*}(r_0) + \int_{r_0}^{r} \frac{\nu_{f^*}(t)}{t} dt = (1+o(1))\frac{p}{m} r^{m/p}, r \to \infty, \tag{25}$$

а за теоремою Бореля про еквівалентність логарифмів максимуму модуля і максимального члена для цілих функцій скінченного порядку одержуємо

$$\ln M_{f^*}(r) = (1+o(1))\frac{p}{m} r^{m/p}, r \to \infty.$$

Завдяки (23) і довільності $\varepsilon > 0$ отримуємо твердження *в*.

Теорему 3 повністю доведено. □

Зауваження 1. Оскільки $m \geqslant 2$ і $a_{n+1}^{(0)} = 0$, то

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} = \frac{a_{n+1}^{(0)}}{(pm)!} + \sum_{k=1}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!}, \tag{26}$$

Будемо вважати, що всі $a_{n+1-k}^{(k)} \geqslant 0 (k = \overline{1,n})$. Тоді

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!}\right| = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} + \sum_{k=m}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!} \geqslant \sum_{k=m}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pm-k)!}.$$

Якщо існує число $\eta_m > 0$ таке, що $|a_{n+1-k}^{(k-m)}| \leqslant \eta_m a_{n+1-k}^{(k)}$, то з (10) отримаємо оцінку $\varkappa_{2,m} \leqslant \eta_m$. Подібно можна показати, що і $\varkappa_{1,m} \leqslant \eta_m$. Тому з теореми 3 випливає таке твердження.

Твердження 2. *Нехай* $n \geqslant 3$, $2 \leqslant m \leqslant n$, $a_{n+1}^{(0)} = 0$ *і всі* $a_{n+1-k}^{(k)} \geqslant 0$ $(k = \overline{1,n})$. *Якщо* $|a_{n+1-k}^{(k-m)}| \leqslant \eta_m a_{n+1-k}^{(k)}$ *для всіх* $k \geqslant m$, *то існує цілий розв'язок* (8) *диференціального рівняння* (5) *з властивостями а, б і в, згаданими у теоремі 3, але з заміною* $\varkappa_m$ *на* η_m.

Зауваження 2. У випадку $m = 2$ умова твердження *а* теореми 3 $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{\varkappa_2^j}{(2j)!} \leqslant 1$ рівносильна умові $\operatorname{ch}\sqrt{\varkappa_2} \leqslant 2$, тобто умові $\varkappa_2 \leqslant \ln^2(2+\sqrt{3})$, а умова твердження б) $\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2j+1)\varkappa_2^j}{(2j)!} \leqslant 1$ рівносильна умові $\operatorname{ch}\sqrt{\varkappa_2} + \sqrt{\varkappa_2}\operatorname{sh}\sqrt{\varkappa_2} \leqslant 2$ і виконується, якщо $\varkappa_2 < \ln^2 2$.

3. Наслідки та доповнення до теореми 3. Нехай спочатку $m = n$. Тоді диференціальне рівняння (5) набуде такого вигляду:

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + (a_1^{(0)} z^n + a_{n+1}^{(0)}) z w = 0. \tag{27}$$

З огляду на твердження 1 знову припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} = 0$. Для того, щоб виконувалась умова (6), виберемо $f_0 = 1, f_1 = 0, f_2 = \cdots = f_{n-1} = 0$, тобто розв'язок рівняння (27) будемо шукати в такому вигляді:

$$f(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_{nj} z^{nj} = 1 + f_n z^n + f_{2n} z^{2n} + \cdots . \tag{28}$$

Дослідимо опуклість і близькість до опуклості непарних похідних цілого розв'язку (28) диференціального рівняння (27). Як і при доведенні теореми 3, використаємо лему 1 та лему 2. Оскільки тепер $j_0 = 1$, то, як вище для коефіцієнтів f_{jn}, легко одержуємо таку формулу:

$$f_{jn} = \frac{(-1)^j}{(jn+1)!} \prod_{s=1}^{j} \frac{\dfrac{a_1^{(0)}}{((j-s)n)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j-s+1)n-k)!}}, \quad j \geqslant 1. \tag{29}$$

Для коефіцієнтів функції F_l з (16) випливає формула

$$F_{jn+1}^{(l)} = \frac{(-1)^j}{(jn+1)!} \prod_{s=1}^{j} \frac{\dfrac{a_1^{(0)}}{((j+l-s)n)!}}{\sum\limits_{k=0}^{n} \dfrac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)n-k)!}}. \tag{30}$$

З (30) випливає, що

$$|F_{jn+1}^{(l)}| \leqslant \frac{1}{(jn+1)!}\prod_{s=1}^{j}\max\left\{\left|\frac{\dfrac{a_1^{(0)}}{((j+l-s)n)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{((j+l-s+1)n-k)!}}\right| : l \geqslant 1, 1 \leqslant s \leqslant j\right\}.$$

Якщо приймемо

$$\varkappa_n = \max\left\{\left|\frac{a_1^{(0)}}{((p-1)n)!}\right|\left|\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pn-k)!}\right|^{-1}, p > 1\right\}, \tag{31}$$

то отримаємо таку оцінку:

$$|F_{jn+1}^{(l)}| \leqslant \frac{\varkappa_n^j}{(jn+1)!}. \tag{32}$$

З наведених вище міркувань випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай* $n \geqslant 3$, *а* $\varkappa_n$ *визначається формулою* (31). *Припустимо, що* $a_{n+1}^{(0)} = 0$. *Тоді існує цілий розв'язок* (28) *диференціального рівняння* (27) *з такими властивостями:*

а) якщо $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\varkappa_n^j}{(jn)!} \leqslant 1$, *то всі похідні* $f^{(ln-1)}(l \in \mathbb{N})$ *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$;

б) якщо $\displaystyle\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(jn+1)\varkappa_n^j}{(jn)!} \leqslant 1$, *то всі похідні* $f^{(ln-1)}(l \in \mathbb{N})$ *є опуклими в* $\mathbb{D}$;

в) функція f *має регулярне зростання, тобто при* $r \to \infty$

$$\ln M_f(r) = (1 + o(1))\sqrt[n]{|a_1^{(0)}|}r.$$

Зауваження 3. Оскільки $a_1^{(n)} = 1$, то з (26) за умови $a_{n+1}^{(0)} = 0$ для $m = n$ отримуємо

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pn-k)!} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(pn-k)!} + \frac{a_1^{(n)}}{((p-1)n)!} \geqslant \frac{1}{((p-1)n)!},$$

якщо всі $a_{n+1-k}^{(k)} \geqslant 0(k = \overline{1, n-1})$. Тому $\varkappa_n \leqslant |a_1^{(0)}|$ і правильне таке твердження.

Твердження 3. *Нехай* $n \geqslant 3, a_{n+1}^{(0)} = 0$ *і* $a_{n+1-k}^{(k)} \geqslant 0(1 \leqslant k \leqslant n-1)$. *Тоді існує цілий розв'язок* (28) *диференціального рівняння* (27) *з властивостями а, б і в, згаданими у наслідку 1, з заміною* $\varkappa_m$ *на* $|a_1^{(0)}|$.

Нехай тепер $m = 2$. Тоді рівняння (5) набуде такого вигляду:

$$z^n w^{(n)} + a_2^{(n-1)} z^{n-1} w^{(n-1)} + \sum_{j=0}^{n-2}(a_{n-j-1}^{(j)} z^2 + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0. \tag{33}$$

З огляду на твердження 1 припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} = 0$, і для того, щоб задовольнити умову (6), виберемо $f_0 = 1, f_1 = 0$.

Отже, розв'язок рівняння (33) будемо шукати в такому вигляді:

$$f(z) = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} f_{2j} z^{2j} = 1 + f_2 z^2 + f_4 z^4 + \cdots . \qquad (34)$$

У цьому випадку з теореми 3 з огляду на зауваження 2 отримаємо такий наслідок.

Наслідок 2. *Нехай $n \geqslant 3$ і $j_0 = [n/2]$, а $\varkappa_2 = \max\{\varkappa_{1,2}, \varkappa_{2,2}\}$, де*

$$\varkappa_{1,2} = \max\left\{ \left| \sum_{k=2}^{2p} \frac{a_{n+1-k}^{(k-2)}}{(2p-k)!} \right| \left| \sum_{k=0}^{2p} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(2p-k)!} \right|^{-1}, \quad p = \overline{1, j_0} \right\}$$

і

$$\varkappa_{2,2} = \max\left\{ \left| \sum_{k=2}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k-2)}}{(2p-k)!} \right| \left| \sum_{k=0}^{n} \frac{a_{n+1-k}^{(k)}}{(2p-k)!} \right|^{-1}, \quad p > j_0 + 1 \right\}.$$

Припустимо, що $a_{n+1}^{(0)} = 0$. Тоді існує цілий розв'язок (34) диференціального рівняння (33) з такими властивостями:
а) якщо $\varkappa_2 \leqslant \ln^2(2+\sqrt{3})$, то всі похідні $f^{(2l-1)} (l \in \mathbb{N})$ є близькими до опуклих в $\mathbb{D}$;
б) якщо $\varkappa_2 \leqslant \ln^2 2$, то всі похідні $f^{(2l-1)} (l \in \mathbb{N})$ є опуклими в $\mathbb{D}$;
в) функція f має регулярне зростання, тобто при $r \to \infty$

$$\ln M_f(r) = \frac{1+q}{2}(1+o(1)) \left(\sqrt{|a_q^{(n-q-1)}| r} \right)^{\frac{2}{1+q}},$$

де $q = \min\{j \in \{1, ..., n-1\} : a_j^{(n-j-1)} \neq 0\}$.

Припустимо тепер, що всі коефіцієнти рівняння (33) – дійсні числа. Тоді для дослідження близькості до опуклості непарних похідних розв'язку (34) рівняння (33) використаємо такий критерій Александера [7, c. 9].

Лема 3. *Якщо $f(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} f_{2j+1} z^{2j+1}$ і*

$$1 \geqslant 3f_3 \geqslant 5f_5 \geqslant \cdots \geqslant (2j-1)f_{2j-1} \geqslant (2j+1)f_{2j+1} \geqslant \ldots \geqslant 0, \qquad (35)$$

то f є близькою до опуклої в $\mathbb{D}$.

З рекурентної формули (7) з $m = 2$ для $j \geqslant 1$ одержимо

$$f_{2(j+1)} = -\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{2(j+1),n\}-2} a_{n-1-k}^{(k)} \frac{(2j)!}{(2j-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{2(j+1),n\}} a_{n+1-k}^{(k)} \frac{(2(j+1))!}{(2(j+1)-k)!}} f_{2j} =$$

$$= -\frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{2(j+1),n\}-2} a_{n-1-k}^{(k)} \frac{(2j)!}{(2j-k)!}}{a_{n+1}^{(0)} + 2a_n^{(1)}(j+1) + \displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{2(j+1),n\}-2} a_{n-1-k}^{(k+2)} \frac{(2(j+1))!}{(2j-k)!}} f_{2j}.$$

Нехай $a_{n+1}^{(0)} = a_n^{(1)} = 0$, $a_{n-1-k}^{(k)} \leqslant 0$, $a_{n-1-k}^{(k+2)} \geqslant 0$ і $|a_{n-1-k}^{(k)}| \leqslant 2a_{n-1-k}^{(k+2)}$, $0 \leqslant k \leqslant n-2$. Тоді для кожного $j \geqslant 1$

$$f_{2(j+1)} = \frac{(2j)!}{(2(j+1))!} \frac{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{2(j+1),n\}-2} \frac{|a_{n-1-k}^{(k)}|}{(2j-k)!}}{\displaystyle\sum_{k=0}^{\min\{2(j+1),n\}-2} \frac{a_{n-1-k}^{(k+2)}}{(2j-k)!}} f_{2j} \leqslant 2\frac{(2j)!}{(2(j+1))!} f_{2j}. \tag{36}$$

Оскільки $F_1^{(0)} = 1$, то при $m = 2$ функція (15) набуде вигляду

$$F_l(z) = z + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(2(j+l))!}{(2j+1)!(2l)!} \frac{f_{2(j+l)}}{f_{2l}} z^{2j+1} = z + \sum_{j=1}^{\infty} F_{2j+1}^{(l)} z^{2j+1}. \tag{37}$$

Використовуючи формулу (36), доведемо, що коефіцієнти функції (37) задовольняють умову леми 3. Справді, для $j \geqslant 1$ одержимо

$$(2j+1)F_{2j+1}^{(l)} = (2j+1)\frac{(2(j+l))!}{(2j+1)!(2l)!} \frac{f_{2(j+l)}}{f_{2l}} \leqslant \frac{(2(j+l-1))!}{2j(2j-1)!(2l)!} \frac{f_{2(j+l-1)}}{f_{2l}} \leqslant (2j-1)F_{2j-1}^{(l)}.$$

Наступне твердження випливає з наведених вище міркувань.

Твердження 4. *Нехай* $a_{n+1}^{(0)} = a_n^{(1)} = 0$, $a_{n-1-k}^{(k)} \leqslant 0$, *та* $a_{n-1-k}^{(k+2)} \geqslant 0$ *для всіх* $0 \leqslant k \leqslant n-2$. *Якщо* $|a_{n-1-k}^{(k)}| \leqslant 2a_{n-1-k}^{(k+2)}$ *для всіх* $0 \leqslant k \leqslant n-2$, *то існує цілий розв'язок* (34) *диференціального рівняння* (33) *такий, що всі похідні* $f^{(2j+1)}$, $(j \in \mathbb{Z}_+)$ *є близькими до опуклих в* $\mathbb{D}$ *функціями.*

Зауваження 4. Оскільки $\ln^2(2+\sqrt{3}) < 2$, то у випадку дійсних $a_n^{(k)}$ твердження 4 посилює твердження *a* наслідку 2.

Зауваження 5. Питання послаблення умови $|a_{n-1-k}^{(k)}| \leqslant 2a_{n-1-k}^{(k)}$ твердження 4 залишається відкритим. Ми можемо стверджувати, що цю умову не можна замінити слабшою умовою $|a_{n-1-k}^{(k)}| \leqslant 2.5a_{n-1-k}^{(k)}$.

Справді, у випадку, коли $n = 3$ за умов твердження 4 рівняння (33) набуде вигляду

$$z^3 w''' + a_2^{(2)} z^2 w'' + a_1^{(1)} z^3 w' + a_2^{(0)} z^2 w = 0. \tag{38}$$

Виберемо $a_2^{(2)} = 1$ і $a_1^{(1)} = a_2^{(0)} = -\alpha^2$ і розглянемо функцію $f(z) = \mathrm{ch}(\alpha z)$. Легко перевірити, що ця функція задовольняє рівняння (38) з вибраними параметрами і набула вигляду (34). Функція $f'(z) = \alpha\,\mathrm{sh}(\alpha z)$ є однолистою в смузі $\{z : |\mathrm{Im} z| < \pi/(2\alpha)$ і не є однолистою в будь-якій смузі $\{z : |\mathrm{Im} z| < \eta\}$ з $\eta > \pi/(2\alpha)$. Звідси випливає, що f' не є однолистою в $\mathbb{D}$, якщо $\alpha > \pi/2$, тобто якщо $\alpha^2 = 2.5 > \pi^2/4$. Оскільки $|a_1^{(1)}| = |a_2^{(0)}| = \alpha^2 = \alpha^2 a_1^{(3)} = \alpha^2 a_2^{(2)}$, то звідси випливає потрібне твердження.

Автор висловлює щиру подяку М.М. Шереметі за допомогу та обговорення результатів статті.

Список використаної літератури

1. *Голузин Г.М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного / *Голузин Г.М.* – М., 1966.
2. *Shah S.M.* Univalence of a function f and its successive derivatives when f satisfies a differential equation, II / *Shah S.M.* // J. Math. anal. and appl. – 1989. – Vol. 142. – P. 422-430.
3. *Mahola Ya.S.* Properties of entire solutions of a linear differential equation of n-th order with polynomial coefficients of n-th degree / *Mahola Ya.S., Sheremeta M.M.* // Mat. studii. – 2008. – Vol. 30, №2. – P. 153-162.
4. *Шеремета З.М.* Близость к выпуклости целых решений одного дифференциального уравнения / *Шеремета З.М., Шеремета М.Н.* // Дифференциальные уравнения. – 2002. – Т. 38, №4. – С. 435-440.
5. *Шеремета З.М.* Про функції близькі до опуклих / *Шеремета З.М.* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 144-146.
6. *Goodman A.W.* Univalent function and nonanalytic curves / *Goodman A.W.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1957. – Vol. 8. – P. 597-601.
7. *Goodman A.W.* Univalent functions. Vol. II / *Goodman A.W.* – Florida, 1983.

Стаття: надійшла до редакції 15.11.2009
прийнята до друку 21.09.2011

ON ENTIRE SOLUTIONS OF LINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH POLYNOMIAL COEFFICIENTS

Yaroslav MAHOLA

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: mahola@ukr.net

It is investigated the properties of entire solutions of the differential equations of a form

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0,$$

where $n \geqslant 3, 2 \leqslant m \leqslant n$ and $a_k^{(j)}$ – are complex numbers.

Conditions for coefficients $a_k^{(j)}$ are obtained, under which there exists an entire solution f of this equation such that all derivatives $f^{(lm-1)}$, $(l \in \mathbb{N})$ are convex or close-to-convex functions in $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Growth of such function f is studied.

Key words: entire function, convexity, close-to-convexity, regular growth.

О ЦЕЛЫХ РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ПОЛИНОМИАЛЬНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Ярослав МАГОЛА

Львовский национальный университет им. Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: mahola@ukr.net

Исследовано свойства целых решений дифференциальных уравнений вида

$$z^n w^{(n)} + \sum_{j=n-m+1}^{n-1} a_{n-j+1}^{(j)} z^j w^{(j)} + \sum_{j=0}^{n-m} (a_{n-j-m+1}^{(j)} z^m + a_{n-j+1}^{(j)}) z^j w^{(j)} = 0,$$

где $n \geqslant 3, 2 \leqslant m \leqslant n$ и $a_k^{(j)}$ – комплексные числа.

Указаны условия на параметры $a_k^{(j)}$, при выполнении которых существует целое решение f этого уравнения, такое что все производные $f^{(lm-1)}$, $(l \in \mathbb{N})$ являются выпуклыми или близкими к выпуклым функциям в $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$. Изучен рост такой функции f.

Ключевые слова: целая функция, выпуклость, близость к выпуклости, регулярный рост.