ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 109–121
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 109–121

УДК 517.9

БІГАМІЛЬТОНОВІСТЬ І ТОЧНІ РОЗВ'ЯЗКИ УЗАГАЛЬНЕНОЇ ДИНАМІЧНОЇ СИСТЕМИ ТИПУ БЮРГЕРСА

Аркадій КІНДИБАЛЮК, Микола ПРИТУЛА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: a.kindybaluk@mail.ru

Вивчено, за яких значень коефіцієнтів нелінійна динамічна система типу Бюргерса має нескінченну ієрархію законів збереження, та має пару імплектичних операторів. На підставі модифікованого методу гіперболічних тангенс функцій одержано точні солітонні розв'язки системи, що розглядається.

Ключові слова: нелінійна динамічна система, закони збереження, імплектичні оператори, метод гіперболічних тангенс функцій.

1. Вступ. Шістдесяті роки XX ст. сприяли вивченню нелінійних динамічних систем. Для того, щоб моделювати складні процеси, були розроблені методи дослідження інтегровності динамічних систем на основі досягнень у нових галузях математичної та теоретичної фізики. Паралельно розробляли прямі методи знаходження точних розв'язків: метод гіперболічних тангенс функцій, білінійний метод Хіроти, перетворення Беклунда та їхні модифікації. У працях [1-3] викладено методи знаходження законів збереження, імплектичних операторів та оператора Лакса. У [4] описаний алгоритм гіперболічних тангенс функцій, а у [5] запропоновано метод знаходження розв'язків нелінійних динамічних систем у вигляді полінома від гіперболічного тангенса та котангенса.

Нехай на l-періодичному гладкому нескінченновимірному многовиді задана нелінійна динамічна система

$$u_t = K[u], \tag{1}$$

де $K : M \to T(M)$ – гладке за Фреше функціонально-поліноміальне векторне поле на M [1,2]. Для того, щоб дати відповідь на питання, чи інтегровна задана динамічна система, треба передусім з'ясувати наявність нескінченної ієрархії нетривіальних законів збереження, імплектичних операторів та оператора Лакса.

Наведемо найважливіші означення з [1,2].

Означення 1. *Функціонал*

$$\gamma[u] = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \sigma[u]\, d\, x \in D(M)$$

називають законом збереження для системи (1), якщо він є незмінним вздовж орбіт векторного поля, тобто

$$\left.\frac{d\gamma[u]}{d\, t}\right|_{K[u]} \equiv 0, \qquad (2)$$

де $u \in M$, $\sigma(u)$ – локальний функціонал, $D(M)$ – простір гладких за Фреше функціоналів на M.

Введемо білінійну форму на області $U = \{x \in R : \ x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + l\}$

$$(a, b) = \int\limits_U < a, b > \, d\, x, \qquad (3)$$

де $a, b \in C_0^\infty(U, R^n)$, яка визначає структуру простору Гільберта на дотичному просторі $T(M) \cong T^*(M)$.

Означення 2. *Градієнтом закону збереження $\gamma[u] \in D(M)$ називають величину*

$$\operatorname{grad} \gamma[u] = \frac{\delta\gamma[u]}{\delta\, u},$$

причому

$$\operatorname{grad} \gamma[u] = ((\sigma[u])')^* \qquad (4)$$

*де зірочка " * " означає спряження стосовно стандартної білінійної форми (3).*

Означення 3. *Динамічна система (1) бігамільтонова, якщо її можна подати у вигляді*

$$u_t = -\vartheta \operatorname{grad} H_\vartheta = -\eta \operatorname{grad} H_\eta = K[u], \qquad (5)$$

де $H_\vartheta, H_\eta \in D(M)$ – функціонали Гамільтона, а $\vartheta, \eta : T^*(M) \to T(M)$ – пара імплектичних операторів.

Диференціально-алгебричний алгоритм побудови імплектичних операторів описаний в [1]. Якщо закон збереження $\int_{x_0}^{x_0+l} \tilde{\sigma}[u]\, dx$ можемо подати у вигляді $\int_{x_0}^{x_0+l} < \sigma[u], u_x > dx$, то функціонал $\sigma[u]$ використовуємо для побудови симплектичного оператора $\theta^{-1} = \sigma' - \sigma'^*$. Якщо для оператора θ^{-1} існує обернений оператор, то отримаємо імплектичний оператор θ. Якщо система (1) двокомпонентна, то закон збереження $\int_{x_0}^{x_0+l} \tilde{\sigma}[u, v]\, dx$ потрібно подати у такому вигляді:

$$\int\limits_{x_0}^{x_0+l} (< \sigma_1[u, v], u_x > + < \sigma_2[u, v], v_x >)\, dx. \qquad (6)$$

Оператор σ' набув вигляду

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial u} & \dfrac{\partial \sigma_1}{\partial v} \\ \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial u} & \dfrac{\partial \sigma_2}{\partial v} \end{pmatrix}. \tag{7}$$

2. Формулювання задачі. Нехай на нескінченновимірному l-періодичному многовиді M задана динамічна система типу Бюргерса

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = k_1 u_{xx} + k_2 u u_x + k_3 v_x \\ v_t = k_4 \left(uv\right)_x + k_5 v_{xx} \end{array} \right\} = K[u,v], \tag{8}$$

де $K : M \to T(M)$ – гладке за Фреше функціонально поліноміальне векторне поле на многовиді M; а k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 – дійсні числові параметри; t – параметр еволюції системи (8). Треба знайти, за яких значень параметрів k_1, k_2, k_3, k_4, k_5 система (8) має нескінченну ієрархію нетривіальних законів збереження та володіє парою імплектичних операторів.

Зауважимо, що система

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = u_{xx} + u u_x + v_x, \\ v_t = \left(uv\right)_x - v_{xx}, \end{array} \right.$$

тобто система (8) при значеннях коефіцієнтів $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1$, $k_5 = -1$ досліджена в [3], а система

$$\left\{ \begin{array}{l} u_t = \alpha u_{xx} + u u_x + v_x, \\ v_t = \left(uv\right)_x - \alpha v_{xx}, \end{array} \right.$$

тобто система (8) при значеннях коефіцієнтів $k_1 = \alpha, k_2 = k_3 = k_4 = 1$, $k_5 = -\alpha$, досліджена в [1].

3. Закони збереження. Вивчимо питання про наявність нескінченної ієрархії законів збереження для динамічної системи (8) на гладкому l-періодичному многовиді M. З цією метою розглянемо асимптотичні розв'язки рівняння Лакса

$$\frac{d\varphi}{dt} + K'^{*}\varphi = 0, \tag{9}$$

де $\varphi \in T^*(M)$, " $'$ " – означає похідну Фреше нелінійного локального функціонала, а зірочка " $*$ " – спряження стосовно стандартної білінійної форми (3). Оскільки оператор $K'^{*} : T^*(M) \to T^*(M)$ має такий вигляд:

$$K'^{*} = \begin{pmatrix} k_1\partial^2 - k_2 u\partial & -k_4 v\partial \\ -k_3\partial & -k_4 u\partial + k_5\partial^2 \end{pmatrix},$$

то лінійне рівняння (9) допускає вектор-розв'язок $\varphi \in T^*(M)$ у вигляді

$$\varphi(x,t;\lambda) = (1, b(x,t;\lambda))^T \exp\left(\omega_1(\lambda)x + \omega_2(\lambda)t + \int\limits_{x_0}^{x} \sigma(x,t;\lambda)\,dx\right), \tag{10}$$

де $\lambda \in C$ – комплексний параметр; $x_0 \in R$ – довільна фіксована точка і

$$b(x,t;\lambda) \cong \sum_{j\in Z_+} b_j[u,v]\lambda^{-j}, \sigma(x,t;\lambda) \cong \sum_{j\in Z_+} \sigma_j[u,v]\lambda^{-j} \tag{11}$$

асимптотичні розвинення при $|\lambda| \to \infty$. Для знаходження дисперсійного відношення $\omega_1 = \omega_1(\lambda)$ і $\omega_2 = \omega_2(\lambda)$ розв'яжемо рівняння Лакса (9) з урахуванням (10) в точці $u = 0, v = 0$ при $t = t_0 \in R$. У підсумку отримаємо шукані елементи $\omega_1(\lambda) = \lambda$, $\omega_2(\lambda) = -k_1\lambda^2$. Отже, розв'язок (10) рівняння (9) набуде вигляду

$$\varphi(x,t;\lambda) = (1, b(x,t;\lambda))^T \exp\left(\lambda x - k_1\lambda^2 t + \int\limits_{x_0}^{x} \sigma(x,t;\lambda)\,dx\right). \tag{12}$$

Підставляючи (12) в (9) з урахуванням асимптотичного розвинення (11), отримаємо нескінченну систему рекурентних рівнянь

$$\begin{cases} \partial^{-1}\sigma_{j,t} = -2k_1\sigma_{j+1} - k_1 \sum\limits_{k\in Z_+} \sigma_k\sigma_{j-k} - k_1\sigma_{j,x} + k_2 u\delta_{j,-1} + k_2 u\sigma_j + \\ \qquad + k_4\left(vb_{j,x} + vb_{j+1} + v\sum\limits_{k\in Z_+} b_k\sigma_{j-k}\right), \\ \sum\limits_{k\in Z_+} b_k\partial^{-1}\sigma_{j-k,t} + b_{j,t} - k_1 b_{j+2} = k_3\left(\delta_{j,-1} + \sigma_j\right) + \\ \qquad + k_4\left(ub_{j,x} + ub_{j+1} - +u\sum\limits_{k\in Z_+} b_k\sigma_{j-k}\right) - \\ \qquad - k_5\left(b_{j,xx} + 2b_{j+1,x} + 2\sum\limits_{k\in Z_+} b_{k,x}\sigma_{j-k} + b_{j+2}\right) - \\ \qquad - k_5\left(2\sum\limits_{k\in Z_+} b_{k+1}\sigma_{j-k} + \sum\limits_{k,l\in Z_+} b_{j-k-l}\sigma_{j-k}\sigma_k + \sum\limits_{k\in Z_+} b_{j-k}\sigma_{k,x}\right), \end{cases} \tag{13}$$

де $\partial^{-1}(\cdot) = \frac{1}{2}\left[\int\limits_{x_0}^{x}(\cdot)dx - \int\limits_{x}^{x_0+l}(\cdot)dx\right]$ – оператор оберненого диференціювання; $k, l \in Z_+$. Розв'язуючи послідовно систему рекурентних рівнянь (13), знаходимо перші дев'ять локальних функціоналів

$$\begin{array}{l} b_0 = 0; \\ b_1 = \beta_{11}, \sigma_0 = \alpha_{01}u; \\ b_2 = \beta_{21}, \sigma_1 = \alpha_{11}u_x + \alpha_{12}v; \\ b_3 = -\beta_{31}u^2 - \beta_{32}v - \beta_{33}u_x, \sigma_2 = \alpha_{21}uv + \alpha_{22}u_{xx} + \alpha_{23}uu_x + \alpha_{24}v_x\ , \\ b_4 = \beta_{41}u^3 + \beta_{42}uv + \beta_{43}uu_x + \beta_{44}v_x + \beta_{45}u_{xx}, \\ \sigma_3 = \alpha_{31}u^2v + \alpha_{32}v^2 + \alpha_{33}u^2u_x + \\ +\alpha_{34}u_xv + \alpha_{35}u_x^2 + \alpha_{36}uv_x + \alpha_{37}uu_{xx} + \alpha_{38}v_{xx} + \alpha_{39}u_{xxx}, \end{array} \tag{14}$$

де $\alpha_{ij}, \beta_{ij}, i, j \in Z_+$ – вирази, які залежать від коефіцієнтів системи k_1, k_2, k_3, k_4, k_5. Випишемо перші з них

$$\alpha_{01} = \frac{k_2}{2k_1};$$

$$\beta_{11} = \frac{k_3}{k_5 - k_1}; \quad \alpha_{11} = -\frac{k_2}{2k_1}; \quad \alpha_{12} = -\left(\frac{1}{2k_1}\left(\frac{k_2k_3}{2k_1} - \frac{k_3k_4}{k_5 - k_1}\right)\right);$$

$$\beta_{12} = \left(\frac{k_1k_3}{2k_1(k_5 - k_1)} + \frac{k_3k_5}{(k_5 - k_1)^2}\right)$$

$$\alpha_{21} = \left(\frac{1}{4k_1}\left(\frac{k_2k_3}{2k_1} - \frac{k_3k_4}{(k_5-k_1)}\right) - \frac{k_4}{2k_1}\left(\frac{k_2k_3}{2k_1(k_5-k_1)} - \frac{k_3k_5}{(k_5-k_1)^2}\right)\right).$$

Наступні числа α_{ij}, β_{ij} громіздкі вирази, які залежать від коефіцієнтів системи k_1, k_2, k_3, k_4, k_5. За знайденими функціоналами $\sigma_j[u,v]$ (14) послідовно знаходимо закони збереження для системи (8) при $j = 0, 1, 2, 3$.

При $j = 0$ маємо такий закон збереження: $\tilde{\gamma_0}[u,v] = \dfrac{k_2}{2k_1} \int\limits_{x_0}^{x_0+l} udx$. З'ясуємо, чи для довільного числа β_0 функціонал $\beta_0 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} udx$ є законом збереження для системи (8), тобто перевіримо чи виконується рівність (2) для γ_0

$$\left.\frac{d\gamma_0}{dt}\right|_{K[u,v]} = \beta_0 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} u_t dx = \beta_0 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} (k_1u_{xx} + k_2uu_x + k_3v_x)\, dx =$$

$$= \beta_0 \left(k_1u_x + k_2\frac{u^2}{2} + k_3v\right)\Bigg|_{x_0}^{x_0+l} \equiv 0.$$

Оскільки значення параметра β_0 довільне, то для зручності виберемо $\beta_0 = 1$, отже, перший закон збереження набув вигляду $\gamma_0 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} udx$.

При $j = 1$ отримаємо $\tilde{\gamma_1}[u,v] = -\dfrac{1}{2k_1}\left(\dfrac{k_2k_3}{2k_1} - \dfrac{k_3k_4}{k_5-k_1}\right) \int\limits_{x_0}^{x_0+l} vdx$. З'ясуємо, чи для довільного числа β_1 функціонал $\beta_1 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} vdx$ є законом збереження для динамічної системи (8)

$$\left.\frac{d\gamma_1}{dt}\right|_{K[u,v]} = \beta_1 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} v_t dx = \beta_1 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} (k_4(uv)_x + k_5v_{xx})\, dx =$$

$$= \beta_1 \left(k_4(uv) + k_5v_x\right)\big|_{x_0}^{x_0+l} \equiv 0.$$

Оскільки значення параметра β_1 довільне, то для зручності виберемо $\beta_1 = 1$, отже, другий закон збереження набув вигляду $\gamma_1 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} vdx$.

При $j = 2$ одержимо

$$\gamma_2[u,v] =$$

$$= \left(\frac{1}{4k_1}\left(\frac{k_2k_3}{2k_1} - \frac{k_3k_4}{(k_5-k_1)}\right) - \frac{k_4}{2k_1}\left(\frac{k_2k_3}{2k_1(k_5-k_1)} - \frac{k_3k_5}{(k_5-k_1)^2}\right)\right) \int\limits_{x_0}^{x_0+l} uvdx.$$

З'ясуємо чи для довільного числа β_2 функціонал $\beta_2 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} uvdx$ є законом збереження для системи (8). Справді,

$$\left.\frac{d\gamma_2}{dt}\right|_{K[u,v]} = \beta_2 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} (uv)_t dx = \beta_2 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} (u_t v + uv_t)\, dx =$$

$$= \beta_2 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} (k_1 u_{xx} v + k_2 u u_x v + k_3 v_x v + k_4 u(uv)_x + k_5 uv_{xx})\, dx =$$

$$= \beta_2 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} ((k_1 + k_5) u_{xx} v + (k_2 - k_4) uvu_x)\, dx \equiv 0.$$

Тотожність $\beta_2 \int_{x_0}^{x_0+l} ((k_1 + k_5) u_{xx} v + (k_2 - k_4) uvu_x)\, dx \equiv 0$ виконується тоді і тільки тоді, коли

$$k_4 = k_2, \quad k_5 = -k_1, \tag{15}$$

позаяк коефіцієнт k_3 – довільне ненульове число. При значеннях коефіцієнтів $k_4 \neq k_2$, $k_5 \neq -k_1$ система (8) не має нескінченної ієрархії законів збереження, а отже, вона не буде інтегровною методом оберненої задачі розсіяння. Оскільки значення параметра β_2 довільне, то для зручності виберемо $\beta_2 = 1$, тобто третій закон збереження набув вигляду $\gamma_2 = \int_{x_0}^{x_0+l} uvdx$.

Для отримання наступного закону збереження треба визначити значення невідомих параметрів $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ у функціоналі

$$\gamma_3 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(\alpha_1 u^2 v + \alpha_2 v^2 + 2\alpha_3 u_x v\right) dx$$

із тотожності (2)

$$\left.\frac{d\gamma_3}{dt}\right|_{K[u,v]} = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(\alpha_1 u^2 v + \alpha_2 v^2 + 2\alpha_3 u_x v\right)_t dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(\alpha_1(2uu_t v + u^2 v_t) + 2\alpha_2 v v_t + 2\alpha_3(u_{tx} v + u_x v_t)\right) dx =$$

$$= \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(2\alpha_1 uv(k_1 u_{xx} + k_2 u u_x + k_3 v_x) + \alpha_1 u^2 (k_2\,(uv)_x - k_1 v_{xx})\right) +$$

$$+ 2\alpha_2 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} v\,(k_2 (uv)_x - k_1 v_{xx})\, dx +$$

$$+2\alpha_3 \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(v\left(k_1 u_{xxx} + k_2(uu_x)_x + k_3 v_{xx}\right) + u_x\left(k_2\,(uv)_x - k_1 v_{xx}\right)\right) dx \equiv 0.$$

У підсумку отримаємо, що $\alpha_1 = k_2$, $\alpha_2 = k_3$, $\alpha_3 = k_1$, та переконуємося, що четвертий закон збереження для динамічної системи (8) набуде вигляду

$$\gamma_3 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(k_2 u^2 v + k_3 v^2 + 2k_1 u_x v\right) dx.$$

Теорема 1. *Динамічна система (8) має нескінченну ієрархію законів збереження, якщо коефіцієнти системи задовольняють співвідношення (15). Закони збереження набули вигляду*

$$\gamma_0 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} u dx, \quad \gamma_1 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} v dx, \quad \gamma_2 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} uv dx,$$

$$\gamma_3 = \int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(k_2 u^2 v + k_3 v^2 + 2k_1 u_x v\right) dx.$$

4. Імплектичні оператори. Для побудови імплектичних операторів скористаємося диференціально алгебричним алгоритмом [1]. Виберемо Гамільтоніан

$$H_\vartheta = H_\vartheta[u,v] = -\gamma_2[u,v] = -\int\limits_{x_0}^{x_0+l} uv dx. \tag{16}$$

Згідно з зображенням (6) перетворимо функціонал (16)

$$H_\vartheta = -\int\limits_{x_0}^{x_0+l} uv dx = -\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+l} (uv + uv)\, dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(v\partial^{-1}u_x + u\partial^{-1}v_x\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(< (\partial^{-1}v), u_x > + < (\partial^{-1}u), v_x >\right) dx.$$

Побудуємо оператори σ', σ'^*, θ_1^{-1}

$$\sigma' = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \sigma'^* = -\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$\theta_1^{-1} = \sigma' - \sigma'^* = \begin{pmatrix} 0 & \partial^{-1} \\ \partial^{-1} & 0 \end{pmatrix}.$$

Обернений оператор до θ_1^{-1} існує, а отже, отримаємо імплектичний оператор $\eta = \theta_1$

$$\eta = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}. \tag{17}$$

З умови гамільтоновості $\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}_t = -\eta \operatorname{grad} H_\eta$, знайдемо функціонал $H_\eta \in D(M)$ із співвідношень

$$-\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dfrac{\delta H_\eta}{\delta u} \\ \dfrac{\delta H_\eta}{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_1 u_{xx} + k_2 u u_x + k_3 v_x \\ k_2 (uv)_x - k_1 v_{xx} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\delta H_\eta}{\delta u} \\ \dfrac{\delta H_\eta}{\delta v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_2 (uv) - k_1 v_x \\ k_1 u_x + \frac{k_2}{2} u^2 + k_3 v \end{pmatrix}:$$

$$H_\eta = H_\eta[u,v] = -\frac{1}{2}\gamma_3[u,v] = -\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(k_2 u^2 v + k_3 v^2 + 2k_1 u_x v\right) dx. \tag{18}$$

Знайдемо імплектичний оператор ϑ, застосувавши диференціально-алгебричний алгоритм до функціонала (18). Перетворимо його згідно з (6)

$$H_\eta = -\frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(k_2 u^2 v + k_3 v^2 + 2k_1 u_x v\right) dx =$$

$$= \frac{1}{2}\int\limits_{x_0}^{x_0+l} \left(< \left(k_2 \partial^{-1}(uv) - 2k_1 v\right), u_x > + < k_3 \partial^{-1} v, v_x >\right) dx.$$

З отриманого зображення побудуємо оператори $\sigma', \sigma'^*, \theta_2^{-1}$

$$\sigma' = \begin{pmatrix} \dfrac{k_2}{2}\partial^{-1} v & -k_1 + \dfrac{k_2}{2}\partial^{-1} u \\ 0 & \dfrac{k_3}{2}\partial^{-1} \end{pmatrix}, \quad \sigma'^* = \begin{pmatrix} -\dfrac{k_2}{2} v \partial^{-1} & 0 \\ -k_1 - \dfrac{k_2}{2} u \partial^{-1} & -\dfrac{k_3}{2}\partial^{-1} \end{pmatrix},$$

$$\theta_2^{-1} = \sigma' - \sigma'^* = \begin{pmatrix} \dfrac{k_2}{2}\left(\partial^{-1} v + v\partial^{-1}\right) & -k_1 + \dfrac{k_2}{2}\partial^{-1} u \\ k_1 + \dfrac{k_2}{2} u \partial^{-1} & k_3 \partial^{-1} \end{pmatrix}.$$

Із співвідношення $\vartheta = \eta \theta_2^{-1} \eta$ [3] отримаємо шуканий імплектичний оператор

$$\vartheta = \eta\theta_2^{-1}\eta = \begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{k_2}{2}\left(\partial^{-1} v + v\partial^{-1}\right) & -k_1 + \frac{k_2}{2}\partial^{-1} u \\ k_1 + \frac{k_2}{2} u\partial^{-1} & k_3\partial^{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & \partial \\ \partial & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} k_3 \partial & k_1 \partial^2 + \dfrac{k_2}{2}\partial u \\ \dfrac{k_2}{2} u\partial - k_1\partial^2 & \dfrac{k_2}{2}\left(v\partial + \partial v\right) \end{pmatrix}. \tag{19}$$

Теорема 2. *Динамічна система (8) бігамільтонова, тобто її можна подати у вигляді (5), де* $H_\vartheta, H_\eta \in D(M)$ *– функціонали Гамільтона (16), (18), а* η, θ *– пара імплектичних операторів (17), (19), якщо коефіцієнти системи задовольняють умову теореми 1.*

Зауважимо, що отриманий оператор (19) при значеннях коефіцієнтів $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = 1, k_5 = -1$ системи збігається з імплектичним оператором, який знайшли в [3].

5. Точні розв'язки. Під час розв'язування диференціальних рівнянь у частинних похідних (ДРЧП) виникає потреба знати точні розв'язки рівняння. Це потрібно для того, щоб мати змогу тестувати обчислювальні схеми. У [5] запропоновано модифікований метод гіперболічних тангенс функцій. Метод суттєво не відрізняється від методу описаного у [4], проте розв'язок шукаємо у вигляді суми поліномів від гіперболічного тангенса та котангенса. Наведемо кроки методу.

- **Крок 1.** Зводимо ДРЧП до звичайного диференціального рівняння (ЗДР) заміною $u(x,t) = u(c_1x + c_2t + c_3)$.
- **Крок 2.** Знаходимо степені поліноміального розв'язку
$$u(T) = \sum_{j=0}^{M} a_j T^j.$$
- **Крок 3.** Одержуємо алгебричну систему рівнянь для визначення невідомих коефіцієнтів у поліномі
$$u(T) = a_0 + \sum_{j=1}^{M} a_j T^j + \sum_{j=1}^{M} b_j T^{-j}.$$
- **Крок 4.** Розв'язуємо задану систему за умови, що коефіцієнти біля найвищих степенів кожного з розв'язків і параметри c_j відмінні від нуля.
- **Крок 5.** Виконавши процедуру обернену до запропонованої на кроці 1, отримаємо розв'язок вихідної системи у явному вигляді.

Послідовно виконаємо кожен із кроків описаного методу.

Крок 1. Зведення ДРЧП до ЗДР.

Шукаємо розв'язок у вигляді відокремленої хвилі, вводячи заміну
$$u(x,t) = u(c_1x + c_2t + c_3), \quad v(x,t) = v(c_1x + c_2t + c_3).$$
Підставивши заміну у систему рівнянь (8), отримаємо систему звичайних диференціальних рівнянь
$$\begin{cases} c_2u' = k_1c_1^2u'' + k_2c_1uu' + k_3c_1v', \\ c_2v' = k_4c_1(uv)' + k_5c_1^2v''. \end{cases} \tag{20}$$
Для зручності застосування методу гіперболічних тангенс функцій проінтегруємо систему (20)
$$\begin{cases} c_2u = k_1c_1^2u' + \frac{k_2}{2}c_1u^2 + k_3c_1v + C_1, \\ c_2v = k_4c_1(uv) + k_5c_1^2v' + C_2, \end{cases} \tag{21}$$
де C_1, C_2 довільні сталі.

Крок 2. Визначення степеня в поліноміального розв'язку.

Розв'язок системи (8) шукатимемо як суму поліномів від гіперболічного тангенса та котангенса

$$u(x,t) = a_{10} + \sum_{j=1}^{M_1} a_{1j}\tanh(c_1x + c_2t + c_3) + \sum_{j=1}^{M_1} b_{1j}\coth(c_1x + c_2t + c_3),$$

$$v(x,t) = a_{20} + \sum_{j=1}^{M_2} a_{2j}\tanh(c_1x + c_2t + c_3) + \sum_{j=1}^{M_2} b_{2j}\coth(c_1x + c_2t + c_3).$$

Для визначення степенів поліноміальних розв'язків підставимо

$$u(T) = T^{M_1}, \quad v(T) = T^{M_2}$$

у систему (20) та прирівняємо показники максимальних степенів. Після обчислень з'ясовуємо, що $M_1 = 1, M_2 = 2$. Отже, розв'язок шукатимемо у вигляді [5]

$$\begin{gathered} u(T) = a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}, \\ v(T) = a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^{-1} + a_{24}T^{-2}. \end{gathered} \tag{22}$$

Зауважимо, що $T' = 1 - T^2$, $(T^{-1})' = 1 - (T^{-1})^2$.

Крок 3. Отримання алгебричної системи рівнянь для визначення значень невідомих коефіцієнтів.

Підставимо (22) у (20) та отримаємо систему

$$\begin{cases} c_2\left(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}\right) = k_1c_1^2\left(a_{11}(1 - T^2) + a_{12}(1 - (T^{-1})^2)\right) + \\ +\dfrac{k_2c_1}{2}\left(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}\right)^2 + \\ +k_3c_1\left(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^{-1} + a_{24}T^{-2}\right), \\ \\ c_2\left(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^{-1} + a_{24}T^{-2}\right) = \\ = k_4c_1\left(a_{10} + a_{11}T + a_{12}T^{-1}\right)\cdot\left(a_{20} + a_{21}T + a_{22}T^2 + a_{23}T^{-1} + a_{24}T^{-2}\right) + \\ +k_5c_1^2\left((a_{21} + 2a_{22}T)(1 - T^2) + (a_{23} + 2a_{24}T^{-1})(1 - T^{-2})\right). \end{cases}$$

В отриманій системі прирівняємо коефіцієнти до нуля, внаслідок цього отримуємо систему для визначення невідомих коефіцієнтів

$$\begin{cases} T^0 : -c_2a_{10} + \frac{k_2c_1}{2}\left(a_{10}^2 + 2a_{11}a_{12}\right) + k_3c_1a_{20} + k_1c_1^2(a_{11} + a_{12}) = 0, \\ T^1 : -c_2a_{11} + k_2c_1a_{10}a_{11} + k_3c_1a_{21} = 0, \\ T^2 : k_1c_1^2a_{11} + \frac{k_2c_1^2}{2}a_{11}^2 + k_3c_1a_{22} = 0, \\ T^{-1} : -c_2a_{12} + k_2c_1a_{10}a_{12} + k_3c_1a_{23} = 0, \\ T^{-2} : k_1c_1^2a_{12} + \frac{k_2c_1^2}{2}a_{12}^2 + k_3c_1a_{24} = 0, \\ T^0 : -c_2a_{20} + k_4c_1\left(a_{10}a_{20} + a_{12}a_{21} + a_{11}a_{23}\right) + k_5c_1^2(a_{21} + a_{23}) = 0, \\ T^1 : -c_2a_{21} + k_4c_1\left(2a_{11}a_{20} + a_{12}a_{22}\right) + 2k_5c_1^2a_{22} = 0, \\ T^2 : -c_2a_{22} + k_3c_1a_{11}a_{21} - k_5c_1^2a_{21} = 0, \\ T^3 : k_4c_1a_{11}a_{22} - 2k_5c_1^2a_{22} = 0, \\ T^{-1} : -c_2a_{23} + k_4c_1\left(2a_{12}a_{20} + a_{11}a_{24}\right) + 2k_5c_1^2a_{24} = 0, \\ T^{-2} : -c_2a_{24} + k_3c_1a_{12}a_{23} - k_5c_1^2a_{23} = 0, \\ T^{-3} : k_4c_1a_{12}a_{24} - 2k_5c_1^2a_{24} = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Крок 4. Розв'язуємо задану систему (23) за умови, що коефіцієнти при найвищих степенях кожного з розв'язків і параметри c_i відмінні від нуля.

Для цього використаємо пакет Mathematica 7.0. Для того, щоб існував розв'язок, ми повинні в системі відкинути рівняння, що є біля T^0, адже під час інтегрування ми отримали сталі C_1, C_2, якими можна знехтувати, прийнявши довільні числові значення. Отримаємо розв'язок

$$\begin{aligned}
a_{10} &= c_2\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5+3k_4k_5}{3c_1k_2k_4k_5}\right),\\
a_{11} &= \frac{2c_1k_5}{k_4},\\
a_{12} &= \frac{2c_1k_5}{k_4},\\
a_{20} &= \frac{-c_2^2k_1k_4-c_2^2k_2k_5+12c_1^4k_1k_4k_5^2+12c_1^4k_2k_5^2}{6c_1^2k_3k_4^2k_5},\\
a_{21} &= 2c_2\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5}{3k_3k_4^2}\right),\\
a_{22} &= -2c_2k_5\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5}{k_3k_4^2}\right),\\
a_{23} &= 2c_2\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5}{3k_3k_4^2}\right),\\
a_{24} &= -2c_2k_5\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5}{k_3k_4^2}\right).
\end{aligned}\tag{24}$$

Бачимо, що коефіцієнти в поліномі від гіперболічного котангенса збігаються з коефіцієнтами в поліномі від гіперболічного тангенса.

Крок 5. Виконавши процедуру обернену до запропонованої на кроці 1, отримаємо розв'язок вихідної системи у явному вигляді.

Враховуючи (22), (24) та вибравши $c_1 = c_2 = 1$ та $c_3 = 0$, запишемо розв'язок системи (8)

$$\begin{aligned}
u(x,t) &= \frac{k_1k_4+k_2k_5+3k_4k_5}{3k_2k_4k_5}+\frac{2k_5}{k_4}\left(\tanh(x+t)+\coth(x+t)\right),\\
v(x,t) &= \frac{-k_1k_4-k_2k_5+12k_1k_4k_5^2+12k_2k_5^2}{6k_3k_4^2k_5}+\\
&+2\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5}{3k_3k_4^2}\right)\left(\tanh(x+t)+\coth(x+t)\right)-\\
&-2k_5\left(\frac{k_1k_4+k_2k_5}{3k_3k_4^2}\right)\left(\tanh^2(x+t)+\coth^2(x+t)\right).
\end{aligned}\tag{25}$$

Теорема 3. *У розв'язку (25), що містить поліном від гіперболічного тангенса та гіперболічного котангенса, коефіцієнти біля однакових степенів гіперболічного тангенса та котангенса рівні.*

6. Висновки. З'ясована наявність нескінченної ієрархії законів збереження та знайдена пара імплектичних операторів для нелінійної динамічної системи типу

Бюргерса, а також визначено значення параметрів системи, при яких таке твердження правильне.

Використавши модифікований метод гіперболічних тангенс функцій, отримано солітонний розв'язок у вигляді суми поліномів, які залежать від гіперболічного тангенса та котангенса.

Список використаної літератури

1. *Прикарпатский А.К.* Алгебраические аспекты интегрируемости динамических систем на многообразиях / *Прикарпатский А.К., Микитюк И.В.* – К., 1991.
2. *Гентош О.Є.* Диференціально-геометричні та Лі-алгебраїчні основи дослідження інтегровних нелінійних динамічних систем на функціональних многовидах / *Гентош О.Є., Притула М.М., Прикарпатський А.К.* – Л., 2006.
3. *Гентош О.Є.* Гамільтонова інваріантна редукція рівняння Бюргерса / *Гентош О.Є., Притула М.М.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія прикладна матем. та інф. – 1999. – Вип. 1. – С. 76-81.
4. *Fan E.G.* Extended tanh-function method and its applications to nonlinear equation / *Fan E.G.* // Phys. Lett. A. – 2000. – Vol. 227. – P. 212-218.
5. *Yusufoğlu E.* On the Extended Tanh Method, Applications of Nonlinear Equations / *Yusufoğlu E., Bekir A.* // International Journal of Nonlinear Science. – 2007. – Vol. 4, №1. – P. 10-16.

Стаття: надійшла до редакції 18.05.2011
прийнята до друку 21.09.2011

BIHAMILTONITY AND EXACT SOLUTIONS OF BURGER'S TYPE GENERALIZED DYNAMICAL SYSTEM

Arkady KINDYBALIUK, Mykola PRYTULA

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: a.kindybaluk@mail.ru

Examined coefficients of Burger's type dynamical system, and found values of that coefficients when system possess an infinite hierarchy of invariant laws and has a pair of implectic operators. Using modified tanh-method have been got exact soliton solutions of considered system.

Key words: nonlinear dynamical system, conservation laws, impletic operators, tanh-method.

БИГАМИЛЬТОНОВОСТЬ И ТОЧНЫЕ РЕШЕНИЯ ОБОБЩЕННОЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ ТИПА БЮРГЕРСА

Аркадий КИНДЫБАЛЮК, Николай ПРИТУЛА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: a.kindybaluk@mail.ru

Изучено, при каких значениях коэффициентов обобщенная нелинейная динамическая система типа Бюргерса обладает бесконечной иерархией законов сохранения и парой имплектических операторов. Используя модифицированный метод гиперболических тангенс функций, получено точные солитонные решения рассматриваемой системы.

Ключевые слова: нелинейная динамическая система, законы сохранения, имплектические операторы, метод гиперболических тангенс функций.