ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 122–128
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 122–128

УДК 519.21

ДЕЯКІ АСПЕКТИ АНАЛІЗУ КІЛЬКІСНОЇ КОНКУРЕНЦІЇ З ВИПАДКОВОЮ СТРАТЕГІЄЮ ОДНІЄЇ ФІРМИ

Катерина КОСАРЕВИЧ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: katia_kosarevych@mail.ru

Розглянуто гру конкуруючих фірм, в якій гравці регулюють пропозицію однорідного продукту на олігополістичному ринку. Досліджено питання про існування та вид рівноваги Курно-Неша за умови випадкового випуску однієї фірми без зазначення виду його розподілу. Розглянуто співвідношення такої рівноваги з рівновагою Курно-Неша для гри з детермінованими стратегіями. Проаналізовано вплив використання випадкової стратегії одним гравцем на сподівані прибутки фірм, сподівані рівноважні ринкові випуск і ціну.

Ключові слова: сподіваний прибуток, рівновага Курно-Неша, випадкова стратегія.

1. Вступ. На сучасному етапі розвитку економіки значна частка реальних ринків належить до олігополій, тому дослідження олігополістичної конкуренції фірм має важливе значення. Різновидом відомих сьогодні теоретико-ігрових моделей є модель Курно [1], в якій виробники вибирають обсяги продукту, функції виграшу гравців визначають їхні прибутки залежно від стратегій. В літературі отримано результати щодо існування рівноваги за Нешом [2] в моделі олігополії Курно [3], досліджено її єдиність і властивості [4] у випадку, коли гравці застосовують чисті стратегії. Ми зосередили увагу навколо поняття рівноваги Неша (в термінах описаної в моделі олігополії Курно конкурентної взаємодії фірм) з урахуванням невизначеності поведінки одного з гравців у сенсі вибору недетермінованого (випадкового) випуску. Розглядають відповідну гру "змішаного" типу, досліджують рівновагу за Нешом для такої гри та її співвідношення з відповідною рівновагою в грі з детермінованими стратегіями.

2. Модель кількісної конкуренції з детермінованими випусками. Розглянемо конкуренцію фірм, які регулюють пропозицію деякого однорідного продукту на олігополістичному ринку, як гру в стратегічній формі

$$G = (I, \{Q_i\}_{i \in I}, \{\pi_i\}_{i \in I}), \tag{1}$$

де I – множина фірм на ринку; Q_i – множина стратегій фірми i; $\pi_i(\cdot)$ – дійснозначна, визначена на $\prod\limits_{i \in I} Q_i$ функція виграшу гравця i. В термінах взаємодії фірм виграшем гравця i в грі (1) є прибуток i-ї фірми

$$\pi_i(\cdot) = Pq_i - c_i q_i.$$

Тут $q_i \geqslant 0$ – обсяг випуску i-ї фірми; c_i – витрати фірми i на виробництво одиниці продукції; $P = a - bQ$ – функція оберненого попиту на товар з $a, b > 0$ та загальною пропозицією продукту на ринок $Q = \sum\limits_{i \in I} q_i$.

Припустимо, що нам відома функція попиту, вона двічі неперервно-диференційовна. Тоді й кожна з функцій $\pi_i(\cdot)$ теж двічі неперервно-диференційовна. У цьому разі ціна P, яка встановлюється на ринку, – спадна, строго ввігнута функція. Крім того, згідно з технологією фірми i максимальний об'єм її виробництва вважатимемо обмеженим деяким додатним випуском. Не обмежуючи загальності, припустимо, що існує $\tilde{Q} > 0$ таке, що $P(Q) = 0$ для всіх $Q \geqslant \tilde{Q}$, тому множини стратегій гравців $Q_i = [0, \tilde{Q}^{(i)}], i \in I$, вважатимемо непорожніми, опуклими та компактними в $\mathbb{R}^n$.

Профіль стратегій $q^C = ({q_1}^C, ..., {q_I}^C)$ називатимемо рівновагою за Нешом у рамках моделі Курно, або рівновагою Курно-Неша в грі G, якщо для всіх $i \in I$

$$\pi_i{}^C = \pi_i({q_i}^C, {q_{-i}}^C) \geqslant \pi_i(q_i, {q_{-i}}^C) \qquad \forall\, q_i \in Q_i,$$

$${q_{-i}}^C = ({q_i}^C, ..., {q_{i-1}}^C, {q_{i+1}}^C, ..., {q_I}^C).$$

Іншими словами, q_i – одна з найліпших відповідей на стратегії ${q_{-i}}^C$.

Легко бачити, що функція виграшу $\pi_i(q_i, q_{-i}) = Pq_i - c_i q_i$ - неперервна і квазіввігнута за змінною q_i на Q_i. Застосувавши теорему Неша [2], отримуємо таке твердження.

Твердження 1. *За введених вище припущень для гри*

$$G = (I, \;\; Q_i = [0, \tilde{Q}^{(i)}], \;\; \pi_i(q_i, q_{-i}), \;\; i \in I)$$

існує рівновага Курно-Неша.

Зауваження 1. В умовах твердження 1 множина наборів стратегій, що є рівновагою Курно-Неша для гри G, задовольняє систему рівнянь

$$\pi_i({q_i}^C, {q_{-i}}^C) = \max_{q_i \in Q_i} \pi_i(q_i, {q_{-i}}^C), \quad i \in I. \tag{2}$$

Оскільки функції виграшу $\pi_i(q_i, q_{-i})$ диференційовні і шуканий рівноважний профіль стратегій є внутрішньою точкою множини $\prod\limits_{i \in I} Q_i$, умови (2) еквівалентні рівнянням

$$\frac{\partial \pi_i(q_i, {q_{-i}}^C)}{\partial q_i} = 0, \quad i \in I.$$

Твердження 2. *Для гри G з $I = \{1, 2\}$, $Q_1 = [0, \frac{a-c_1}{b}]$, $Q_2 = [0, \frac{a-c_2}{b}]$ за умов*

$$a + c_2 \geqslant 2c_1, \tag{3}$$

$$a + c_1 \geqslant 2c_2, \tag{4}$$

рівновага Курно-Неша є набір випусків

$$q_1{}^C = \frac{a - 2c_1 + c_2}{3b}, \tag{5}$$

$$q_2{}^C = \frac{a - 2c_2 + c_1}{3b}. \tag{6}$$

Зауваження 2. Рівноважні значення $(q_1{}^C, q_2{}^C)$ в грі (1) формують рівноважний ринковий випуск $Q^C = q_1{}^C + q_2{}^C = \frac{2a-c_1-c_2}{3b}$.

Рівновагу Курно-Неша для короткострокового періоду знайдено за умови, що фірми використовують детерміновані стратегії. Проте нестабільність економіки, що є наслідком впливу різноманітних чинників зовнішнього середовища, привносить в планування економічних процесів елемент невідомості. Наявність невизначеності стримує застосування відомих математичних методів до дослідження економічних систем і стимулює побудову нових модифікованих моделей. Зокрема, виробник продукції, що тільки з'являється на ринку, характеризується невпевненістю щодо попиту на його товар, а отже, і щодо оптимального обсягу випуску. Звідси невизначеність щодо стратегій поведінки власне виробника та фірм, які взаємодіють з ним на ринку. З огляду на це потребує досліджень питання про існування та форму ринкової рівноваги за випадкових випусків виробників.

3. Модель гри з випадковою стратегією одного гравця. Перенесемо розглянуту вище гру (1) з простору детермінованих стратегій на простір випадкових стратегій. Розглянемо випадок існування на ринку однорідної продукції двох фірм-виробників, які функціонують у сенсі описаної вище взаємодії. Вважатимемо, що значення випуску q_2 фірми 2 є детермінованим, а фірма 1 використовує випадкову стратегію. Щодо характеру випадковості випуску природним є припущення про його рівномірний розподіл на деякому відрізку, як нижню межу якого завжди можна вибрати константу, зокрема, нуль [5]. Проте недослідженою залишається взаємодія виробників та аналіз ситуації ринкової рівноваги без припущення про вид розподілу випадкового випуску.

Нехай випуск фірми 1 – випадкова величина q_1 із значеннями на $[a_0, b_0]$ з деяким неперервним розподілом $F(x)$ таким, що для нього існують перший і другий моменти. В модифікованій грі

$$G' = (I = \{1, 2\}, \quad \{Q_1 = [a_0, b_0], Q_2\}, \quad \{E\pi_i\}_{i \in I}; \quad F(x))$$

функцією виграшу гравців вважатимемо сподіваний прибуток фірм

$$E\pi_i = E(Pq_i - c_i q_i), \quad i \in I. \tag{7}$$

Фірма 1, обираючи сподіваний обсяг випуску $\bar{q_1}$, намагається максимізувати свій сподіваний (невід'ємний) прибуток згідно з (7)

$$E\pi_1(\bar{q_1}, q_2) = E((a - b(q_1 + q_2))q_1 - c_1 q_1) = (a - c_1)E(q_1) - bE(q_1{}^2) - bq_2 E(q_1) =$$
$$= (a - c_1)\bar{q_1} - bK(\bar{q_1}) - bq_2\bar{q_1},$$

де $\bar{q_1} = Eq_1, \quad K(\bar{q_1}) = Eq_1{}^2 = \int x^2 f(x)dx.$

З цією ж метою фірма 2 обирає значення випуску q_2

$$E\pi_2(\bar{q_1}, q_2) = E((a - b(q_1 + q_2))q_2 - c_2 q_2) = (a - c_2)q_2 - bq_2{}^2 - bq_2\bar{q_1}.$$

Рівновагою Курно-Неша в грі G' в термінах взаємодії фірм називатимемо профіль стратегій $q^{C1} = ({q_1}^{C1}, {q_2}^{C1})$, якщо

$$E{\pi_1}^{C1} = E\pi_1(\bar{q_1}^{C1}, {q_2}^{C1}) \geqslant E\pi_1(\bar{q_1}, {q_2}^{C1}) \quad \forall\, \bar{q_1} \geqslant 0; \tag{8}$$

$$E{\pi_2}^{C1} = E\pi_2(\bar{q_1}^{C1}, {q_2}^{C1}) \geqslant E\pi_2(\bar{q_1}^{C1}, q_2) \quad \forall\, q_2 \geqslant 0. \tag{9}$$

Теорема 1. *Нехай $q_1 \sim F(x)$, $Eq_1 < \infty$, й існує функція $K(\bar{q_1}) = E{q_1}^2 < \infty$ така, що при $a \geqslant c_2$*

$$\frac{a - 2c_1 + c_2}{2b} \leqslant \frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} \leqslant \frac{a - c_1}{b}. \tag{10}$$

Тоді профіль стратегій

$$\bar{q_1}^* = \frac{2c_1 - c_2 - a}{b} + 2\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}}, \tag{11}$$

$$q_2{}^* = \frac{a - c_1}{b} - \frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} \tag{12}$$

є рівновагою Курно-Неша в модифікованій грі G' (за випадкового випуску фірми 1).

Доведення. $E\pi_2(\bar{q_1}^*, q_2) = E((a - b(q_1{}^* + q_2))q_2 - c_2 q_2) = (a - c_2)q_2 - b{q_2}^2 - bq_2\bar{q_1}^*$ досягає максимуму, коли

$$a - b\bar{q_1}^* - 2bq_2 - c_2 = 0,$$

$$q_2 = \frac{a - c_2 - b\bar{q}_1^*}{2b} = q_2{}^*,$$

звідки випливає $E\pi_2(\bar{q_1}^*, q_2) \leqslant E\pi_2(\bar{q_1}^*, q_2{}^*)$, тобто нерівність (9) виконується для $\bar{q_1}^{C1} = \bar{q_1}^*$ і ${q_2}^{C1} = q_2{}^*$.
Аналогічно, $E\pi_1(\bar{q_1}, q_2{}^*) = E((a - b(q_1 + q_2{}^*))q_1 - c_1 q_1) = (a - c_1)\bar{q_1} - bK(\bar{q_1}) - bq_2{}^*\bar{q_1}$ максимізується при

$$(a - c_1) - b\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} - bq_2{}^* = 0,$$

$$a - c_1 - b\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} - b\frac{a - c_2 - b\bar{q_1}^*}{2b} = 0,$$

звідки

$$\bar{q_1} = \frac{2c_1 - c_2 - a}{b} + 2\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} = \bar{q_1}^*,$$

а отже, $E\pi_1(\bar{q_1}, q_2{}^*) \leqslant E\pi_1(\bar{q_1}^*, q_2{}^*)$, нерівність (8) правильна для $\bar{q}_1^{C1} = \bar{q_1}^*$ і ${q_2}^{C1} = q_2{}^*$. Легко бачити, що

$$q_2{}^* = \frac{a - c_1}{b} - \frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}}.$$

Набір стратегій $(\bar{q_1}^*, q_2{}^*)$ є шуканою рівновагою Курно-Неша. Зауважимо, що нерівність (10) забезпечує невід'ємність рівноважних випусків $\bar{q_1}^{C1} \geqslant 0$, ${q_2}^{C1} \geqslant 0$. $\square$

Теорема 2. *При виконанні умов (3)-(4) твердження 2 та нерівності*

$$\frac{3}{2}{q_1}^C \leqslant \frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} \leqslant 2{q_1}^C \tag{13}$$

рівновага Курно-Неша в грі G' змінюється порівняно з рівновагою в детермінованій грі G, причому

$$\bar{q_1}^{C1} \leqslant {q_1}^C, \tag{14}$$

$${q_2}^{C1} \geqslant {q_2}^C. \tag{15}$$

Доведення. Справді, при $\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} \leqslant 2{q_1}^C$ з (11) випливає

$$\bar{q_1}^{C1} = 2\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} - 3{q_1}^C \leqslant {q_1}^C.$$

Аналогічно з (12) отримуємо

$${q_2}^{C1} \geqslant \frac{a-c_1}{b} - 2{q_1}^C = {q_2}^C.$$

Враховуючи нерівність (10), яка гарантує невід'ємність сподіваного випуску фірми 1, отримуємо $\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} \leqslant \min\{2{q_1}^C, \frac{a-c_1}{b}\}$, проте на підставі (4) умова (10) звужується до (13). □

Зауваження 3. В умовах теореми 2 сподіваний рівноважний ринковий випуск

$$\bar{Q}^{C1} = \bar{q_1}^{C1} + {q_2}^{C1} = \frac{c_1-c_2}{b} + \frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}}.$$

На підставі правої частини нерівності (13)

$$\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} \leqslant \frac{2(a-2c_1+c_2)}{3b},$$

звідки

$$\bar{Q}^{C1} \leqslant \frac{2a-c_1-c_2}{3b} = Q^C.$$

Відповідно,

$$\bar{P}^{C1} \geqslant P^C.$$

Отож, наслідком введеної в грі G' випадковості випуску фірми 1 є зменшення сподіваного рівноважного ринкового випуску та збільшення сподіваної рівноважної ринкової ціни.

Наслідок 1. *На підставі (7) та (14)-(15)*

$$E{\pi_2}^{C1} \geqslant {\pi_2}^C,$$

$$E{\pi_1}^{C1} \leqslant {\pi_1}^C.$$

Отже, рівновага (11)-(12), отримана в грі G', принесе додатковий виграш лише фірмі 2 з детермінованим випуском. Тому така рівновага не є ліпшою для фірми 1 порівняно з (5)-(6), тобто застосування гравцем 1 випадкової стратегії є невигідним для нього. Отриманий результат пояснює підвищену увагу осіб, які приймають рішення, до планування їхньої стратегічної поведінки.

Зауваження 4. Якщо розподіл випадкового випуску фірми 1 з відрізку $[a_0, b_0]$ належить деякому класу неперервних розподілів, для яких $\frac{dK(\bar{q_1})}{d\bar{q_1}} = 2\bar{q_1}$, то рівновага Курно-Неша гри G' збігається з рівновагою (5)-(6).

Справді, для випадкової величини q_1, означеної в зауваженні 4, з одного боку, згідно з (11)-(12) рівноважний випуск фірми 1

$$\bar{q_1}^* = \frac{2c_1 - c_2 - a}{b} + 2(2\bar{q_1}^*),$$

звідки $\bar{q_1}^* = \frac{a-2c_1+c_2}{3b} = {q_1}^C$, для фірми 2 $\quad {q_2}^* = \frac{a-c_1}{b} - 2\bar{q_1}^* = \frac{a-2c_2+c_1}{3b} = {q_2}^C$. З іншого боку, міркування, аналогічні до доведення теореми 1, теж призводять до відшукання рівноваги (5)-(6).

Отож, випадковість, введена в гру (1), не змінює рівновагу, а отже і не погіршує виграш гравця з випадковою стратегією лише тоді, коли поведінку цього гравця протягом певного періоду часу можна описати визначеним в зауваженні 4 розподілом. В усіх інших випадках вибір фірмою 1 випадкового випуску є невиправданим у сенсі максимізації прибутку.

4. Висновки. Ми спробували формалізувати пошук рівноваги за Нешом для конкурентної гри в термінах взаємодії фірм з урахуванням випадковості. Отримані результати можуть стати невід'ємною частиною теорії функціонування економічної системи в умовах невизначеності.

Список використаної літератури

1. *Cournot A.* Researches into the mathematical principles of the theory of wealth / *Cournot A.* – New York, 1971.
2. *Nash J.F.* Noncooperative games / *Nash J.F.* // Ann.Math. – 1951. – Vol. 45. – P. 286-295.
3. *Amir R.* On the Effects of Entry in Cournot Markets / *Amir R., Lambson V.* // Review of Economic Studies. – 2000. – Vol. 67. – P. 235-254.
4. *Amir R.* Cournot Oligopoly and the Theory of Supermodular Games / *Amir R., Lambson V.* // Games and Economic Behavior. – 1996. – Vol. 15. – P. 132-148.
5. *Горбачук В.М.* Рівноваги Курно-Неша за асиметричної невизначеності та узагальнені рівноваги Курно-Штакельберга-Неша / *Горбачук В.М., Гаркуша Н.И.* // Вісник Київ. ун-ту. Сер. фіз.-мат. науки. – 2007. – №1. – С. 143-148.

Стаття: надійшла до редакції 13.05.2011
прийнята до друку 21.09.2011

SOME ASPECTS OF COMPETITIVE QUANTITATIVE ANALYSIS WITH RANDOM STRATEGY OF ONE FIRM

Kateryna KOSAREVYCH

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: katia_kosarevych@mail.ru

The article focuses on game of competing firms, where players regulate the supply of a homogeneous product at the oligopolistic market. The problem of the existence and form of the Cournot-Nash equilibrium for the game with one firm' random strategy without its distribution specification was investigated. New equilibrium was compared with the Cournot-Nash equilibrium for the game with deterministic strategies. The effect of using random strategy by one player on the firm's expected returns, expected equilibrium market output and price, was analyzed.

Key words: expected return, Cournot-Nash equilibrium, random strategy.

НЕКОТОРЫЕ АСПЕКТЫ АНАЛИЗА КОЛИЧЕСТВЕННОЙ КОНКУРЕНЦИИ СО СЛУЧАЙНОЙ СТРАТЕГИЕЙ ОДНОЙ ФИРМЫ

Катерина КОСАРЕВИЧ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: katia_kosarevych@mail.ru

Рассмотрена игра конкурирующих фирм, в которой игроки регулируют предложение однородного продукта на олигополистическом рынке. Исследован вопрос о существовании и форме равновесия Курно-Нэша при условии случайного выпуска одной фирмы без указания вида его распределения. Исследовано соотношение такого равновесия с равновесием Курно-Нэша для игры с детерминированными стратегиями. Проанализировано влияние использования случайной стратегии одним игроком на ожидаемые доходы фирм, ожидаемые рыночные выпуск и цену.

Ключевые слова: ожидаемый доход, равновесие Курно-Нэша, случайная стратегия.