ISSN 2078-3744. *Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 98–108*
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 98–108

УДК 517.956.4

ПАРАБОЛІЧНІ ПОЧАТКОВІ ЗАДАЧІ СОЛОННИКОВА-ЕЙДЕЛЬМАНА

Степан ІВАСИШЕН, Галина ІВАСЮК

Національний технічний університет України
"Київський політехнічний інститут",
проспект Перемоги, 37, Київ, 03056
Чернівецький національний університет імені Юрія Федьковича,
вул. Коцюбинського, 2, Чернівці, 58012
e-mail: ivasyshen_sd@mail.ru, gala_ivasiyk@mail.ru

Подано основні результати, одержані при дослідженні означених авторами параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана. Вони стосуються коректної розв'язності цих задач у просторах Гельдера швидкозростаючих функцій, а також у відповідних просторах Соболєва-Слободецького для дещо вужчого класу таких задач.

Ключові слова: параболічна за Солонниковим система рівнянь, $\overrightarrow{2b}$-параболічна система, параболічна система в сенсі Солонникова-Ейдельмана, початкова задача, простір Гельдера швидкозростаючих функцій, простір Соболєва-Слободецького, коректна розв'язність.

Параболічні системи диференціальних рівнянь із частинними похідними, які ввів І.Г. Петровський [1], є досить широким класом систем, порівняно добре вивченим сьогодні. Дослідження таких систем відбувались у різних напрямах. Зокрема, в різноманітних функціональних просторах визначали коректну розв'язність крайових задач та задачі Коші для таких систем, узагальнювали означення параболічності системи за І.Г. Петровським.

У цій статті наведено результати, які вдалося отримати під час дослідження початкових задач для одного узагальненого класу параболічних систем, названого авторами системами Солонникова-Ейдельмана. Ці системи природно узагальнюють параболічні за Солонниковим системи [2, 3] (випадок узагальнення систем, параболічних за Петровським, коли порядок оператора, який діє на невідому функцію u_j у рівнянні з номером k, може залежати від j та від k) і системи, параболічні в розумінні Ейдельмана [4] (випадок узагальнення систем, параболічних за Петровським, коли диференціювання за різними просторовими змінними мають загалом різну вагу стосовно диференціювання за часовою змінною, тобто мають векторну параболічну вагу $\overrightarrow{2b} := (2b_1, \ldots, 2b_n)$).

Початкові задачі для таких систем вивчають (див. [5 – 8]) у просторах Гельдера швидкозростаючих функцій, у цьому разі одержують нові результати про коректну розв'язність у цих просторах задачі Коші для загальних систем, параболічних у розумінні І.Г. Петровського, С.Д. Ейдельмана та В.О. Солонникова. За певних припущень щодо параметрів, які визначають порядки диференціальних виразів із рівнянь системи та початкових умов [9], доводиться теорема про коректну розв'язність початкових задач для параболічних систем Солонникова-Ейдельмана в просторах Соболєва-Слободецького.

1. Формулювання параболічної початкової задачі Солонникова-Ейдельмана (задачі ПСЕ). Нехай n, N, b_1, $\ldots$, b_n – задані натуральні числа, b – найменше спільне кратне чисел b_1, $\ldots$, b_n; $m := (m_1, \ldots, m_n)$, $m_0 := 2b$, $m_j := b/b_j$, $j \in \{1, \ldots, n\}$; $\|\overline{\alpha}\| := \sum\limits_{j=0}^{n} m_j\alpha_j$, якщо $\overline{\alpha} := (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^{n+1}$; $\|\alpha\| := \sum\limits_{j=1}^{n} m_j\alpha_j$, якщо $\alpha := (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$; i – уявна одиниця;

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x) := (A_{kj}(t, x, \partial_t, \partial_x))_{k,j=1}^N;$$

$u := \mathrm{col}(u_1, \ldots, u_N)$, $f := \mathrm{col}(f_1, \ldots, f_N)$ – невідома та задана вектор-функції; $\Pi_H := \{(t, x) \in \mathbb{R}^{n+1} \,|t \in H, x \in \mathbb{R}^n\}$, якщо $H \subset \mathbb{R}$; T – задане додатне число.

Припустимо, що існують такі числа s_k і t_j із $\mathbb{Z}$, що $\max\limits_{k\in\{1,\ldots,N\}} s_k = 0$, степінь стосовно λ многочлена $A_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m)$, $\sigma\lambda^m := (\sigma_1\lambda^{m_1}, \ldots, \sigma_n\lambda^{m_n})$, не перевищує s_k+t_j (якщо $s_k+t_j < 0$, то $A_{kj} := 0$) і $\sum\limits_{k=1}^{N}(s_k+t_k) = 2br$, де r – степінь $\det A(t, x, p, i\sigma)$ як многочлена від p.

Нехай $A^0 := (A^0_{kj})_{k,j=1}^N$ – головна частина A, тобто $A^0_{kj}(t, x, p\lambda^{m_0}, i\sigma\lambda^m) = \lambda^{s_k+t_j}A^0_{kj}(t, x, p, i\sigma)$.

Розглянемо систему рівнянь

$$A(t, x, \partial_t, \partial_x)u(t, x) = f(t, x), \quad (t, x) \in \Pi_{[0,T]}, \tag{1}$$

для якої виконується умова

A) Система (1) – рівномірно параболічна система Солонникова-Ейдельмана в $\Pi_{[0,T]}$, тобто існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $(t, x) \in \Pi_{[0,T]}$ і $\sigma \in \mathbb{R}^n$ p-корені рівняння $\det A^0(t, x, p, i\sigma) = 0$ задовольняють нерівність

$$\mathrm{Re}\, p(t, x, \sigma) \leqslant -\delta\sum_{j=1}^{n}\sigma_j^{2b_j}.$$

Частинними випадками таких систем є системи, рівномірно параболічні за Петровським ($m_k = 1$, $k \in \{1, \ldots, n\}$, $s_j = 0$ і $t_j = 2bn_j$, $n_j \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, \ldots, N\}$), рівномірно $\overrightarrow{2b}$-параболічні за Ейдельманом ($m_k > 1$ для принаймні одного $k \in \{1, \ldots, n\}$, $s_j = 0$ і $t_j = 2bn_j$, $j \in \{1, \ldots, N\}$) і рівномірно параболічні за Солонниковим однорідної структури ($m_k = 1$, $k \in \{1, \ldots, n\}$).

Для системи (1), для якої виконується умова **A**, задавати початкові умови так, як для систем Петровського не можна. Задаватимемо їх так само, як для систем Солонникова з однорідною структурою [3] у вигляді

$$B(x, \partial_t, \partial_x)u(t, x)|_{t=0} = \varphi(x), \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2}$$

Тут $B(x,\partial_t,\partial_x) := (B_{kj}(x,\partial_t,\partial_x))_{k=1,j=1}^{r,\quad N}$ – матричний диференціальний вираз, $\varphi := \mathrm{col}(\varphi_1,\dots,\varphi_r)$ – задана вектор-функція. Припускається, що існують такі цілі числа p_k, що степінь стосовно λ многочлена $B_{kj}(x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m)$ не перевищує p_k+t_j, якщо $p_k+t_j<0$, то $B_{kl}:=0$. Головною частиною виразу B називається вираз $B^0 := (B^0_{kj})_{k=1,j=1}^{r,\quad N}$, де $B^0_{kj}(x,p\lambda^{m_0},i\sigma\lambda^m) = \lambda^{p_k+t_j}B^0_{kj}(x,p,i\sigma)$. Для забезпечення коректності задачі з умовою (2) матричний вираз B повинен задовольняти умову доповняльності, рівномірним варіантом якої є така умова.

B) Існує така стала $\delta_1>0$, що для всіх матриць $H^{(\rho)}$ (їхнє означення дивись у [3, 6]) і точок $x\in\mathbb{R}^n$ справджується нерівність

$$|\det H^{(\rho)}(x)|\geqslant \delta_1.$$

Задачу (1), (2), для якої виконуються умови **A** і **B**, називаємо *параболічною початковою задачею Солонникова-Ейдельмана* або коротко *задачею ПСЕ*.

2. Коректна розв'язність задачі ПСЕ в просторах Гельдера зростаючих функцій. Наведемо означення потрібних просторів Гельдера обмежених і зростаючих функцій. Функції з цих просторів можуть зростати при $|x|\to\infty$ не швидше, ніж функція

$$\Psi(t,x) := \exp\Big\{\sum_{j=1}^n k_j(t,a_j)|x_j|^{q_j}\Big\},\quad (t,x)\in\Pi_{[0,T]},$$

в якій $q_j := 2b_j/(2b_j-1)$, $k_j(t,a_j) := c_0a_j(c_0^{2b_j-1}-a_j^{2b_j-1}t)^{1-q_j}$, $j\in\{1,\dots,n\}$, де c_0, a_1, …, a_n – задані числа такі, що $0<c_0<c$ (c – стала з оцінок (12) із [10] для фундаментального розв'язку рівняння $\det A^0(\beta,y,\partial_t,\partial_x)u=0$), $a_j\geqslant 0$, $j\in\{1,\dots,n\}$, $T<\min\limits_j(c_0/a_j)^{2b_j-1}$.

Крім введених вище позначень, будемо використовувати ще такі:
$\overrightarrow{a} := (a_1,\dots,a_n)$, $\overrightarrow{k}(t,\overrightarrow{a}) := (k_1(t,a_1),\dots,k_n(t,a_n))$;
$\Delta_t^\tau f(t,\cdot) := f(t,\cdot)-f(\tau,\cdot)$, $\Delta_{x_j}^{y_j}f(\cdot,x) := f(\cdot,x)-f(\cdot,x(y_j))$,
$x(y_j) := (x_1,\dots,x_{j-1},y_j,x_{j+1},\dots,x_n)$, $j\in\{1,\dots,n\}$;
$\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} := \partial_t^{\alpha_0}\partial_x^\alpha$, $\partial_x^\alpha := \partial_{x_1}^{\alpha_1}\dots\partial_{x_n}^{\alpha_n}$, $\overline{\alpha} := (\alpha_0,\alpha)\in\mathbb{Z}_+^{n+1}$, $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_n)\in\mathbb{Z}_+^n$.

Нехай l і λ – задані числа відповідно з множин $\mathbb{Z}_+$ і $(0,1)$. Будемо користуватися такими просторами:

$H_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}$ – простір функцій u: $\Pi_{[0,T]}\to\mathbb{C}$, які мають неперервні похідні $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}u$, $\|\overline{\alpha}\|\leqslant l$, і скінченну норму

$$\|u\|_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \ll u\gg_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} + \sum_{j=0}^l <u>_{j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},$$

де

$$\ll u\gg_{l+\lambda,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \sum_{j=1}^n <u>_{(l+\lambda)/m_j,x_j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} + <u>_{(l+\lambda)/(2b),t,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},$$

$$<u>_{(l+\lambda)/m_j,x_j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})} := \sum_{0\leqslant l-\|\overline{\alpha}\|<m_j} <\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}}u>_{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/m_j,\,x_j,[0,T]}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})},$$

$$<u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l+\lambda)/(2b),t,[0,T]}:=\sum_{0\leqslant l-\|\overline{\alpha}\|<2b}<\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{(l-\|\overline{\alpha}\|+\lambda)/(2b),t,[0,T]},$$

$$<u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,x_j,[0,T]}:=\sup_{\substack{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}\\ y_j\in\mathbb{R},\,x_j\neq y_j}}(|\Delta^{y_j}_{x_j}u(t,x)||x_j-y_j|^{-\lambda}(\Psi(t,x)+\Psi(t,x(y_j)))^{-1}),$$

$$<u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{\lambda,t,[0,T]}:=\sup_{\substack{\{t,\beta\}\subset[0,T],\,t\neq\beta\\ x\in\mathbb{R}^n}}(|\Delta^{\beta}_{t}u(t,x)|\,|t-\beta|^{-\lambda}(\Psi(t,x)+\Psi(\beta,x))^{-1}),$$

$$<u>^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{j,[0,T]}:=\sum_{\|\overline{\alpha}\|=j}\sup_{(t,x)\in\Pi_{[0,T]}}(|\partial^{\overline{\alpha}}_{t,x}u(t,x)|(\Psi(t,x))^{-1});$$

$C^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda}$ – простір функцій v: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{C}$, для яких існують неперервні похідні $\partial^{\alpha}_x v$, $\|\alpha\|\leqslant l$, і є скінченною норма

$$|v|^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda}:=[v]^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda}+\sum_{j=0}^{l}<v>^{\overrightarrow{a}}_{j},$$

де

$$[v]^{\overrightarrow{a}}_{l+\lambda}:=\sum_{j=1}^{n}\sum_{0\leqslant l-\|\alpha\|<m_j}<\partial^{\alpha}_x v>^{\overrightarrow{a}}_{(l-\|\alpha\|+\lambda)/m_j,\,x_j},$$

$$<v>^{\overrightarrow{a}}_{\lambda,x_j}:=\sup_{\substack{x\in\mathbb{R}^n\\ y_j\in\mathbb{R},\,x_j\neq y_j}}(|\Delta^{y_j}_{x_j}v(x)||x_j-y_j|^{-\lambda}(\Psi(0,x)+\Psi(0,x(y_j)))^{-1}),$$

$$<v>^{\overrightarrow{a}}_{j}:=\sum_{\|\alpha\|=j}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}(|\partial^{\alpha}_x v(x)|(\Psi(0,x))^{-1});$$

$H_{l+\lambda,[0,T]}:=H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{0})}_{l+\lambda,[0,T]}$, $C_{l+\lambda}:=C^{\overrightarrow{0}}_{l+\lambda}$, де $\overrightarrow{0}:=(0,\ldots,0)$;

$\overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[0,T]}$ – підпростір простору $H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+\lambda,[0,T]}$, елементи якого разом з усіма своїми похідними дорівнюють нулеві при $t=0$;

$\prod\limits_{j=1}^{N}H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{r_j+\lambda,[0,T]}$, $\prod\limits_{j=1}^{N}\overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{r_j+\lambda,[0,T]}$ і $\prod\limits_{j=1}^{r}C^{\overrightarrow{a}}_{r_j+\lambda}$ – декартові добутки відповідних просторів з індексами $r_j\in\mathbb{Z}_+$.

Крім умов **A** і **B**, припускатимемо виконаною також таку умову.

C) Коефіцієнти диференціальних виразів A_{kj} і B_{sj} належать відповідно до просторів $H_{l-s_k+\lambda,[0,T]}$ і $C_{l-p_s+\lambda}$, $\{k,j\}\subset\{1,\ldots,N\}$, $s\in\{1,\ldots,r\}$.

Теорема 1. *Нехай l і λ – задані числа з множин $\mathbb{Z}_+$ і $(0,1)$. Якщо виконуються умови **A**, **B** та **C**, то для будь-яких $f\in\prod\limits_{j=1}^{N}H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[0,T]}$ і $\varphi\in\prod\limits_{s=1}^{r}C^{\overrightarrow{a}}_{l-p_s+\lambda}$ існує єдиний розв'язок $u\in\prod\limits_{j=1}^{N}H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$ задачі (1), (2), для якого справджується оцінка*

$$\sum_{j=1}^{N}\|u_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}\leqslant C\left(\sum_{j=1}^{N}\|f_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[0,T]}+\sum_{s=1}^{r}|\varphi_s|^{\overrightarrow{a}}_{l-p_s+\lambda}\right),\qquad(3)$$

в якій стала C залежить тільки від відповідних норм коефіцієнтів задачі, сталих δ і δ_1 з умов $\boldsymbol{A}$ *і* $\boldsymbol{B}$ *та чисел n, N, b_j, t_k, s_k, p_s, l, λ і T.*

З теореми 1 випливає, що умова параболічності системи (1) достатня, щоб справджувалась оцінка (3) для будь-якого розв'язку $u \in \prod_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$ задачі (1), (2). Виявляється, що ця умова є необхідною, тому правильна така теорема.

Теорема 2. *Нехай система (1) має структуру параболічної системи Солонникова-Ейдельмана з параметрами b_j, t_k, s_k, p_s і r, число початкових умов (2) дорівнює r і диференціальний вираз $B(x,\partial_t,\partial_x)$ задовольняє умову* $\boldsymbol{B}$*, коефіцієнти диференціальних виразів A і B задовольняють умову* $\boldsymbol{C}$ *з деякими числами $l \in \mathbb{Z}_+$ і $\lambda \in (0,1)$. Для того, щоб система (1) задовольняла умову* $\boldsymbol{A}$*, необхідно й достатньо, щоб існувала така стала $C > 0$, що для всіх вектор-функцій $u \in \prod_{j=1}^{N} H^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]}$ справджується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[0,T]} \leqslant C\Big(\sum_{k,j=1}^{N} \|A_{kj}u_j\|^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_k+\lambda,[0,T]} + \sum_{k=1}^{r}\sum_{j=1}^{N} |B_{kj}u_j|_{t=0}|^{\overrightarrow{a}}_{l-p_k+\lambda}\Big).$$

Доведення теореми 1 у модельному випадку, тобто, коли диференціальні вирази системи (1) та початкових умов (2) містять лише групу старших членів зі сталими коефіцієнтами, детально описано в [6]. У загальному випадку доведення цієї теореми проводять за схемою доведення відповідної теореми для крайових задач для параболічних за Солонниковим систем з [3]. Головні її кроки – зведення загальної параболічної початкової задачі Солонникова-Ейдельмана до задачі з нульовими початковими даними, у цьому разі доводиться рівносильність відповідних оцінок розв'язків цих задач і доведення коректної розв'язності такої параболічної початкової задачі Солонникова-Ейдельмана з нульовими початковими даними в шарі $\Pi_{[t_0,t_0+\tau]}$, $0 \leqslant t_0 < t_0+\tau \leqslant T$, малої товщини τ

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)w(t,x) = g(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_{[t_0,t_0+\tau]}, \quad w \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l+t_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]},$$

$$g \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{H}{}^{\overrightarrow{k}(\cdot,\overrightarrow{a})}_{l-s_j+\lambda,[t_0,t_0+\tau]}. \tag{4}$$

Доведення однозначної розв'язності задачі (4) та відповідних оцінок для її розв'язків ґрунтується на побудові та детальному дослідженні властивостей регуляризатора цієї задачі. Регуляризатор будують за допомогою операторів, які розв'язують відповідні модельні задачі. Модельні задачі виражаються через потенціали, породжені фундаментальним розв'язком одного параболічного за Ейдельманом рівняння довільного порядку зі сталими коефіцієнтами. Оцінки таких потенціалів проведено в [10].

Теорема 2 доведена у [8] методом від супротивного.

3. Коректна розв'язність задачі ПСЕ в просторах Соболєва-Слободецького. Розглянемо задачу (1), (2), для якої виконується умова:

A′) система (1) задовольняє умову **A** причому числа s_k і t_j є кратними $2b$, тобто $s_k = 2bs'_k$, $t_j = 2bt'_j$, $\{k, j\} \subset \{1, \dots, N\}$, де s'_k і t'_j – цілі числа;

B′) диференціальний вираз B з початкової умови (2) задовольняє умову **B** і $p_k = 2bp'_k$, $k \in \{1, \dots, r\}$, де p'_k – цілі числа.

Наведемо означення потрібних функціональних просторів. Нехай l – невід'ємне ціле число кратне $2b$, s – додатне число, число $p > 1$ і $\Pi_T := \Pi_{[0,T]}$.

Через $W^l_p(\Pi_T)$ позначимо замикання множини гладких і фінітних за x функцій $u : \Pi_T \to \mathbb{C}$ за нормою

$$\| u \|^{\Pi_T}_{p,\,l} := \sum_{\|\overline{\alpha}\|<l} \langle\, \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u \,\rangle^{\Pi_T}_{p,\,0} + |\, u \,|^{\Pi_T}_{p,\,l},$$

де

$$|\, u \,|^{\Pi_T}_{p,\,l} := \sum_{\|\overline{\alpha}\|=l} \langle\, \partial^{\overline{\alpha}}_{t,x} u \,\rangle^{\Pi_T}_{p,\,0}, \quad \langle\, u \,\rangle^{\Pi_T}_{p,\,0} := \left(\int\limits_{\Pi_T} |\, u(t,x) \,|^p dt dx \right)^{1/p}.$$

Диференціальні властивості "слідів" при $t = \tau$ функцій із простору $W^l_p(\Pi_T)$ описуються в термінах простору $B^s_p(\mathbb{R}^n)$, який означується як замикання множини гладких і фінітних функцій $v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ за нормою

$$\| v \|^{\mathbb{R}^n}_{p,\,s} := \sum_{\|\alpha\|<s} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} |\, \partial^{\alpha}_x v(x) \,|^p dt dx \right)^{1/p} + [\, v \,]^{\mathbb{R}^n}_{p,\,s},$$

де

$$[\, v \,]^{\mathbb{R}^n}_{p,\,s} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{0\leqslant s-\|\alpha\|<m_j} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\, \Delta^{y_j}_{x_j} \partial^{\alpha}_x v(x) \,|^p}{|x_j - y_j|^{1+p(s-\|\alpha\|)/m_j}} dy_j \right)^{1/p},$$

якщо s – дробове число, і

$$[\, v \,]^{\mathbb{R}^n}_{p,\,s} := \sum_{j=1}^{n} \sum_{\|\alpha\|=s-1} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^n} dx \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{|\, (\Delta^2)^{y_j}_{x_j} \partial^{\alpha}_x v(x) \,|^p}{|x_j - y_j|^{1+p}} dy_j \right)^{1/p},$$

якщо s є цілим числом. Тут $(\Delta^2)^{y_j}_{x_j} f(x) := f(x) - 2f(x(\frac{x_j+y_j}{2})) + f(x(y_j))$, $j \in \{1, \dots, n\}$.

Множину елементів $u \in W^l_p(\Pi_T)$, які задовольняють нульові початкові умови

$$\partial^j_t u|_{t=0} = 0, \quad j \in \left\{0, 1, \dots, \frac{l}{2b} - 1\right\},$$

назвемо простором $\overset{\circ}{W}{}^{\,l}_{\,p}(\Pi_T)$.

Через $\prod\limits_{j=1}^{N} W^{\,l_j}_{\,p}(\Pi_T)$, $\prod\limits_{j=1}^{N} \overset{\circ}{W}{}^{\,l_j}_{\,p}(\Pi_T)$ і $\prod\limits_{j=1}^{r} B^{\,r_j}_{\,p}(\mathbb{R}^n)$ позначаємо декартові добутки відповідних просторів з цілими невід'ємними індексами l_j, кратними $2b$, і додатними індексами r_j.

Для дробового додатного числа s користуватимемось просторами Гельдера обмежених функцій $C_s(\mathbb{R}^n)$, які означені в пункті 2.

Теорема 3. *Нехай l – невід'ємне ціле число, кратне $2b$; виконуються умови $\mathbf{A}'$ і $\mathbf{B}'$; коефіцієнти диференціальних виразів A_{kj}, $\{k,j\} \subset \{1,\ldots,N\}$, мають неперервні та обмежені похідні узагальненого порядку $l - s_k$, а коефіцієнти диференціальних виразів B_{kj}, $k \in \{1,\ldots,r\}$, $j \in \{1,\ldots,N\}$, належать до просторів $C_{l-p_k-2b/p+\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$, де ε – досить мале додатне число. Тоді для будь-яких $f \in \prod\limits_{j=1}^{N} W_p^{l-s_j}(\Pi_T)$ і $\varphi \in \prod\limits_{j=1}^{r} B_p^{l-p_j-2b/p}(\mathbb{R}^n)$ існує єдиний розв'язок $u \in \prod\limits_{j=1}^{N} W_p^{l+t_j}(\Pi_T)$ задачі (1), (2), для якого справджується оцінка*

$$\sum_{j=1}^{N} \|u_j\|_{p,\,l+t_j}^{\Pi_T} \leqslant C \left(\sum_{j=1}^{N} \|f_j\|_{p,\,l-s_j}^{\Pi_T} + \sum_{j=1}^{r} \|\varphi_j\|_{p,\,l-p_j-2b/p}^{\mathbb{R}^n} \right),$$

в якій стала C залежить тільки від відповідних норм коефіцієнтів задачі, сталих δ і δ_1 з умов $\mathbf{A}'$ і $\mathbf{B}'$ та чисел n, N, b_j, t_j, s_k, p_k, l і T.

Доведення теореми 3 проводять за схемою доведення в [3] відповідної теореми для крайових задач для параболічних за Солонниковим систем і доведення теореми 1 (див. [8]). Центральним моментом доведення є вивчення такої задачі з нульовими початковими даними в шарі Π_τ малої товщини $\tau > 0$

$$A(t,x,\partial_t,\partial_x)v(t,x) = g(t,x), \quad (t,x) \in \Pi_\tau,$$

$$v \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{W}{}_p^{l+t_j}(\Pi_\tau), \qquad g \in \prod_{j=1}^{N} \overset{\circ}{W}{}_p^{l-s_j}(\Pi_\tau). \tag{5}$$

Для цієї задачі доводиться така теорема.

Теорема 4. *Нехай виконуються умови теореми 3. Тоді існує таке число $\tau_0 > 0$, що для будь-якого $\tau \in (0,\tau_0]$ задача (5) однозначно розв'язна і для її розв'язку справджується нерівність*

$$\sum_{j=1}^{N} \|v_j\|_{p,\,l+t_j}^{\Pi_\tau} \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \|g_j\|_{p,\,l-s_j}^{\Pi_\tau},$$

в якій стала C залишається обмеженою при $\tau \to 0$.

Як і в пункті 2, для доведення теореми 4 використовується регуляризатор задачі. Його властивості в просторах Соболєва-Слободецького досліджуються за допомогою оцінок відповідних півнорм потенціалів, породжених фундаментальним розв'язком модельного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння довільного порядку. Ці оцінки подаємо в наступному пункті.

4. Властивості потенціалів модельного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння. Розглянемо $\overrightarrow{2b}$-параболічне рівняння вигляду

$$L(\partial_t,\partial_x)u := \Big(a_0 \partial_t^r + \sum_{\substack{\|\overline{\alpha}\|=2br \\ (\alpha_0<r)}} a_{\overline{\alpha}} \partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} \Big) u = 0, \tag{6}$$

коефіцієнти якого є сталими, причому $a_0 \neq 0$ та існує така стала $\delta > 0$, що для будь-яких $\sigma := (\sigma_1, \dots, \sigma_n) \in \mathbb{R}^n$ λ-корені λ_j, $j \in \{1, \dots, r\}$, рівняння $L(\lambda, i\sigma) = 0$ задовольняють умову

$$\mathrm{Re}\lambda_j \leqslant -\delta \sum_{k=1}^{n} \sigma_k^{2b_k}.$$

Нехай функція $\Gamma(t,x)$, $(t,x) \neq (0,0)$, є фундаментальним розв'язком рівняння (6). Ця функція породжує об'ємний потенціал

$$U_f(t,x) := \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t-\tau, x-\xi) f(\tau,\xi) d\xi, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{7}$$

та інтеграл Пуассона

$$V_\varphi(t,x) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t, x-\xi)\varphi(\xi) d\xi, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \tag{8}$$

Одержимо оцінки півнорм $|\cdot|_{p,\,l}^{\Pi_T}$ інтегралів (7) і (8), припускаючи, що функції f і φ досить гладкі і фінітні. У цьому разі користуватимемося такими властивостями фундаментального розв'язку Γ, які доводять так само, як у [3, 11, 12] для параболічних за Петровським рівнянь довільного порядку і $\overrightarrow{2b}$-параболічних рівнянь першого порядку:

1) справджуються оцінки

$$|\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} \Gamma(t,x)| \leqslant C'_{\overline{\alpha}} t^{r-(M+\|\overline{\alpha}\|)/(2b)} \exp\{-c \sum_{j=1}^{n} t^{1-q_j} |x_j|^{q_j}\} \leqslant$$

$$\leqslant C_{\overline{\alpha}} \left(t + \sum_{j=1}^{n} |x_j|^{2b_j} \right)^{r-(M+\|\overline{\alpha}\|)/(2b)}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \overline{\alpha} \in \mathbb{Z}_+^{n+1},$$

де $M := \sum\limits_{j=0}^{n} m_j$, $C'_{\overline{\alpha}}$, $C_{\overline{\alpha}}$ і c – додатні сталі;

2) функція $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} \Gamma(t,x)$ – парна за змінною x_j, якщо парним є індекс α_j;

3) правильні рівності

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Gamma(t,x) dx = \frac{t^{r-1}}{a_0 (r-1)!}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t^{r-1} \Gamma(t,x) dx = \frac{1}{a_0}, \quad t > 0.$$

Лема 1. *Для будь-якого $l = 2bk$, $k \in \mathbb{Z}_+$, справджується оцінка*

$$|U_f|_{p,\, l+2br}^{\Pi_T} \leqslant C |f|_{p,\, l}^{\Pi_T}. \tag{9}$$

Доведення. Оскільки $\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} U_f = U_{\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} f}$, то оцінку (9) достатньо довести для $l = 0$. У цьому випадку доведення оцінки (9) проводиться аналогічно до доведення відповідної оцінки для рівняння теплопровідності в [13], яке ґрунтується на теоремі про мультиплікатори в інтегралах Фур'є з [14]. У цьому випадку використовують такі рівності для перетворення Фур'є F за всіма змінними t і x інтеграла (7):

$$F[U_f](\xi_0, \xi) := (2\pi)^{-(n+1)/2} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \exp\{-i\xi_0 t - i(\xi, x)\} U_f(t,x) dt dx =$$

$$= \frac{(2\pi)^{(n+1)/2}}{L(i\xi_0, i\xi)} F[f](\xi_0, \xi),$$

$$F[\partial_{t,x}^{\overline{\alpha}} U_f](\xi_0, \xi) := \frac{(2\pi)^{(n+1)/2}(i\xi_0)^{\alpha_0}(i\xi)^{\alpha}}{L(i\xi_0, i\xi)} F[f](\xi_0, \xi), \quad (\xi_0, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \|\overline{\alpha}\| = 2br.$$

Для мультиплікаторів $\Lambda^{(\overline{\alpha})}(\xi_0, \xi) := \frac{(2\pi)^{(n+1)/2}(i\xi_0)^{\alpha_0}(i\xi)^{\alpha}}{L(i\xi_0, i\xi)}$, $(\xi_0, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1}$, очевидно, виконуються потрібні нерівності

$$|\xi_{j_1} \ldots \xi_{j_k} \partial_{\xi_{j_1}} \ldots \partial_{\xi_{j_k}} \Lambda^{(\overline{\alpha})}(\xi_0, \xi)| \leqslant C, \quad (\xi_0, \xi) \in \mathbb{R}^{n+1},$$
$$j_k \in \{0, 1, \ldots, n\}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n+1\}, \quad \|\overline{\alpha}\| = 2br.$$

□

Лема 2. *Якщо $l = 2bk$, $k \in \mathbb{Z}_+$ і $l > 2b(r-1) + 2b/p$, то правильною є оцінка*

$$|V_\varphi|_{p,\,l}^{\Pi_T} \leqslant C[\varphi]_{p,\,l-2b(r-1)-2b/p}^{\mathbb{R}^n}.$$

Доведення. Воно досить громіздке і проводиться аналогічно до доведення теореми 3.3 в [3]. Для доведення істотно використовують теорему про оцінки інтегральних операторів у трансляційно-інваріантних нормах з [15], а також наведені вище властивості фундаментального розв'язку Г рівняння (6). □

Список використаної літератури

1. *Петровский И.Г.* О проблеме Коши для систем линейных уравнений с частными производными в области неаналитических функций / *Петровский И.Г.* // Бюл. Моск. ун-та. Математика и механика. – 1938. – Т. 1, № 7. – С. 1-72.
2. *Солонников В.А.* О краевых задачах для общих параболических систем / *Солонников В.А.* // Докл. АН СССР. – 1964. – Т. 157, № 1. – С. 56-59.
3. *Солонников В.А.* О краевых задачах для линейных параболических систем дифференциальных уравнений общего вида / *Солонников В.А.* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1965. – Т. 83. – С. 3-163.
4. *Эйдельман С.Д.* Об одном классе параболических систем / *Эйдельман С.Д.* // Докл. АН СССР. – 1960. – Т. 133, № 1. – С. 40-43.
5. *Івасюк Г.П.* Початкова задача для модельних параболічних за Солонниковим систем неоднорідної структури / *Івасюк Г.П.* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2005. – Вип. 269. – С. 49-52.
6. *Івасишен С.Д.* Параболічні за Солонниковим системи квазіоднорідної структури / *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* // Укр. мат. журн. – 2006. – Т. 58, № 11. – С. 1501-1510.
7. *Івасишен С.Д.* Початкові задачі для параболічних систем Солонникова-Ейдельмана / *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* // Доп. НАН України. – 2007. – № 9. – С. 7-11.
8. *Івасишен С.Д.* Коректна розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана / *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* // Укр. мат. журн. – 2009. – Т. 61, № 5. – С. 650-671.
9. *Івасишен С.Д.* Про коректну розв'язність параболічних початкових задач Солонникова-Ейдельмана в узагальнених просторах Соболєва / *Івасишен С.Д., Івасюк Г.П.* // Доп. НАН України. – 2010. – № 10. – С. 11-14.
10. *Івасюк Г.П.* Про властивості потенціалів модельного $\overrightarrow{2b}$-параболічного рівняння довільного порядку / *Івасюк Г.П.* // Наук. вісн. Чернів. ун-ту. – 2006. – Вип. 288. – С. 51-56.

11. *Ивасишен С.Д.* $\overrightarrow{2b}$-параболические системы / *Ивасишен С.Д., Эйдельман С.Д.* // Тр. сем. по функц. анализу. – 1968. – Вып. 1. – С. 3-175, 271-273.
12. *Eidelman S.D.* Analytic methods in the theory of differential and pseudo-differential equations of parabolic type / *Eidelman S.D., Ivasyshen S.D., Kochubei A.N.* // Operator Theory: Adv. and Appl. – 2004. – Vol. 152. – P. 390.
13. *Солонников В.А.* Априорные оценки для уравнений второго порядка параболического типа / *Солонников В.А.* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1964. – Т. 70. – С. 133-212.
14. *Михлин С.Г.* Интегралы Фурье и кратные сингулярные интегралы / *Михлин С.Г.* // Вестн. Ленинградского гос. ун-та. – 1957. – № 7, Вып. 2. – С. 143-155.
15. *Головкин К.К.* Оценки интегральных операторов в трансляционно-инвариантных нормах / *Головкин К.К., Солонников В.А.* // Тр. Мат. ин-та АН СССР. – 1964. – Т. 70. – С. 47-58.

Стаття: надійшла до редакції 08.02.2011
прийнята до друку 21.09.2011

PARABOLIC INITIAL PROBLEMS OF SOLONNIKOV-EIDELMAN

Stepan IVASYSHEN, Halyna IVASYUK

National Technical University of Ukraine
"Kyiv Polytechnic Institute",
Prospect Peremohy, 37, Kyiv, 03056
Yuriy Fedkovych National University of Chernivtsi
Kotsubinsky Str., 2, Chernivtsi, 58012
e-mail: ivasyshen_sd@mail.ru, gala_ivasiyk@mail.ru

Solonnikov-Eidelman's parabolic initial problems were defined and studied by the authors in the previous papers. The present paper contain the basic results of an investigation for such problems. These results deals with a correct solvability of Solonnikov-Eidelman's parabolic initial problems in Hölder spaces rapidly growing functions and the analogous results for more narrow class of such problems in the corresponding Sobolev-Slobodeckij spaces also are presented.

Key words: parabolic on Solonnikov system equations, 2b-parabolic system, parabolic system in sense of Solonnikov-Eidelman's, initial problem, Hölder space of increasing functions, Sobolev-Slobodeckij space, correct resolvability.

ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ НАЧАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ СОЛОННИКОВА-ЕЙДЕЛЬМАНА

Степан ИВАСИШЕН, Галина ИВАСЮК

Национальный технический университет Украины
"Киевский политехнический институт",
проспект Победы, 37, Киев, 03056
Черновицкий национальный университет имени Юрия Федьковича,
ул. Коцюбинского, 2, Черновцы, 58012
e-mail: ivasyshen_sd@mail.ru, gala_ivasiyk@mail.ru

Приведены основные результаты, полученные при исследовании определенных авторами параболических начальных задач Солонникова-Ейдельмана. Они касаются корректной разрешимости задач в пространствах Гёльдера быстровозростающих функций, а также в соответствующих пространствах Соболева-Слободецкого для более узкого класса таких задач.

Ключевые слова: параболическая за Солонниковым система уравнений, $\overrightarrow{2b}$-параболическая система, параболическая система в смысле Солонникова-Ейдельмана, начальная задача, пространство Гельдера быстровозростающих функций, пространство Соболева-Слободецкого, корректная разрешимость.