ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 129–142
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 129–142

УДК 517.95

УЗАГАЛЬНЕНІ ПОЧАТКОВІ ТА КРАЙОВІ ЗНАЧЕННЯ РОЗВ'ЯЗКІВ ПАРАБОЛІЧНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ

Галина ЛОПУШАНСЬКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: lhp@ukr.net

Доведено теореми існування та єдиності, одержано зображення розв'язків лінійних нормальних параболічних крайових задач при крайових і початкових даних з вагових просторів узагальнених функцій. Знайдено умови еквівалентності регулярного в області розв'язку задачі у двох формулюваннях.

Ключові слова: нормальна параболічна крайова задача, узагальнена функція, ваговий функційний простір, узагальнені крайові значення, узагальнені початкові значення.

В [1]-[5] вивчали крайові задачі для лінійних параболічних систем в обмежених областях Q у просторах узагальнених функцій із $D'(\overline{Q})$. У [4]-[6] доведено еквівалентність у двох різних формулюваннях крайових задач для лінійних однорідних параболічних рівнянь і систем з узагальненими функціями в правих частинах крайових та початкової умов.

У [7] одержано точні оцінки розв'язків загальних параболічних крайових задач у просторах функцій, які можуть мати слабкі особливості при $t = 0$. В [8], [9] доведено розв'язність параболічних крайових задач з правими частинами, що мають сильні точкові степеневі особливості.

У статті доведено розв'язність нормальних параболічних крайових задач у просторах функцій із сильними степеневими особливостями при $t = 0$ та узагальнено результати з [4]-[6] на випадок правих частин із ширших (вагових) просторів узагальнених функцій.

1. Основні позначення та допоміжні твердження. Нехай Ω_0 – область в $\mathbb{R}^n$, обмежена замкненою поверхнею Ω_1 класу C^∞, $Q_i = \Omega_i \times (0,T]$, $i = 0,1$, $Q_2 = \Omega_0$, $D(Q_i) = C_0^\infty(Q_i)$, $D(\overline{Q}_i) = C^\infty(\overline{Q}_i)$, $i = 0,1,2$,

$$D^0(\overline{Q}_i)\ (D_0(\overline{Q}_i)) = \{\varphi \in D(\overline{Q}_i) : D_t^k \,|_{t=T} = 0\ (D_t^k\varphi\,|_{t=0} = 0),\ k = 0,1,\dots\},\quad i = 0,1,$$

$$L(x,t,D)u \equiv (D_t - A)u \equiv \Big(D_t - \sum_{|\alpha|\le 2b} a_\alpha(x,t) D_x^\alpha\Big)u,$$

$$B_j(x,t,D_x) \equiv \sum_{|\alpha|\le r_j} b_{j\alpha}(x,t)D_x^\alpha, \quad j=\overline{1,m}, \quad m=bp,$$

$a_\alpha(x,t)$ – квадратні $p\times p$ матриці з елементами $a_\alpha^{\nu\mu}\in D(\overline{Q}_0)$, $|\alpha|=\alpha_1+\ldots+\alpha_n$, $D_t=\frac{\partial}{\partial t}$, $D_x^\alpha=\frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial x_1^{\alpha_1}\cdots\partial x_n^{\alpha_n}}=\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1}\cdots\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$, $b_{j\alpha}(x,t)$ – рядки довжини p з елементами з $D(\overline{Q}_1)$, $j=\overline{1,m}$, L – параболічний за Петровським матричний диференціальний вираз. Вважаємо далі $r_m\le\cdots\le r_1\le 2b-1$, $r_0=r_{m+1}=2b$,

$$(j)=0 \quad \text{для} \quad j=0,m+1, \qquad (j)=1 \quad \text{для} \quad j=\overline{1,m}.$$

Матрицею Діріхле порядку $2b$ називається ([3, с. 178]) матриця з $2b$ рядків, яку переставлянням рядків можна звести до вигляду

$$\mathcal{B}(x,t,D_x)=(\mathcal{B}_0(x,t,D_x),\ldots,\mathcal{B}_{2b-1}(x,t,D_x))',$$

де $\mathcal{B}_j(x,t,D_x)\equiv\sum\limits_{|\alpha|\le j}\tilde{b}_{j\alpha}(x,t)D_x^\alpha$, $\tilde{b}_{j\alpha}(x,t)$ – квадратні $p\times p$ матриці, і у цьому разі

$$\det\mathcal{B}_{j0}(x,t,\nu)=\det\sum_{|\alpha|=j}\tilde{b}_{j\alpha}(x,t)\nu^\alpha\ne 0 \text{ для довільних } (x,t)\in Q_1,$$

$\nu=\nu(x,t)$– орт внутрішньої нормалі до $\overline{Q}_1$ у точці (x,t), штрих означає транспонування.

Система крайових диференціальних виразів $\{B_j\}_{j=1}^m=\{B_j(x,t,D_x)\}_{j=1}^m$ називається ***нормальною*** [2], якщо матрицю $B=(B_1,\ldots,B_m)'$ можна доповнити новими рядками до матриці Діріхле порядку $2b$.

Вважатимемо, що система $\{B_j\}_{j=1}^m$ рівномірно накриває оператор L ([3, с. 15]), а також є нормальною.

В $\overline{Q}_0$ розглядаємо нормальну параболічну крайову задачу [2], [3]

$$L(x,t,D)u=F_0(x,t), \quad (x,t)\in Q_0 \tag{1}$$

$$B_j(x,t,D_x)u(x,t)=F_j(x,t), \quad (x,t)\in Q_1, \quad j=\overline{1,m} \tag{2}$$

$$u\mid_{t=0}=F_{m+1}(x), \quad x\in\Omega_0. \tag{3}$$

Згідно з [2] існують такі крайові диференціальні вирази $\hat{B}_j$, C_j, $\hat{C}_j$, $j=\overline{1,m}$ порядків $\hat{r}_j,m_j,\hat{m}_j$, причому $r_j+\hat{m}_j=m_j+\hat{r}_j=2b-1$, що правильна формула Гріна

$$\int\limits_{Q_0}[v'Lu-(L^*v)'u]dxdt+\sum_{j=1}^m\int\limits_{Q_1}[\hat{C}_jvB_ju-\hat{B}_jvC_ju]dxdt+$$

$$+\int\limits_{\Omega_0}[v'(x,0)u(x,0)-v'(x,T)u(x,T)]dx=0, \quad u,v\in\overline{Q}_0,$$

де $L^*=-D_t-A^*$, A^* – формально спряжений до A диференціальний вираз, штрих означає транспонування.

Введемо позначення:

$\varrho_0(x)$ – нескінченно диференційовна функція на $\overline{\Omega}_0$, додатна в Ω_0, яка дорівнює нулю на Ω_1 та має порядок відстані $d(x)$ від точки $x\in\Omega_0$ до Ω_1 при $d(x)\to 0$;

$\varrho_1(t)$ – нескінченно диференційовна функція на $[0,T]$, додатна при $t>0$, яка має порядок t при $t\to 0$;

$\varrho(x,t)$ – нескінченно диференційовна функція на $\overline{Q}_0$, додатна в Q_0, яка дорівнює нулю на $\overline{Q}_1 \cup \Omega_0$, має порядок $d(x)$ при $d(x) \to 0$ та $d(x) \le t^{\frac{1}{2b}}$, порядок $\varrho_1^{\frac{1}{2b}}(t)$ при $t \to 0$ та $d(x) \ge t^{\frac{1}{2b}}$.

Також вважаємо $\varrho_0(t) \le 1$, $\varrho_1(x) \le 1$, $\varrho(x,t) \le 1$ для всіх $x \in \overline{\Omega}_0$, $t \in [0,T]$.

Використовуємо функційні простори

$C^k(\overline{\Omega}_0)$ – простір функцій φ, для яких неперервні похідні $D^\alpha\varphi$ з $|\alpha| \le [k]$ та (при нецілому k) скінченні $\sum\limits_{|\alpha|=[k]} \sup\limits_{x,y\in\overline{\Omega},x\ne y} \frac{\Delta_x^y D_x^\alpha \varphi(x)}{|x-y|^{k-[k]}}$, де $\Delta_x^y\psi(x) = \psi(y) - \psi(x)$, $[k]$ – ціла частина числа k,

$\mathcal{H}^k(\overline{Q}_i) = C^k(\overline{Q}_i)$ – простір Гельдера ([2], [10]) функцій φ, для яких неперервні похідні $D^{\overline{\alpha}}\varphi = D_t^{\alpha_0} D_x^\alpha \varphi$ з $|\overline{\alpha}| = |\alpha| + 2b\alpha_0 \le [k]$ та (при нецілому k) скінченні

$$\sum_{|\overline{\alpha}|=[k]} \sup_{(x,t),(y,\tau)\in\overline{Q}_i, x\ne y} \frac{\Delta_x^y D_{x,t}^{\overline{\alpha}} \varphi(x,t)}{|x-y|^{k-[k]}}, \qquad \sum_{0<k-|\overline{\alpha}|<2b} \sup_{(x,t),(y,\tau)\in\overline{Q}_i, t\ne \tau} \frac{\Delta_t^\tau D_{x,t}^{\overline{\alpha}} \varphi(x,t)}{|t-\tau|^{\frac{k-|\overline{\alpha}|}{2b}}},$$

тут $\Delta_t^\tau\psi(x,t) = \psi(x,\tau) - \psi(x,t)$,

$C^{k,(0)}(\overline{Q}_i)(C_0^k(\overline{Q}_i)) = \{\varphi \in C^k(\overline{Q}_i) : D_t^j\varphi\,|_{t=T} = 0\ (D_t^j\varphi\,|_{t=0} = 0), \quad 0 \le j \le [\frac{k}{2b}]\}$,
$\mathcal{H}^{k,r,(0)}(Q_i) = \{\varphi \in \mathcal{H}^{k,(0)}(Q_i) : D^{\overline{\alpha}}\varphi\,|_{\overline{Q}_1} = 0, |\overline{\alpha}| \le 2b-r-2\}$,
$\mathcal{H}^{k,2b-1,(0)}(Q_i) = \mathcal{H}^{k,(0)}(Q_i)$, $i = 0,1$,

вводимо при $k \ge 0$

$\mathcal{D}_k(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in C^k(\overline{\Omega}_0)\ (D(\overline{\Omega}_0)$ при цілому k): $\varrho_0^{|\alpha|-k} D^\alpha\varphi \in C(\overline{\Omega}_0), |\alpha| \le [k]\}$,
$\mathcal{D}_k^*(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in C^{k+2b}(\overline{\Omega}_0)\ (D(\overline{\Omega}_0)$ при цілому k): $A^*\varphi \in \mathcal{D}_k(\overline{\Omega}_0)\}$,
$\mathcal{X}_k(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in \mathcal{D}_k^*(\overline{\Omega}_0) : \hat{B}_j(x,0,D_x)\varphi(x) = 0, x \in \overline{\Omega}_1,\ j = \overline{1,m}\}$,
$X(\overline{\Omega}_0) = \{\varphi \in D(\overline{\Omega}_0) : \hat{B}_j(x,0,D_x)\varphi(x) = 0, x \in \overline{\Omega}_1,\ j = \overline{1,m}\}$,
$\mathcal{D}_k(\overline{Q}_0) = \{\varphi \in C^{k,(0)}(\overline{Q}_0)\ (D^0(\overline{Q}_0)$ при цілому k): $\varrho^{|\overline{\alpha}|-k} D^{\overline{\alpha}}\varphi \in C(\overline{Q}_0), |\overline{\alpha}| \le [k]\}$,
$\mathcal{D}_k^*(\overline{Q}_0) = \{\varphi \in C^{k+2b,(0)}(\overline{Q}_0)\ (D^0(\overline{Q}_0)$ при цілому k): $L^*\varphi \in \mathcal{D}_k(\overline{Q}_0)\}$,
$\mathcal{X}_k(\overline{Q}_0) = \{\varphi \in \mathcal{D}_k^*(\overline{Q}_0) : \hat{B}_j(x,t,D_x)\varphi(x,t) = 0, (x,t) \in \overline{Q}_1,\ j = \overline{1,m}\}$,
$X(\overline{Q}_0) = \{\varphi \in D^0(\overline{Q}_0) :\ \hat{B}_j(x,t,D_x)\varphi(x,t) = 0, (x,t) \in \overline{Q}_1,\ j = \overline{1,m}\}$,
$\mathcal{D}_k(\overline{Q}_1) = \{\varphi \in C^{\infty,(0)}(Q_1) \cap C^k(\overline{Q}_1) : \varrho_1^{2b\alpha_0-k} D^{\overline{\alpha}}\varphi \in C(\overline{Q}_1), |\overline{\alpha}| \le k\}$,

а також

$\mathcal{Z}_k(\Omega_0) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega_0)$: $\varrho_0^{|\alpha|-k} D^\alpha\varphi \in C(\overline{\Omega}_0), \quad \forall\ \alpha\}$, $k \in \mathbb{R}$,
$Z_k(\Omega_0) = \{\varphi \in C^\infty(\Omega_0) \cap C^{[k]}(\overline{\Omega}_0)$: $\varrho_0^{|\alpha|-k} D^\alpha\varphi \in C(\overline{\Omega}_0), \quad \forall\ |\alpha| \ge k\}$, $k > 0$,
$Z_{-k}(\Omega_0) = \mathcal{Z}_{-k}(\Omega_0)$,
$\mathcal{Z}_k(Q_i,0) = \{\varphi \in C^{\infty,(0)}(Q_i) : \varrho_1^{\frac{2b\alpha_0-k}{2b}} D^{\overline{\alpha}}\varphi \in C(\overline{Q}_i)\ \forall\ \overline{\alpha}\}$, $k \in \mathbb{R}$,
$Z_k(Q_i,0) = \{\varphi \in C^{\infty,(0)}(Q_1) \cap C^{[k]}(\overline{Q}_i) : \varrho_1^{\frac{2b\alpha_0-k}{2b}} D^{\overline{\alpha}}\varphi \in C(\overline{Q}_i)\ \forall\ |\overline{\alpha}| \ge k\}$, $k > 0$,
$Z_{-k}(Q_i,0) = \mathcal{Z}_{-k}(Q_i,0)$, $k \ge 0$, $i = 0,1$,
$Z_k^*(\overline{Q}_0,0) = \{\varphi \in Z_{k+2b}(\overline{Q}_0,0) : L^*\varphi \in \mathcal{Z}_k(\overline{Q}_0,0)\}$,
$X_k(\overline{Q}_0,0) = \{\varphi \in Z_k^*(\overline{Q}_0,0) : \hat{C}_j\varphi \in Z_{k+r_j+1}(Q_1,0),\ \hat{B}_j\varphi = 0,\ j = \overline{1,m}\}$, $k \ge 0$.

Скажемо, що $\varphi_\nu \to 0$ при $\nu \to \infty$ в $\mathcal{D}_k(\overline{Q}_i)$, якщо для довільного мультиіндексу $\overline{\alpha}$, $|\overline{\alpha}| \le k$ послідовність $\tilde{\varphi}_\nu = \varrho^{|\overline{\alpha}|-k} D^{\overline{\alpha}}\varphi_\nu$ збігається до нуля при $\nu \to \infty$ рівномірно в $\overline{Q}_i$. Подібно визначають збіжність у інших просторах.

Лема 1. *Для довільних чисел* $r \geq 0$, $\varphi_j \in D(Q_1)$ *(відповідно* $\varphi_j \in \mathcal{D}_{r+2b-j}(\overline{Q}_1)$, $\varphi_j \in Z_{r+2b-j}(Q_1, 0)$*),* $j = \overline{0, 2b-1}$, $\psi_0 \in D(\Omega_0)$ *(*$\psi_0 \in \mathcal{D}_{r+2b}(\Omega_0)$, $\psi_0 \in Z_{r+2b}(\Omega_0)$*), довільної матриці Діріхле* $\tilde{B}(x, t, D_x)$ *з коефіцієнтами з* $D(\overline{Q}_1)$ *існує така вектор-функція* $\psi \in \mathcal{D}^*_r(\overline{Q}_0)$ *(відповідно* $\psi \in \mathcal{D}^*_r(\overline{Q}_0)$, $\psi \in Z^*_r(\overline{Q}_0, 0)$*), що* $\tilde{B}_j\psi = \varphi_j$, $j = \overline{0, 2b-1}$ *і* $\psi\mid_{t=0} = \psi_0$.

Лему доводять за схемою доведення леми 4.3 із [5] (див. також [11]), де розглянуто випадок $\varphi_j \in D^0(\overline{Q}_1)$, $j = \overline{0, 2b-1}$, $\psi_0 \in D(\Omega_0)$.

З леми 1 випливає, що простори $\mathcal{X}_k(\overline{Q}_0)$, $\mathcal{X}_k(\overline{Q}_0, 0)$ непорожні при $k \geq 0$.

С.Д. Івасишен ([3] та бібліогр.) побудував матрицю Гріна

$$G(x, t, y, \tau) = \big(G_0(x, t, y, \tau), \ldots, G_m(x, t, y, \tau)\big)$$

задачі (1)-(3), вивчив її властивості, властивості інтегральних операторів Гріна

$$\mathcal{G}_j\varphi = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_j} G_j(\cdot, *, y, \tau)\varphi(y, \tau)dy, \quad j = \overline{0, m}, \quad \mathcal{G}_{m+1}\varphi = \int_{\Omega_0} G_0(\cdot, *, y, 0)\varphi(y)dy,$$

спряжених операторів Гріна [2]

$$\hat{\mathcal{G}}_j\varphi = \int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} G'_j(x, t, \cdot, *)\varphi(x, t)dx,\ j = \overline{0, m}, \quad \hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi = \int_0^T dt \int_{\Omega_0} G'_0(x, t, \cdot, 0)\varphi(x, t)dx$$

на гельдерових просторах функцій (для довільних достатньо гладких f, φ

$$(\mathcal{G}_0 f, \varphi)_0 = (f, \hat{\mathcal{G}}_0\varphi)_0, \quad (\mathcal{G}_j f, \varphi)_1 = (f, \hat{\mathcal{G}}_j\varphi)_1, \quad j = \overline{1, m},$$

де $(f, \varphi)_i = \int_0^T dt \int_{\Omega_{(i)}} \varphi' f dx$, $i = 0, 1$); доведено, що

$$\hat{\mathcal{G}}_0 : \mathcal{H}^{k,(0)}(Q_0) \to \mathcal{H}^{k+2b, r_1, (0)}(Q_0) \subset \mathcal{H}^{k,(0)}(\overline{Q}_0),$$

$$\hat{\mathcal{G}}_j : \mathcal{H}^{k,(0)}(Q_0) \to \mathcal{H}^{k+r_j+1,(0)}(Q_1) \text{ при } j = \overline{1, m} \text{ та обмежені;}$$

доведено теореми існування та єдиності розв'язків у гельдерових просторах узагальнених функцій, здобуто зображення розв'язків за допомогою матриці Гріна. Для гладких $F_j = f_j$, $j = \overline{0, m+1}$, що задовольняють умови узгодження, зокрема для $f_j \in D(Q_j)$, $j = \overline{0, m}$, $f_{m+1} \in D(Q_2)$ розв'язок задачі (1)-(3) набув вигляду [2]

$$u(x, t) = \int_0^t d\tau \int_{\Omega_0} G_0(x, t, y, \tau) f_0(y, \tau)dy +$$

$$+ \sum_{j=1}^m \int_0^t d\tau \int_{\Omega_1} G_j(x, t, y, \tau) f_j(y, \tau)dy + \int_{\Omega_0} G_0(x, t, y, 0) f_{m+1}(y)dy, \quad (x, t) \in Q_0.$$

У [4] доведено, що при довільній $\psi \in C^{2b,1}_{x,t}(\overline{Q}_0)$, такій що $\hat{B}_j\psi = 0$, $j = \overline{1, m}$, зокрема $\psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, правильні співвідношення

$$\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} G'_0(x, t, y, \tau)(L^*\psi)(x, t)dx = \psi(y, \tau), \quad (y, \tau) \in \overline{Q}_0,$$

$$\int_\tau^T dt \int_{\Omega_0} G'_j(x, t, y, \tau)(L^*\psi)(x, t)dx = (\hat{C}_j\psi)(y, \tau), \quad (y, \tau) \in \overline{Q}_1, \quad j = \overline{1, m}. \qquad (4)$$

Лема 2. $\hat{\mathcal{G}}_0 : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, $\mathcal{Z}_r(Q_0, 0) \to Z_{r+2b}(Q_0, 0)$,
$\hat{\mathcal{G}}_j : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to C^{r+r_j-1,(0)}(\overline{Q}_1)$, $\mathcal{Z}_r(Q_0, 0) \to Z_{r+r_j+1}(Q_1, 0)$, $j = \overline{1, m}$,
$\hat{\mathcal{G}}_{m+1} : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to \mathcal{X}_r(\overline{\Omega}_0)$, $\mathcal{Z}_r(Q_0, 0) \to Z_{r+2b}(\Omega_0)$, $r \geq 0$.

Доведення. Спряжена до задачі (1)-(3) крайова задача є також нормальною й обернено параболічною (теорема 6 [3, с. 179]).

З однозначної розв'язності спряженої параболічної крайової задачі в класах гладких функцій випливає, що для довільної $\varphi \in \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0)$ існує розв'язок $\psi = (\hat{\mathcal{G}}_0\varphi) \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$ системи $L^*\psi = \varphi$, тому з використанням формул (4), леми 1 та результатів [2] одержуємо $\hat{\mathcal{G}}_0 : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, $\hat{\mathcal{G}}_j : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to C^{[r]+r_j-1,(0)}(\overline{Q}_1)$, $j = \overline{1, m}$, $\hat{\mathcal{G}}_{m+1} : \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \to \mathcal{X}_r(\overline{\Omega}_0)$.

При $\varphi \in \mathcal{Z}_r(Q_0, 0)$ використовуємо оцінки [3, с. 120] (та означення [3, с. 16])

$$\left|D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau} G_{0ik}(x, t, y, \tau)\right| \leq C d^{-n-|\overline{\alpha}|}(x, t, y, \tau) E_c(t - \tau, d(x, t, y, \tau)), \tag{5}$$

$$\left|D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau} G_{jk}(x, t, y, \tau)\right| \leq C d^{-\lambda_j}(x, t, y, \tau) E_c(t - \tau, d(x, t, y, \tau)), \quad i, k = \overline{1, p},$$

де $\lambda_j = n + 2b - r_j - (j) + |\overline{\alpha}|$, $j = \overline{1, m}$,

$$E_c(t, z) = \exp\Big(- C\Big(\frac{z^{2b}}{t}\Big)^{\frac{1}{2b-1}}\Big),$$

$d(x, t, y, \tau) = (|x - y|^2 + |t - \tau|^{\frac{1}{b}})^{\frac{1}{2}}$ – параболічна відстань між точками (x, t) та $(y, \tau) \in \overline{Q}_0$, G_{0ik}, G_{jk} $(i, k = \overline{1, p}$ – компоненти, відповідно, матриці G_0 та вектор-функцій G_j, $j = \overline{1, m})$.

Виконуючи в інтегралах $D^{\overline{\alpha}}\mathcal{G}_j\varphi$ заміну $x_i - y_i = (t - \tau)^{\frac{1}{2b}} \xi_i^{\frac{2b-1}{2b}}$, $i = \overline{1, n}$, а при $|\overline{\alpha}| > r + r_i + (j)$ ще й "перекидання" похідних на φ, як у [9], одержуємо
$(D^{\overline{\alpha}}\hat{\mathcal{G}}_j\varphi)(y, \tau) = O(\tau^{\frac{r+r_j+(j)-|\overline{\alpha}|}{2b}})$ при $\tau \to 0$, $y \in \overline{\Omega}_0$, $j = \overline{0, m+1}$,
$(D^{\alpha}\hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi)(y, 0) = O(\varrho_0^{r+2b-|\alpha|} + 1)$ при $d(y) \to 0$, $y \in \overline{\Omega}_0$. □

2. Формулювання узагальненої нормальної параболічної крайової задачі. Теорема існування та єдиності. Нехай V' – простір лінійних неперервних функціоналів (узагальнених функцій чи вектор-функцій) на V, $(\varphi, F)_i = \sum\limits_{j=1}^{p} (\varphi_j, F_j)_i$ – значення узагальненої вектор-функції $F = (F_1, \ldots, F_p) \in V'(\overline{Q}_i)$ на основній вектор-функції $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_p) \in V(\overline{Q}_i)$, $i = \overline{0, 2}$, $s(F)$ – порядок сингулярності узагальненої функції F [12], [13], $s(F) = \max\limits_{1\leq j\leq p} s(F_j)$ при $F = (F_1, \ldots, F_p)$,
$|g|_p = |g_1| + \cdots + |g_p|$ для вектор-функції $g = (g_1, \ldots, g_p)$.

Припущення:
(**Fp**) $F_j \in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $s(F_j) \leq s_j$, $j = \overline{1, m}$, $r \geq s' - 1$, де $s' = \max\limits_{1\leq j\leq m}(s_j - r_j)$, $F_0 \in \mathcal{X}'_r(\overline{Q}_0)$, $F_{m+1} \in \mathcal{X}'_r(\overline{Q}_2)$;
(**Fp0**) $F_0 \in X'(\overline{Q}_0)$, $F_j \in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $j = \overline{1, m}$, $F_{m+1} \in D'(\overline{Q}_2)$,
(**Zp0**) $F_0 \in Z'_{k_0}(Q_0, 0)$, $F_j \in Z'_{k_j}(Q_1, 0)$, $j = \overline{1, m}$, $F_{m+1} \in Z'_{k_{m+1}}(Q_2)$, $r > s_0 = \max\limits_{0\leq j\leq m+1}(k_j - r_j - (j))$.

Перше формулювання задачі (1)-(3). За припущенням (**Fp**) (відповідно (**Fp0**), (**Zp0**)) знайти таку узагальнену вектор-функцію $u \in \mathcal{D}'_r(\overline{Q}_0)$ (відповідно $u \in D^{0\prime}(\overline{Q}_0)$, $u \in \mathcal{Z}'_r(Q_0, 0)$), що

$$(L^*\psi, u)_0 = (\psi, F)_0 + \sum_{j=1}^{m} (\hat{C}_j\psi, F_j)_1 + (\psi\mid_{t=0}, F_{m+1})_2$$

$$\forall\, \psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0) \quad (\forall\, \psi \in X(\overline{Q}_0), \quad \forall\, \psi \in X_r(\overline{Q}_0, 0)). \tag{6}$$

Теорема 1. *За припущенням (*__Fp__*) ((*__Fp0__*), (*__Zp0__*)) вектор-функція u, задана формулою*

$$(\varphi, u)_0 = (\hat{\mathcal{G}}_0\varphi, F_0)_0 + \sum_{j=1}^{m} (\hat{\mathcal{G}}_j\varphi, F_j)_1 + (\hat{\mathcal{G}}_{m+1}\varphi, F_{m+1})_2$$

$$\forall\, \varphi \in \mathcal{D}_r(\overline{Q}_0) \quad (\forall\, \varphi \in D^0(\overline{Q}_0), \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{Z}_r(Q_0, 0)), \tag{7}$$

є єдиним розв'язком задачі (1)-(3).

Теорему доводять за схемою доведення теореми з [4] із врахуванням леми 2.

3. Про узагальнені початкові та крайові значення регулярних розв'язків. При регулярній F_0 можна по-іншому сформулювати задачу, надавши певного сенсу виконанню умов (2) та (3) для її розв'язку.

Нехай $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_{10})$, $\Omega_{1\varepsilon}$ – паралельна до Ω_1 поверхня, $\Omega_{0\varepsilon} = \Omega_\varepsilon$ – підобласть Ω_0 з межею $\Omega_{1\varepsilon}$; $Q_{i\varepsilon\varepsilon_1} = \Omega_{i\varepsilon} \times (\varepsilon_1, T]$, $i = 0, 1$; при $\varphi \in D(Q_1)$ визначаємо $\varphi(x_\varepsilon, t) = \varphi(x, t)$, якщо $(x_\varepsilon, t) \in Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}$ (тобто $x_\varepsilon = x + \varepsilon\nu(x)$, $x \in \Omega_1$, $t \in (\varepsilon_1, T]$) при $\varepsilon \in (0, \frac{\varepsilon_0}{2})$, $\varepsilon_1 \in (0, \frac{\varepsilon_{10}}{2})$, $\varphi(x_\varepsilon, t) = 0$, якщо $(x_\varepsilon, t) \in Q_{0\varepsilon_0\varepsilon_{10}}$.

Означення. Регулярна в Q_0 вектор-функція u набуває узагальнених крайових значень $F \in D'(Q_1)$, якщо існує

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi'(x_\varepsilon, t)u(x_\varepsilon, t)dQ_1 = (\varphi, F)_1 \quad \forall\, \varphi \in D(Q_1), \tag{8}$$

набуває узагальнених початкових значень $F \in D'(\Omega_0)$, якщо існує

$$\lim_{\varepsilon,t \to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \varphi'(x)u(x, t)dx = (\varphi, F)_2 \quad \forall\, \varphi \in D(\Omega_0). \tag{9}$$

Нехай

$$M_r(Q_0) = \Big\{ v \in L_{1,loc}(Q_0) \quad : \quad \int\limits_{Q_0} \varrho^r(x,t)|v_j(x,t)|dx < +\infty, \quad j = \overline{1,p} \Big\},$$

$\{\tilde{B}_j(x, t, D)\}_{j=\overline{0,2b-1}}$ – матриця Діріхле порядку $2b$ з коефіцієнтами з $D(\overline{Q}_1)$,

$\overline{r}$ – найменше ціле число $\geq r$.

Теорема 2. *Якщо $F_0 \in L_1(Q_0) \cap C(Q_0)$, $u \in M_r(Q_0) \cap C^{2b,1}_{x,t}(Q_0)$ – розв'язок системи (1) в Q_0, $r \geq 0$, то*

(i) u набуває узагальнених початкових значень з $\mathcal{D}'_{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$ (з $D'(\Omega_0)$ порядку сингулярності $\leq \overline{r} + 2b$) та $\tilde{B}_j u$ набувають на Q_1 узагальнених крайових значень з $\mathcal{D}'_{r+j+1}(\overline{Q}_1)$ (із $D'(Q_1)$ порядків сингулярностей $\leq \overline{r} + j$), $j = \overline{0, 2b-1}$.

Якщо виконується (i) для розв'язку $u \in M_r(Q_0) \cap C^{2b,1}_{x,t}(Q_0)$ *системи (1) в* Q_0 *при* $F_0 \in C(Q_0)$, *то* $u \in M_r(\overline{Q}_0)$ *тоді й тільки тоді, коли* $\int_{Q_0} \psi F_0\, dxdt$ *скінченний для всіх* $\psi \in \mathcal{D}^*_r(\overline{Q}_0)$.

Для розв'язку $u \in M_r(Q_0) \cap C^{2b,1}_{x,t}(Q_0)$ *системи (1) в* Q_0 *при* $F_0 \in C(Q_0)$ *та деякому* $r \geq 0$ *кожні дві з трьох наступних умов зумовлюють виконання третьої:*

виконується (i) при $j = \overline{0, b-1}$;

$u \in M_r(Q_0)$;

$\int_{Q_0} \varrho^b(x,t)|F_0(x,t)|dxdt < +\infty$.

Доведення. Побудуємо покриття $\{U_j\}_{j=1}^{\hat{p}}$ частини Q^* циліндра $\overline{Q}_0$, що прилягає до $\overline{Q}_1 \cup \overline{\Omega}_0$, $n+1$-вимірними околами U_j. Одночасно одержимо покриття $\{V_j\}_{j=1}^{\hat{p}}$ бічної поверхні Q_1 n-вимірними околами. Межа Q^* складається з $\overline{Q}_1 \cup \overline{\Omega}_0$ та поверхні $\tilde{Q}_1 \cup \{t = \varepsilon_1\}$ в Q_0. Частину області Q^* між цією поверхнею та $Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}$ позначимо через $Q^*_{\varepsilon\varepsilon_1}$. В кожному околі U_j введемо випрямляючу локальну систему координат $(\xi^{(j)}, t) = (\xi'^{(j)}, \xi^{(j)}_n, t) = (\xi^{(j)}_1, \ldots, \xi^{(j)}_{n-1}, \xi^{(j)}_n, t)$ з початком у деякій точці $V_j = Q_1 \cap U_j$ та віссю ξ_n у напрямі внутрішньої нормалі до Q_1 у цій точці.

Нехай $\{e^{(l)}(x)\}$ – відповідне покриттю $\{V_l\}_{l=1}^{\hat{p}}$ розкладення одиниці. В області $Q^*_{0\varepsilon\varepsilon_1} = Q_{0\varepsilon\varepsilon_1} \setminus \overline{Q}_{0\varepsilon_0\varepsilon_{10}}$ $(\varepsilon \in (0, \varepsilon_0),\ \varepsilon_1 \in (0, \varepsilon_{10}))$ запишемо формулу Гріна

$$\int\limits_{Q^*_{0\varepsilon\varepsilon_1}} (L^*\Phi_{\varepsilon,\varepsilon_1})' u dxdt - \int\limits_{Q^*_{0\varepsilon\varepsilon_1}} \Phi'_{\varepsilon,\varepsilon_1} F_0 dxdt = \sum_{j=0}^{2b-1} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1} \cup Q_{1\varepsilon_0\varepsilon_{10}}} \tilde{C}_j \Phi_{\varepsilon,\varepsilon_1} \cdot \tilde{B}_j u dxdt \qquad (10)$$

для розв'язку $u \in C^{2b,1}_{x,t}(Q_0) \cap M_r(Q_0)$ системи (1) та вектор-функції $\Phi_{\varepsilon,\varepsilon_1}$, яка в крайовому координатному околі U_l у випрямляючих локальних координатах має вигляд $\Phi^{(l)}_{\varepsilon,\varepsilon_1} = \sum\limits_{i=0}^{2b+\overline{r}-1} (\xi^{(l)}_n - \varepsilon)^i \varphi^{(l)}_i(\xi'_{(l)}, \varepsilon)$, де $\varphi^{(l)}_i = e^{(l)} \varphi_i$, φ_i – довільні вектор-функції з $D(V_l)$, $i = 0, 1, \ldots, 2b-1$, $\varphi_{2b}, \varphi_{2b+1}, \ldots, \varphi_{2b+\overline{r}-1} \in D(V_l)$, $j = \overline{0, 2b+\overline{r}-1}$ і такі, що $L^*\Phi^{(l)}_{\varepsilon,\varepsilon_1} = \xi^r_n \tilde{\varphi}$, $\tilde{\varphi} \in C(U_l)$ (їхнє існування випливає з леми 4.1 [5] для оператора L^*).

Підінтегральний вираз першого доданку в лівій частині (10) дорівнює $(\xi_n - \varepsilon)^r$ $\hat{\varphi}'(\xi', \xi_n - \varepsilon, t) u$, вектор-функція $\hat{\varphi}$ обмежена при достатньо малих значеннях $\xi_n - \varepsilon$, тому згідно з умовою $u \in M_r(Q_0)$ існує границя при $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$ цього доданку, яка з використанням леми з [13, с. 70] дорівнює $\int\limits_{Q^*_0} \varrho^r(x) \varphi'(x,t) u(x,t) dxdt$, де $Q^*_0 = Q_0 \setminus \overline{Q}_{0\varepsilon_0\varepsilon_{10}}$, φ обмежена та з компактним носієм у $\Omega_0 \times (0, T]$. Також існує $\Phi^{(l)} = \lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \Phi^{(l)}_{\varepsilon,\varepsilon_1} \in D(U_l)$. За припущенням теореми щодо F_0 існує $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \int\limits_{Q^*_{0\varepsilon\varepsilon_1}} \Phi'_{\varepsilon,\varepsilon_1} F_0 dxdt = \int\limits_{Q^*_0} \Phi' F_0 dxdt$. Тоді існує також границя правої частини (10), яка за лемою з [13, с. 70] дорівнює $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1 \to 0} \sum\limits_{j=0}^{2b-1} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1} \cup Q_{1\varepsilon_0\varepsilon_{10}}} (\tilde{C}_j \Phi)' \cdot \tilde{B}_j u dxdt$.

Вибираючи по черзі відмінною від нуля лише одну з вектор-функцій $\varphi_0, \ldots, \varphi_{2b-1}$, з існування границі всієї правої частини (10) при $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$ одержуємо існування кожної з границь $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi'(x,t)(\tilde{B}_j u)(x,t)dxdt$, зокрема границь

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi B_j u dxdt, \quad \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi C_j u dxdt \quad \forall\, \varphi \in D(Q_1).$$

Враховуючи знайдену при доведенні леми 4.1 із [5] (див також лему 1 із [11]) лінійну залежність функції Φ від $\varphi_0, \ldots, \varphi_{2b-1}$ та їхніх похідних (відповідно до порядків $2b+\overline{r}-1, \ldots, \overline{r}$), одержуємо, що $\tilde{B}_j u$ мають узагальнені крайові значення $\tilde{F}_j$ з $D(Q_1)$ порядків сингулярностей $\leq \overline{r}+j$, $j=\overline{0,2b-1}$. Зокрема, $B_j u$, $C_j u$ набувають на Q_1 деяких узагальнених крайових значень відповідно $F_j, F_j^c \in D(Q_1)$ порядків сингулярностей $s(F_j) \leq \overline{r}+r_j$, $s(F_j^c) \leq \overline{r}+m_j$, $j=\overline{1,m}$.

Вибираючи вектор-функції $\varphi_j \in \mathcal{D}_{r+2b-j}(\overline{Q}_1)$, $j=\overline{0,2b-1}$, як вище знаходимо $\varphi_{2b+j} \in \mathcal{D}_{r+2b-j}(\overline{Q}_1)$, $j=\overline{0,\overline{r}-1}$ і таку $\psi = \Phi \in \mathcal{D}_r^*(\overline{Q}_0)$, що $\psi\,|_{t=0} = 0$, $\tilde{C}_j \psi = \varphi_{2b-j-1} \in \mathcal{D}_{r+j+1}(\overline{Q}_1)$. Подібно до попереднього одержуємо існування

$$(\varphi, \tilde{F}_j)_1 = \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi'(x,t)(\tilde{B}_j u)(x,t)dxdt \text{ для кожної } \varphi \in \mathcal{D}_{r+j+1}(\overline{Q}_1),$$

тобто існування $\tilde{F}_j \in \mathcal{D}'_{r+j+1}(\overline{Q}_1)$, зокрема, $B_j u \in \mathcal{D}_{r+r_j+1}(\overline{Q}_1)$, $C_j u \in \mathcal{D}_{r+m_j+1}(\overline{Q}_1)$.

Запишемо формулу Гріна в області $\tilde{Q}^*_{0\varepsilon\varepsilon_1} = \Omega_\varepsilon \times (\varepsilon_1, \varepsilon_{01})$ для розв'язку $u \in C^{2b,1}_{x,t}(Q_0) \cap M_r(Q_0)$ системи (1) та вектор-функції $\Psi = \sum\limits_{i=0}^{q} (t-\varepsilon_1)^i \psi_i(x)\eta_1(t)$, де $q = \overline{(\frac{r}{2b})}$, $\eta_1 \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$, $\eta_1(t) = 1$ при $t \in [0, \frac{\varepsilon_{01}}{3}]$, $\eta_1(t) = 0$ при $t \geq \frac{2\varepsilon_{01}}{3}$, $\eta_1(t) \leq 1$, ψ_0 – довільну вектор-функцію з $D(\Omega_0)$, $\psi_1, \ldots, \psi_q$ вибирають за лемою 4.2 [5] для оператора L^*:

$$\int\limits_{\tilde{Q}^*_{0\varepsilon\varepsilon_1}} t^{\frac{r}{2b}} \tilde{\psi}'(x,t)u(x,t)dxdt - \int\limits_{\tilde{Q}^*_{0\varepsilon\varepsilon_1}} \Psi' F_0 dxdt + \tag{11}$$

$$+\sum_{j=0}^{2b-1} \int\limits_{\tilde{Q}^*_{1\varepsilon\varepsilon_1}} [(\tilde{C}\Psi)'(x,t) \cdot (\tilde{B}_j u)(x,t)dxdt = -\int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \Psi'(x,\varepsilon_1)u(x,\varepsilon_1)dx.$$

Тут $\tilde{Q}^*_{1\varepsilon\varepsilon_1} = S_\varepsilon \times (\varepsilon_1, \varepsilon_{01})$, $\tilde{\psi}$ – обмежена функція з компактним носієм у $\tilde{Q}^*_0 = S \times [0, \varepsilon_{10}]$. За умовами теореми та визначеним вище існуванням узагальнених крайових значень $\tilde{B}_j u$, $j=\overline{0,2b-1}$ існує границя при $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$ лівої частини (11). Тоді з (11) випливає існування $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \Psi'(x,\varepsilon_1)u(x,\varepsilon_1)dx$. За лемою з [13, с. 70] цей вираз дорівнює $\lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \psi_0'(x)u(x,\varepsilon_1)dx$.

Нехай F_{m+1}– функціонал на $D(\Omega_0)$, визначений формулою

$$(\psi_0, F_{m+1})_2 = \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \psi_0'(x)u(x,\varepsilon_1)dx, \quad \psi_0 \in D(\Omega_0). \tag{12}$$

З (11), враховуючи лему з [13, с. 70], одержуємо

$$|(\psi_0, F_{m+1})_2| \le |\int\limits_{\tilde{Q}_0^*} t^{\frac{r}{2b}} \tilde{\psi}'(x,t)u(x,t)dxdt| + |\int\limits_{\tilde{Q}_0^*} \Psi' F_0 dxdt| + \sum_{j=0}^{2b-1} |(\tilde{C}_j \Psi, \tilde{F}_j)_1|.$$

З доведення леми 4.2 з [5] випливає оцінка $|\tilde{\psi}(x,t)| \le C \sup\limits_{x\in\Omega_0, |\alpha|\le s} |D^\alpha \psi_0(x)|$, де $s = 2b\overline{(\frac{r}{2b})} + 2b \le \overline{r} + 2b$; $\sum\limits_{j=1}^{m} (\tilde{C}_j \Psi, \tilde{F}_j)_1$ також є лінійною функцією ψ_0 та її похідних до порядку $\overline{r}+2b$. Тому F_{m+1} – лінійний неперервний функціонал на $D(\Omega_0)$, $s(F_{m+1}) \le 2b + \overline{r}$.

Вибираючи $\psi_0 \in \mathcal{D}_{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$, як вище знаходимо $\psi_i \in \mathcal{D}_{r+2b(1-i)}(\overline{\Omega}_0)$, $i = 1, \ldots, \overline{(\frac{r}{2b})}$ та $\Psi \in \mathcal{D}_r^*(\overline{Q}_0)$. Отже, функціонал (12) належить $\mathcal{D}'_{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$.

Друге твердження теореми випливає з рівності (10).

При $\Phi_\varepsilon(\xi) = \sum\limits_{i=b}^{2b+\overline{r}-1} (\xi_n - \varepsilon)^i \varphi_i(\xi', \varepsilon)$ у формулах (10), (11) матимемо відмінними від нуля доданки тільки при $j = \overline{b, 2b + r - 1}$ і

$$|\Phi(\xi', \xi_n)| \le C\xi_n^b \cdot \sum_{|k|\le 2b+\overline{r}-p-1} \sup_{\xi'\subset S} |(\tfrac{\partial}{\partial \xi'})^k \varphi_p(\xi')|, \quad p = \overline{b, 2b-1}.$$

Тому аналогічно одержуємо третє твердження теореми. □

Зауваження 1. Теорема правильна при заміні $\mathcal{D}'_{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$ на $Z'_{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$, $\mathcal{D}'_{r+j+1}(\overline{Q}_1)$ на $Z'_{r+j+1}(Q_1, 0)$, відповідно, $\mathcal{D}_r^*(Q_0)$ на $Z_r^*(Q_0, 0)$.

Припущення:

F': $F_0 \in \mathcal{H}^\gamma(Q_0) \cap L_1(Q_0)$, $\gamma \in (0,1)$, $F_j \in D'(Q_1)$, $j = \overline{1,m}$, $F_{m+1} \in D'(Q_2)$, $s(F_j) \le s_j$, $j = \overline{1, m+1}$, $r \ge s_0' = \max\limits_{1\le j\le m+1} (s_j - r_j - (j))$;

F: $F_0 \in \mathcal{H}^\gamma(Q_0) \cap L_1(Q_0)$, $\gamma \in (0,1)$, $F_1, \ldots, F_m \in D^{0\prime}(\overline{Q}_1)$, $F_{m+1} \in D^{0\prime}(\overline{Q}_2)$, $s(F_j) \le s_j$, $j = \overline{1, m+1}$, $r \ge s_0'$;

Fr: $F_0 \in \mathcal{H}^\gamma(Q_0) \cap L_1(Q_0)$, $\gamma \in (0,1)$, $r \ge 0$, $F_j \in \mathcal{D}'_{r+r_j+1}(\overline{Q}_1)$, $j = \overline{1,m}$, $F_{m+1} \in \mathcal{X}'_r(\overline{Q}_2)$ ($F_j \in D^{0\prime}(\overline{Q}_{(j)})$, $s(F_j) \le [r] + r_j + (j)$, $j = \overline{1, m+1}$);

Zr: $F_0 \in \mathcal{H}^\gamma(Q_0) \cap L_1(Q_0)$, $\gamma \in (0,1)$, $r \ge 0$, $F_j \in \mathcal{Z}'_{r+r_j+1}(\overline{Q}_1, 0)$, $j = \overline{1,m}$, $F_{m+1} \in Z'_{r+2b}(\overline{Q}_2)$.

Друге формулювання задачі (1)-(3). Нехай виконано одне з припущень **F'**, **F**, **Fr**, **Zr**. Знайти в області Q_0 розв'язок $u \in C_{x,t}^{2b,1}(Q_0) \cap M_r(\overline{Q}_0)$ системи (1), який набуває узагальнених початкових значень F_{m+1} (задовольняє умову (3) в сенсі (9)), а $B_j u$ набувають узагальнених крайових значень F_j, тобто

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi(x,t) B_j u(x,t) dQ_1 = (\varphi, F_j)_1 \quad \forall\, \varphi \in D(Q_1). \tag{13}$$

Теорема 3. *За кожного з припущень* **F**, **Fr**, **Zr** *розв'язок* $u \in C_{x,t}^{2b,1}(Q_0) \cap M_r(\overline{Q}_0)$ *задачі (1)-(3) у першому формулюванні є її розв'язком у другому формулюванні й навпаки.*

Доведення. Вважаємо виконаним припущення **Fr**. В інших випадках доведення аналогічне.

Нехай $u \in C^{2b,1}_{x,t}(Q_0) \cap M_r(\overline{Q}_0)$ – розв'язок задачі в другому формулюванні, тобто є розв'язком задачі (1),(9),(13). Запишемо формулу Гріна для u та довільної $\psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$ в області $Q_{0\varepsilon\varepsilon_1}$

$$\int\limits_{Q_{0\varepsilon\varepsilon_1}} (L^*\psi)' u dxdt - \int\limits_{Q_{0\varepsilon\varepsilon_1}} \psi' F_0 dxdt = \tag{14}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \left[\hat{C}_j\psi B_j u - \hat{B}_j\psi C_j u\right] dxdt + \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \psi(x,\varepsilon_1) u(x,\varepsilon_1) dx.$$

За припущенням теореми та за теоремою 2 існують границі при $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$ кожного з доданків (14). Переходячи в (14) до границі, коли $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$, застосовуючи до правої частини лему з [13, с. 70], умови (9), (13), одержимо

$$\int\limits_{Q_0} (L^*\psi)' u dxdt - \int\limits_{Q_0} \psi' F_0 dxdt =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \left(\lim_{\varepsilon\to 0} \left(\hat{C}_j\psi(x_\varepsilon,t)\right) \cdot B_j u(x_\varepsilon,t) dxdt - \right.$$
$$- \sum_{j=1}^{m} \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \left(\lim_{\varepsilon\to 0} (\hat{B}_j\psi)(x_\varepsilon,t)\right) \cdot C_j u(x_\varepsilon,t) dxdt +$$
$$+ \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \left(\lim_{\varepsilon_1\to 0} \psi'(x,\varepsilon_1)\right) u(x,\varepsilon_1) dx =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} (\hat{C}_j\psi)(x,t)\big)(B_j u)(x,t) dxdt + \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \psi'(x,0) u(x,\varepsilon_1) dx =$$
$$= \sum_{j=1}^{m} (\hat{C}_j\psi, F_j)_1 + (\psi(y,0), F_{m+1}(y))_2,$$

що й треба було довести – u задовольняє тотожність (6) для довільної $\psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$.

Навпаки, якщо $u \in C^{2b,1}_{x,t}(Q_0) \cap M_r(\overline{Q}_0)$ – розв'язок задачі в першому формулюванні, тобто задовольняє тотожність (6) для довільної $\psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, то, зокрема, для $\psi \in D(Q_0)$ з (6) отримаємо $\int\limits_{\overline{Q}_0} (L^*\psi)' u dxdt - \int\limits_{\overline{Q}_0} \psi' F_0 dxdt = 0$. За гіпоеліптичністю оператора L, u – класичний розв'язок системи (1) в Q_0. З леми 1 випливає, що для довільних $\varphi_j \in \mathcal{D}_{r+2b-r_j-1}(\overline{Q}_1)$ $(D(Q_1))$, $j = \overline{1,m}$, $\varphi_{m+1} \in \mathcal{X}_r(\overline{\Omega}_0)$ $(D(\Omega_0))$ існує така $\psi \in \mathcal{X}_r(\overline{Q}_0)$, що $\hat{C}_j\psi(x_\varepsilon,t) \to \varphi_j(x,t)$ при $\varepsilon \to 0$, $j = \overline{1,m}$, $\psi(x,0) = \varphi_{m+1}(x)$, $x \in \overline{\Omega}_0$. Для такої ψ існує $(L^*\psi, u)_0 = \lim\limits_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{Q_{0\varepsilon\varepsilon_1}} (L^*\psi)' u dxdt$, за теоремою 2 $B_j u$ набуває на $\overline{Q}_1$ деяких узагальнених крайових значень з $\mathcal{D}'_{r+r_j+1}(\overline{Q}_1)$, а $C_j u$ – з $\mathcal{D}'_{r+m_j+1}(\overline{Q}_1)$ (з $D'(Q_1)$ порядків сингулярностей $\leq \overline{r} + r_j$ та $\leq \overline{r} + m_j$ відповідно), u набуває деяких узагальнених початкових значень з $\mathcal{D}'_{r+2b}(\overline{\Omega}_0)$ (з $D'(\Omega_0)$ порядку сингулярності $\leq \overline{r} + 2b$). Тому існує границя при $\varepsilon, \varepsilon_1 \to 0$ кожного з доданків у (14). Переходячи до границі в (14) та віднімаючи одержану тотожність від (6), отримаємо

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \left[(\hat{C}_j\psi) B_j u - (\hat{B}_j u) C_j u\right] dQ_{1\varepsilon} + \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \psi'(x,\varepsilon_1) u(x,\varepsilon_1) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (\hat{C}_j \psi, F_j)_1 + (\psi(x,0), F_{m+1})_2,$$

а використовуючи лему з [13, с. 70]

$$\lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \sum_{j=1}^{m} \int\limits_{Q_{1\varepsilon\varepsilon_1}} \varphi_j(x,t) B_j u(x,t) dxdt + \lim_{\varepsilon,\varepsilon_1\to 0} \int\limits_{\Omega_{0\varepsilon}} \varphi'_{m+1}(x) u(x,\varepsilon_1) dx =$$

$$= \sum_{j=1}^{m} (\varphi_j, F_j)_1 + (\varphi_{m+1}(x), F_{m+1})_2.$$

Звідси, враховуючи довільність $\varphi_1, \ldots, \varphi_{m+1}$, одержуємо (9) та (13). □

Теорема 4. *За кожного з припущень* **F'**, **F**, **Fr**, **Zr** *вектор-функція*

$$u(x,t) = \int\limits_{\overline{Q}_0} G_0(x,t,y,\tau) F_0(y,\tau) dy d\tau + \tag{15}$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} (G_j(x,t,\cdot,\cdot), F_j)_1 + (G_0(x,t,\cdot,0), F_{m+1})_2, \quad (x,t) \in Q_0$$

є розв'язком класу $C^{2b,1}_{x,t}(Q_0) \cap M_r(Q_0)$ *задачі (1), (9), (13).*

Доведення. За наведеними вище властивостями матриць G_j, $j = \overline{0, m+1}$ вектор-функція (15) є класичним розв'язком системи (1) в Q_0, а з використанням аналога теореми Фубіні ([12, с. 132]), переконуємось, що вона задовольняє умови (9) та (13). Покажемо, що $u \in M_r(Q_0)$. Розглянемо спочатку випадки **F'** та **F**.

За означенням порядку сингулярності узагальненої функції

$$u(x,t) = \int\limits_{\overline{Q}_0} G_0(x,t,y,\tau) F_0(y,\tau) dy d\tau + \sum_{|\alpha| \le s_{m+1}} D^{\alpha}_y \int\limits_{\Omega_0} G_0(x,t,y,0) f_{m+1,\alpha}(y) dy +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| \le s_j} D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau} \int\limits_{Q_1} G_j(x,t,y,\tau) \cdot f_{j,\overline{\alpha}}(y,\tau) dy d\tau,$$

де $f_{j\overline{\alpha}} \in L_1(Q_1)$.

Вище показано обмеженість $\int\limits_{Q_0} \varrho^r(x,t) G_{0ik}(x,t,y,\tau) dxdt$ в $\overline{Q}_0$, $i,k = \overline{1,p}$. Якщо рівномірно за $y \in \overline{Q}_1$, $\tau \in [0,T]$ обмежені $\int\limits_{Q_0} \varrho^r(x,t) \sum\limits_{k=1}^{p} \left| D^{\alpha}_y G_{0ik}(x,t,y,0) \right| dxdt$ та $\int\limits_{Q_0} \varrho^r(x,t) \sum\limits_{k=1}^{p} \left| D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau} G_{jk}(x,t,y,\tau) \right| dxdt$, відповідно для $|\alpha| \le s_{m+1}$, $i,k = \overline{1,p}$, $|\overline{\alpha}| \le s_j$, $j = \overline{1,m}$, то одержимо скінченність

$$\int\limits_{Q_0} \Big(\int\limits_{Q_0} \varrho^r(x,t) \sum_{k=1}^{p} |G_{0ik}(x,t,y,\tau)| dxdt \Big) \left| F_{0k}(y,\tau) \right| dy d\tau +$$

$$\sum_{j=1}^{m} \sum_{|\alpha| \le s_j} \int\limits_{Q_1} \Big(\int\limits_{Q_0} \varrho^r(x,t) \sum_{k=1}^{p} \left| D^{\overline{\alpha}}_{y,\tau} G_{jik}(x,t,y,\tau) \right| dxdt \Big) \left| f_{j\overline{\alpha}k}(y,\tau) \right| dy d\tau +$$

$$\sum_{|\alpha|\le s_{m+1}} \int_{\Omega_0} \Big(\int_{Q_0} \varrho^r(x,t) \sum_{k=1}^{p} \big|D_y^{\alpha} G_{0ik}(x,t,y,0)\big| dxdt\Big) |f_{m+1,\alpha,k}(y)| dy.$$

Враховуючи оцінки (5), одержуємо, що при $r-\lambda_j > -1$ для всіх $|\overline{\alpha}| \le s_j$, $j=\overline{1,m}$, тобто при $r > s_0'$, виконується $u \in M_r(\overline{Q}_0)$.

У випадку припущення **Fr** використовуємо лему 2, за якою

$$\int_{Q_0} \varrho^r(x,t) G_j(x,t,\cdot,*) dxdt \in \mathcal{D}_{r+r_j+1}(\overline{Q}_1), \quad j=\overline{1,m},$$
$$\int_{Q_0} \varrho^r(x,t) G_{m+1}(x,t,\cdot,0) dxdt \in \mathcal{D}_{r+2b}(\overline{Q}_2).$$

За аналогом теореми Фубіні [12, с. 132]

$$\int_{Q_0} \varrho^r(x,t)(G_j(x,t,y,\tau), F_j(y,\tau))_1 dxdt = \Big(\int_{Q_0} \varrho^r(x,t) G_j(x,t,y,\tau) dxdt, F_j(y,\tau)\Big)_1,$$

$$\int_{Q_0} \varrho^r(x,t)(G_0(x,t,y,0), F_{m+1}(y))_2 = \Big(\int_{Q_0} \varrho^r(x,t) G_0(x,t,y,0) dxdt, F_{m+1}(y)\Big)_2,$$

тому ці вирази є скінченними для довільного $r \ge 0$. Аналогічно у випадку припущення **Zr**. □

Наслідок 1. *За кожного з припущень* **F**, **Fr**, **Zr** *вектор-функція (15) є единим розв'язком задачі (1)-(3) у двох формулюваннях.*

Висновки. Одержано теореми про існування, єдиність та зображення розв'язку нормальної параболічної крайової задачі з правими частинами з вагових просторів узагальнених функцій. Доведено теорему про умови еквівалентності у двох різних формулюваннях регулярного в області розв'язку при крайових і початкових даних з вагових просторів узагальнених функцій.

Список використаної літератури

1. *Житарашу Н.В.* Теоремы об изоморфизмах в L_p-теории слабых решений параболических граничных задач / *Житарашу Н.В.* // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 260, № 5. – С. 1054-1058.
2. *Ивасишен С.Д.* Сопряженные операторы Грина. Обобщенные решения параболических граничных задач с нормальными граничными условиями / *Ивасишен С.Д.* // Докл. АН СССР. – 1971. – Т. 197, № 2. – С. 261-264.
3. *Ивасишен С.Д.* Матрицы Грина параболических граничных задач / *Ивасишен С.Д.* – К., 1990.
4. *Лопушанская Г.П.* О решении с помощью матрицы Грина параболической граничной задачи в пространстве обобщенных функций / *Лопушанская Г.П.* // Укр. мат. журн. – 1986. – Т. 38, № 6. – С. 795-798.
5. *Лопушанська Г.П.* Крайові задачі у просторі узагальнених функцій D' / *Лопушанська Г.П.* – Львів, 2002.
6. *Гупало А.С.* Об обобщенных граничных значениях решения однородного параболического уравнения второго порядка / *Гупало А.С., Лопушанская Г.П.* // Методы исследования дифференциальных и интегральных операторов. – К., 1989. – С. 54-59.

7. *Солонников В.А.* Оценки решений параболических начально-краевых задач в весовых гельдеровских нормах / *Солонников В.А., Хачатрян А.Г.* // Тр. Мат. ин-та им. В.А. Стеклова АН СССР. – 1980. – Т. 147. – С. 147-155.
8. *Житарашу Н.В.* О разрешимости параболической граничной задачи при наличии степенных особенностей в правых частях / *Житарашу Н.В.* // Мат. исследования. – 1987. – № 92. – С. 69-97.
9. *Лопушанська Г.П.* Про розв'язок параболічної граничної задачі із сильними степеневими особливостями в правих частинах / *Лопушанська Г.П.* // Мат. студії. – 2001. – Т. 15, № 2. – С. 179-190.
10. *Эйдельман С.Д.* Параболические системы / *Эйдельман С.Д.* – М., 1964.
11. *Лопушанська Г.* Узагальнені крайові значення розв'язків півлінійних еліптичних та параболічних рівнянь / *Лопушанська Г., Чмир О.* // Нелин. гран. задачи. – 2007. – Т. 17. – С. 50-73.
12. *Владимиров В.С.* Уравнения математической физики / *Владимиров В.С.* – М., 1981.
13. *Шилов Г.Е.* Математический анализ. Второй спецкурс / *Шилов Г.Е.* – М., 1965.
14. *Лопушанська Г.* Про деякі властивості спряжених операторів Ґріна параболічної крайової задачі / *Лопушанська Г., Чмир О.* // Наук. вісник Чернів. ун-ту: зб. наук. пр. Математика. – 2004. – Вип. 191-192. – С. 82-88.

Стаття: надійшла до редакції 29.03.2010
прийнята до друку 21.09.2011

GENERALIZED INITIAL AND BOUNDARY VALUES OF THE SOLUTIONS OF THE PARABOLIC SYSTEM EQUATIONS

Halyna LOPUSHANSKA

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: lhp@ukr.net

The uniquely existence theorems and the representation of the solutions of the linear normal parabolic boundary value problems with right-hand sides from the weight spaces of the generalized functions are obtained. The conditions of the equivalence in two definitions of the regular solution in domain under boundary and initial data from some weight spaces of the generalized functions are founded.

Key words: normal parabolic boundary value problem, weight functional space, generalized function, generalized boundary values, generalized initial values.

ОБОБЩЕННЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ И КРАЕВЫЕ ЗНАЧЕНИЯ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ

Галина ЛОПУШАНСКАЯ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: lhp@ukr.net*

Доказаны теоремы существования и единственности, получены изображения решений линейных нормальных параболических краевых задач при краевых и начальных данных с весовых пространств обобщенных функций. Найдено условия эквивалентности регулярного в области решения задачи в двух формулировках.

Ключевые слова: нормальная параболическая краевая задача, обобщенная функция, весовое функциональное пространство, обобщенные краевые значения, обобщенные начальные значения.