ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 89–97
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 89–97

УДК 517.53

ВЛАСТИВІСТЬ МОНОТОННОСТІ СТОСОВНО НУЛІВ І ПОЛЮСІВ НЕВАНЛІННОВОЇ ХАРАКТЕРИСТИКИ МЕРОМОРФНИХ ФУНКЦІЙ

Микола ЗАБОЛОЦЬКИЙ, Ігор ДЕЙНЕКА

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: ihordeyneka@gmail.com

Побудовано мероморфні в $\mathbb{C}$ функції f_1, f_2 довільного порядку $\rho \in (2-\operatorname{arctg} 2/\pi;\, 2)$ з додатними нулями та від'ємними полюсами, усереднені лічильні функції і неванліннові характеристики яких задовольняють умови $N(r,0,f_1) \leq N(r,0,f_2)$, $N(r,\infty,f_1) \leq N(r,\infty,f_2)$ для $r \geq 0$ і $T(r,f_1) > T(r,f_2)$ для всіх достатньо великих r. Метод побудови не дає змоги отримати відповідь про існування таких функцій порядку зростання $\rho \in [1; 2-\operatorname{arctg} 2/\pi]$.

Ключові слова: мероморфна функція, порядок функції, тип функції, неванліннова характеристика.

1. Вступ. Нехай f – трансцендентна мероморфна в $\mathbb{C}$ (надалі мероморфна) функція, тобто$f(z) = g_1(z)/g_2(z)$, де g_1, g_2 – цілі функції, з яких хоча б одна була відмінна від многочлена. Будемо користуватися стандартними позначеннями неванліннової теорії розподілу значень (див., наприклад, [1]). В [2] (див. також [3]) знайдено точні оцінки зверху величин типу $\overline{\Delta}_f = \varlimsup\limits_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)$ та нижнього типу $\underline{\Delta}_f = \varliminf\limits_{r\to\infty} T(r,f)/V(r)$ для мероморфних функцій нульового роду через величини типу $\overline{\Delta}_{N_0} = \varlimsup\limits_{r\to\infty} N_0(r,f)/V(r)$ і нижнього типу $\underline{\Delta}_{N_0} = \varliminf\limits_{r\to\infty} N_0(r,f)/V(r)$ функції $N_0(r,f) = \max\{N(r,0,f),\ N(r,\infty,f)\}$. Тут $V(r) = r^{\rho(r)}$, $\rho(r)$- уточнений порядок функції f [1, с. 69].

Зауважимо, що для мероморфних функцій нульового роду виконується співвідношення $T(r,f) = o(r)$, $r \to \infty$, тобто функція має щонайбільше порядок одиницю і мінімальний тип.

Головними передумовами для визначення цих оцінок були дві такі властивості неванліннової характеристики.

Теорема А. *Нехай f – мероморфна функція роду нуль, $\hat{f}$ – мероморфна функція з додатними нулями і від'ємними полюсами такими, що для всіх $r > 0$*

$$N(r,0,f) = N(r,0,\hat{f}), \quad N(r,\infty,f) = N(r,\infty,\hat{f}).$$

Тоді $T(r,f) \le T(r,\hat{f})$.

Теорема Б. *Нехай $f_1,\ f_2$ – мероморфні функції роду нуль з додатними нулями і від'ємними полюсами. Якщо для всіх $r > 0$*

$$N\left(r,0,f_1\right) \le N\left(r,0,f_2\right), \quad N\left(r,\infty,f_1\right) \le N\left(r,\infty,f_2\right),$$

то $T\left(r,f_1\right) \le T\left(r,f_2\right)$.

В [5, с. 119, проблема 7] М.В. Заболоцький сформулював задачу: Чи зберігається властивість монотонності стосовно нулів і полюсів неванліннових характеристик (див. теорему Б) для мероморфних функцій з додатними нулями та від'ємними полюсами, порядок зростання яких більший, ніж нульовий рід? Зокрема, яке найменше значення порядку можуть мати такі мероморфні функції $f_1,\ f_2$, щоб

$$N\left(r,0,f_1\right) \le N\left(r,0,f_2\right), \quad N\left(r,\infty,f_1\right) \le N\left(r,\infty,f_2\right), \quad r > 0, \tag{1}$$

а

$$T(r,f_1) \ge T(r,f_2), \quad r \ge r_0, \tag{2}$$

де $r_0 > 0$ – деяке фіксоване число?

Ми подаємо часткове розв'язання цієї проблеми.

2. Формулювання результатів. Позначимо через $M(+,-)$ клас мероморфних функцій з додатними нулями та від'ємними полюсами.

Теорема 1. *Нехай $1 < \rho < 2$, $\Delta > 0$, $\Delta_1 = \dfrac{\cos\pi\rho - \Delta}{\sin\pi\rho}$, $f \in M(+,-)$, $n(r,0,f) \sim r^\rho$, $n(r,\infty,f) \sim \Delta r^\rho$, $r \to \infty$. Тоді:*

а) $T(r,f) \sim \dfrac{2r^\rho}{\rho\left|\sin\pi\rho\right|}\left(\sin\dfrac{\pi\rho}{2} - \sin\pi\rho\right)$, якщо $\Delta = 1$;

б) $T(r,f) \sim \dfrac{r^\rho}{\rho\left|\sin\pi\rho\right|}\left(\dfrac{\Delta\Delta_1 + \Delta_1\left|\cos\pi\rho\right| + \left|\sin\pi\rho\right|}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + (\Delta+1)\left|\sin\pi\rho\right|\right)$, якщо $1 < \rho \le 3/2$;

в) $T(r,f) \sim \dfrac{2r^\rho}{\rho\left|\sin\pi\rho\right|}\left(\dfrac{\Delta\Delta_1 - \Delta_1\left|\cos\pi\rho\right| + \left|\sin\pi\rho\right|}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \dfrac{\Delta}{2}\left|\sin\pi\rho\right|\right)$, якщо $3/2 < \rho < 2$, $0 < \Delta < \cos\pi\rho$;

г) $T(r,f) \sim \dfrac{r^\rho}{\rho\left|\sin\pi\rho\right|}\left(\left|\sin\pi\rho\right|(2+\cos\pi\rho)\right)$, якщо $3/2 < \rho < 2$, $\Delta = \cos\pi\rho$.

Теорема 2. *Для довільного $\rho \in \left(2 - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg} 2;\ 2\right)$ існують функції $f_1,\ f_2$ класу $M(+,-)$ порядку ρ, які задовольняють співвідношення (1) і (2).*

Розглянемо два рівняння

$$\sin\frac{\beta}{2} - \sin\beta = 1 \tag{3}$$

і
$$-\sin\beta\,(2+\cos\beta)=1. \tag{4}$$

Легко бачити (див. лему 3), що на проміжку $\left(\dfrac{3\pi}{2};2\pi\right)$ кожне з цих рівнянь має один корінь, який позначимо β_0.

Теорема 3. *Для довільного $\rho\in\left(\dfrac{\beta_0}{\pi};\ 2\right)$ існують функції $f_1,\ f_2$ класу $M(+,-)$ порядку ρ, які задовольняють співвідношення (1) і (2).*

Зауваження 1. Неважко показати, що $\dfrac{\beta_0}{\pi}\approx 1,7753$, якщо β_0 – корінь рівняння (3); $\dfrac{\beta_0}{\pi}\approx 1,7291$, якщо β_0 – корінь рівняння (4); $2-\dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2\approx 1,6476$.

3. Допоміжні твердження та доведення результатів. Для доведення теорем 1-3 будемо використовувати леми.

Лема 1 ([1], с. 59-60)**.** *Нехай E – деяка вимірна підмножина відрізку $[0;2\pi]$, $\Phi(\varphi)$ – інтегровна невід'ємна функція на E, f – мероморфна функція, $T(r,f)=O(r^{\rho(r)})$, $r\to\infty$ і для довільного $\delta>0$ існує така множина $E_\delta\subset E$, $\operatorname{mes}E_\delta=\delta$, що*
$$\ln^+\left|f(re^{i\varphi})\right|=\Phi(\varphi)r^{\rho(r)}+o(r^{\rho(r)}),\quad r\to\infty,$$
рівномірно стосовно φ при $\varphi\in E\backslash E_\delta$. Тоді
$$\int\limits_E\ln^+\left|f(re^{i\varphi})\right|d\varphi=(1+o(1))r^{\rho(r)}\int\limits_E\Phi(\varphi)d\varphi,\quad r\to\infty.$$

Лема 2. *Нехай $1<\rho<2$, $x\ge 0$, $y=y(x)=\dfrac{\cos\pi\rho-x}{\sin\pi\rho}$,*
$$g_1(x)=g_1(x;\rho)=\frac{xy-y\cos\pi\rho+|\sin\pi\rho|}{\sqrt{1+y^2}}+(1+x)\left|\sin\pi\rho\right|,$$
$$g_2(x)=g_2(x;\rho)=\frac{xy-y\cos\pi\rho+|\sin\pi\rho|}{\sqrt{1+y^2}}+\frac{x}{2}\left|\sin\pi\rho\right|.$$
Тоді:
а)
$$(\forall\,\rho\in(1;3/2])\quad(\forall\,x>0):\quad g_1(x)>g_1(0)=1-\sin\pi\rho; \tag{5}$$
б)
$$\left(\forall\,\rho\in\left(2-\frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2;2\right)\right)\quad(\exists\,\delta>0)\quad(\forall\,x\in(0;\delta)):\quad g_2(x)<g_2(0)=1. \tag{6}$$

Доведення. Оскільки $y\,(0)=\operatorname{ctg}\pi\rho$, $\dfrac{1}{\sqrt{1+y^2(0)}}=|\sin\pi\rho|$, то
$$g_1(0)=-\operatorname{ctg}\pi\rho\cos\pi\rho\left|\sin\pi\rho\right|+\sin^2\pi\rho+\left|\sin\pi\rho\right|=1-\sin\pi\rho,$$
$$g_2(0)=-\operatorname{ctg}\pi\rho\cos\pi\rho\left|\sin\pi\rho\right|+\sin^2\pi\rho=1.$$

Враховуючи, що $y' = -\dfrac{1}{\sin \pi\rho} = \dfrac{1}{|\sin \pi\rho|}$, отримаємо

$$g_1'(x) = \frac{y^3\,|\sin \pi\rho| - \cos \pi\rho + x}{(1+y^2)^{3/2}\,|\sin \pi\rho|} + |\sin \pi\rho|\,,$$

$$g_2'(x) = \frac{y^3\,|\sin \pi\rho| - \cos \pi\rho + x}{(1+y^2)^{3/2}\,|\sin \pi\rho|} + \frac{1}{2}\,|\sin \pi\rho|\,.$$

Для $\rho \in \left(1; \frac{3}{2}\right]$ виконується $\cos \pi\rho \le 0$, $y = \dfrac{\cos \pi\rho - x}{\sin \pi\rho} \ge 0$, а отже, $g_1'(x) > 0$ для $x > 0$ і ми отримуємо (5), що доводить твердження *а* леми 2.

Оскільки $g_2'(0) = \mathrm{ctg}^3 \pi\rho \left|\sin^3 \pi\rho\right| - \cos \pi\rho \sin^2 \pi\rho + \frac{1}{2}\,|\sin \pi\rho| = -\cos \pi\rho - \frac{1}{2}\sin \pi\rho$, то для $\rho \in \left(2 - \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{arctg}\,2; 2\right)$ одержимо $g_2'(0) < 0$. Отже, для достатньо малих значень x виконується (6), що доводить твердження *б* леми 2. $\square$

Лема 3. *Рівняння (3) та (4) мають єдиний розв'язок* β_0 *на проміжку* $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ *і виконуються твердження:*
а) $\forall\, \beta \in (\beta_0; 2\pi) : 1 + \sin \beta > \sin \frac{\beta}{2}$*;*
б) $\forall\, \beta \in (\beta_0; 2\pi) : 2 > -\sin \beta\,(2 + \cos \beta)$.

Доведення. Функція $\varphi_1(\beta) = 1 + \sin \beta$ зростає на $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ від 0 до 1, а функція $\varphi_2(\beta) = \sin \dfrac{\beta}{2}$ спадає на $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ від 1 до 0. Отож, існує єдина точка $\beta_0 \in \left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$, в якій $\varphi_1(\beta_0) = \varphi_2(\beta_0)$ і для $\beta \in (\beta_0; 2\pi)$ виконується $1 + \sin \beta > \sin \dfrac{\beta}{2}$.

Приймемо $\varphi(\beta) = 2 + \sin \beta(2 + \cos \beta)$. Оскільки $\varphi'(\beta) = 2\cos^2 \beta + \cos \beta - 1$, то розв'язком рівняння $\varphi'(\beta) = 0$ на проміжку $\left(\dfrac{3\pi}{2}; 2\pi\right)$ є точка β_1 така, що $\cos \beta_1 = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{2}$. Отже, функція φ спадає на проміжку $\left(\dfrac{3\pi}{2}; \beta_1\right)$ і зростає на $(\beta_1; 2\pi)$. Але $\varphi\left(\dfrac{3\pi}{2}\right) = 0$, $\varphi(2\pi) = 2$, тому існує єдина точка $\beta_0 \in (\beta_1; 2\pi)$ така, що $\varphi(\beta_0) = 0$. Отож, на проміжку $(\beta_0; 2\pi)$ виконується $\varphi(\beta) > 0$, тобто $2 > -\sin \beta(2 + \cos \beta)$. $\square$

Доведення теореми 1. Нехай $f = f_1/f_2 \in M(+,-)$, $n(r,0,f_1) \sim r^\rho$, $n(r,0,f_2) \sim \Delta r^\rho$, $r \to \infty$. Тоді для довільного $\delta > 0$ при $r \to \infty$ рівномірно стосовно φ виконується (див., наприклад, [1, с.94])

$$\ln\left|f_1(re^{i\varphi})\right| = (1 + o(1))\frac{\pi \cos \rho(\varphi - \pi)}{\sin \pi\rho} r^\rho, \quad \delta \le \varphi \le 2\pi - \delta;$$

$$\ln\left|f_2(re^{i\varphi})\right| = \begin{cases} (1 + o(1))\dfrac{\pi\Delta \cos \rho\varphi}{\sin \pi\rho} r^\rho, & 0 \le \varphi \le \pi - \delta, \\ (1 + o(1))\dfrac{\pi \cos \rho(\varphi - 2\pi)}{\sin \pi\rho} r^\rho, & \pi + \delta \le \varphi \le 2\pi. \end{cases}$$

Використовуючи формулу (4.8) з [1, с.28] та лему 1, отримуємо ($r \to \infty$)

$$T(r,f) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \max\{\ln\left|f_1(re^{i\varphi})\right|, \ln\left|f_2(re^{i\varphi})\right|\}d\varphi =$$

$$= \frac{(1+o(1))r^\rho}{2\left|\sin\pi\rho\right|}\left\{\int\limits_0^{\pi}\max\{-\cos\rho(\varphi-\pi), -\Delta\cos\rho\varphi\}d\varphi + \right.$$

$$\left. + \int\limits_\pi^{2\pi}\max\{-\cos\rho(\varphi-\pi), -\Delta\cos\rho(\varphi-2\pi)\}d\varphi\right\} = \frac{(1+o(1))r^\rho}{2\left|\sin\pi\rho\right|}(I_1+I_2). \qquad (7)$$

Розв'яжемо рівняння

$$\cos\rho(\varphi-\pi) = \Delta\cos\rho\varphi. \qquad (8)$$

Одержали $\cos\rho\varphi(\cos\pi\rho-\Delta)+\sin\rho\varphi\sin\pi\rho = 0$. Звідси $\mathrm{tg}\,\rho\varphi = \dfrac{\Delta-\cos\pi\rho}{\sin\pi\rho} = -\Delta_1$,

$$\varphi = \frac{1}{\rho}\,\mathrm{arctg}\,(-\Delta_1) + \frac{\pi k}{\rho}, \quad k\in\mathbb{Z}. \qquad (9)$$

а) У випадку $\Delta = 1$ маємо $\Delta_1 = \dfrac{\cos\pi\rho - 1}{\sin\pi\rho} = -\mathrm{tg}\frac{\pi\rho}{2} > 0$ і з (9) отримуємо на відрізку $[0;\pi]$ один розв'язок рівняння (8), а саме, $\varphi = \varphi_1 = \dfrac{\pi}{2}$. Тому

$$I_1 = -\int\limits_0^{\pi/2}\cos\rho(\varphi-\pi)d\varphi - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos\rho\varphi d\varphi = \frac{2}{\rho}\left(\sin\frac{\pi\rho}{2} - \sin\pi\rho\right). \qquad (10)$$

Аналогічно отримуємо, що розв'язки рівняння

$$\cos\rho(\varphi-\pi) = \Delta\cos\rho(\varphi-2\pi) \qquad (11)$$

набули вигляду

$$\varphi = 2\pi + \frac{1}{\rho}\,\mathrm{arctg}(\Delta_1) + \frac{\pi k}{\rho}, \quad k\in\mathbb{Z}. \qquad (12)$$

На відрізку $[\pi;2\pi]$ є один розв'язок $\varphi = \varphi_2 = \dfrac{3\pi}{2}$ рівняння (11). Далі

$$I_2 = -\int\limits_\pi^{3\pi/2}\cos\rho(\varphi-2\pi)d\varphi - \int\limits_{3\pi/2}^{2\pi}\cos\rho(\varphi-\pi)d\varphi =$$

$$= -\int\limits_0^{\pi/2}\cos\rho(\varphi-\pi)d\varphi - \int\limits_{\pi/2}^{\pi}\cos\rho\varphi d\varphi = I_1,$$

тому з (7) завдяки (10) одержуємо

$$T(r,f) = \frac{(2+o(1))r^\rho}{\rho\left|\sin\pi\rho\right|}(\sin\frac{\pi\rho}{2} - \sin\pi\rho), \quad r\to\infty,$$

що доводить твердження *a* теореми 1.

б) У випадку $\rho \in (1; 3/2]$ маємо $\Delta_1 > 0$ і з (9) знову отримуємо на відрізку $[0; \pi]$ один розв'язок рівняння (8), а саме, $\varphi = \varphi_1 = \dfrac{1}{\rho}(\pi - \operatorname{arctg}\Delta_1)$. Тоді

$$I_1 = \frac{1}{\rho}\left(-\sin\rho(\varphi_1 - \pi) - \sin\pi\rho - \Delta\sin\pi\rho + \Delta\sin\rho\varphi_1\right). \tag{13}$$

Оскільки

$$\sin\rho\varphi_1 = \sin(\pi - \operatorname{arctg}(\Delta_1)) = \sin(\operatorname{arctg}(\Delta_1)) = \frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}},$$

$$\sin\rho(\varphi_1 - \pi) = \sin\rho\varphi_1\cos\pi\rho - \cos\rho\varphi_1\sin\pi\rho = \frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}}\cos\pi\rho + \frac{1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}}\sin\pi\rho,$$

то з (13) отримуємо

$$I_1 = \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\Delta_1\cos\pi\rho + \sin\pi\rho}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} - \sin\pi\rho - \Delta\sin\pi\rho + \frac{\Delta\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}}\right) =$$

$$= \frac{1}{\rho}\left(\frac{\Delta\Delta_1 + \Delta_1\left|\cos\pi\rho\right| + \left|\sin\pi\rho\right|}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + (\Delta+1)\left|\sin\pi\rho\right|\right), \tag{14}$$

бо $\cos\pi\rho \le 0$, $\sin\pi\rho < 0$ для $\rho \in (1; 3/2]$.

Як і у випадку *а*, неважко показати, що рівняння (11) має один розв'язок $\varphi = \varphi_2 = 2\pi - \dfrac{\pi}{\rho} + \dfrac{1}{\rho}\operatorname{arctg}\Delta_1$ на відрізку $[\pi, 2\pi]$, а також, що $I_2 = I_1$. Тому з (7) і (14) ми відразу одержуємо твердження *б* теореми 1.

в) Нехай тепер $\rho \in (3/2; 2)$, а $\Delta \in (0; \cos\pi\rho]$. Тоді $\Delta_1 < 0$ і з (9) отримуємо, що рівняння (8) має два розв'язки на $[0; \pi]$

$$\varphi = \varphi_1 = \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}(-\Delta_1), \quad \varphi = \varphi_2 = \frac{\pi}{\rho} + \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}(-\Delta_1).$$

Отже,

$$\begin{aligned} I_1 &= -\left(\int_0^{\varphi_1}\Delta\cos\rho\varphi d\varphi + \int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\cos\rho(\varphi-\pi)d\varphi + \int_{\varphi_2}^{\pi}\Delta\cos\rho\varphi d\varphi\right) = \\ &= -\frac{1}{\rho}\left(\Delta\sin\rho\varphi_1 + \sin\rho(\varphi_2-\pi) - \sin\rho(\varphi_1-\pi) + \Delta\sin\pi\rho - \Delta\sin\rho\varphi_1\right). \end{aligned}$$

Оскільки

$$\sin\rho\varphi_1 = \sin(\operatorname{arctg}(-\Delta_1)) = \frac{-\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}},$$

$$\sin\rho(\varphi_2-\pi) = \sin(\operatorname{arctg}(-\Delta_1) + \pi - \pi\rho) = \sin\pi\rho\frac{1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \cos\pi\rho\frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}},$$

$$\sin\rho(\varphi_1-\pi) = \sin(\operatorname{arctg}(-\Delta_1) - \pi\rho) = -\cos\pi\rho\frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} - \sin\pi\rho\frac{1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}},$$

$$\sin\rho\varphi_2 = \sin(\operatorname{arctg}(-\Delta_1) + \pi) = -\sin(\operatorname{arctg}(-\Delta_1)) = \frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}},$$

то одержимо

$$I_1 = -\frac{1}{\rho}\left(\frac{-\Delta\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \sin\pi\rho\frac{1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \cos\pi\rho\frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \right.$$

$$\left. + \cos\pi\rho\frac{\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \sin\pi\rho\frac{1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \Delta\sin\pi\rho - \frac{\Delta\Delta_1}{\sqrt{1+\Delta_1^2}}\right) =$$

$$= \frac{2}{\rho}\left(\frac{\Delta\Delta_1 - \Delta_1\left|\cos\pi\rho\right| + \left|\sin\pi\rho\right|}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \frac{\Delta}{2}\left|\sin\pi\rho\right|\right), \tag{15}$$

бо $\cos\pi\rho > 0$, $\sin\pi\rho < 0$. Аналогічно, як вище, бачимо, що рівняння (11) має два розв'язки на $[\pi; 2\pi]$ (див. (12))

$$\varphi = \varphi_3 = 2\pi - \frac{\pi}{\rho} + \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}(-\Delta_1), \quad \varphi = \varphi_4 = 2\pi + \frac{1}{\rho}\operatorname{arctg}(-\Delta_1).$$

Неважко показати, що $I_2 = I_1$, і з (7) та (15) отримуємо твердження *в* теореми 1.

г) Якщо $\rho \in (3/2;\, 2)$, $\Delta = \cos\pi\rho$, то $\Delta_1 = 0$ і ми бачимо, що рівняння (8) та (11) мають по одному розв'язку на відрізках $[0;\pi]$ та $[\pi;2\pi]$, а саме $\varphi_1 = \dfrac{\pi}{\rho} \in [0;\pi]$ та $\varphi_2 = 2\pi - \dfrac{\pi}{\rho} \in [\pi; 2\pi]$. Тоді

$$I_1 = I_2 = -\int\limits_0^{\pi/\rho} \cos\rho(\varphi - \pi)d\varphi - \int\limits_{\pi/\rho}^{\pi} \cos\rho\varphi d\varphi = \frac{1}{\rho}\left(\left|\sin\pi\rho\right|(2 + \cos\pi\rho)\right),$$

і ми відразу отримуємо твердження *г* теореми 1. □

Зауваження 2. Твердження *г* теореми 1 можна також отримати з твердження *в*, спрямувавши Δ до $\cos\pi\rho$ зліва.

Доведення теореми 2. Нехай f_1 – ціла функція порядку $\rho \in (1;2)$ з додатними нулями такими, що $n(r,0,f_1) \sim r^\rho$, $r \to \infty$. Тоді при $r \to \infty$ (див., наприклад, [1, с. 95])

$$T(r,f_1) \sim \begin{cases} \dfrac{1-\sin\pi\rho}{\rho\left|\sin\pi\rho\right|}r^\rho, & \rho \in (1;3/2]\,; \\ \dfrac{2}{\rho\left|\sin\pi\rho\right|}r^\rho, & \rho \in (3/2;2)\,. \end{cases} \tag{16}$$

Приймемо $f_2 = f_1/f_3$, де f_3 – ціла функція з від'ємними нулями, $n(r,0,f_3) \sim \Delta r^\rho$, $r \to \infty$, $0 < \Delta < \cos\pi\rho$, $3/2 < \rho < 2$. Завдяки твердженню *в* теореми 1

$$T(r,f_2) \sim \frac{2r^\rho}{\rho\left|\sin\pi\rho\right|}\left(\frac{\Delta\Delta_1 - \Delta_1\left|\cos\pi\rho\right| + \left|\sin\pi\rho\right|}{\sqrt{1+\Delta_1^2}} + \frac{\Delta}{2}\left|\sin\pi\rho\right|\right), \quad r \to \infty,$$

де $\Delta_1 = \dfrac{\cos\pi\rho - \Delta}{\sin\pi\rho}$. Тоді з твердження *б* леми 2 отримуємо, що для довільного $\rho \in \left(2 - \dfrac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2;\ 2\right)$ існує $\Delta \in (0;\cos\pi\rho)$ таке, що $T(r,f_2) < \dfrac{2r^\rho}{\rho\left|\sin\pi\rho\right|}$, $r \geq r_0$. Звідси і з (16) отримуємо $T(r,f_1) > T(r,f_2)$, $r \geq r_0$, що доводить теорему 2. □

Зауваження 3. Наш метод побудови функцій f_1 та f_2 не дає змоги отримати аналог теореми 2 у випадку $1 < \rho \leq 3/2$. Справді, завдяки твердженню *б* теореми 1 і формулі (16)

$$T(r,f_2) = (1+o(1))\frac{r^\rho}{\rho\,|\sin\pi\rho|}g_1(\Delta), \quad T(r,f_1) = (1+o(1))\frac{r^\rho}{\rho\,|\sin\pi\rho|}g_1(0), \quad r\to\infty.$$

Звідси, враховуючи твердження *а* леми 2, отримуємо, що $T(r,f_2) > T(r,f_1)$, $r \geq r_0$, де $r_0 > 0$ - деяке фіксоване число.

Доведення теореми 3. Нехай функції f_1, f_2 такі, як при доведенні теореми 2. У випадку $\Delta = 1$, тобто $f_3(z) = f_1(-z)$, за твердженням *а* теореми 1 одержимо

$$T(r,f_2) \sim \frac{2r^\rho}{\rho\,|\sin\pi\rho|}\left(\sin\frac{\pi\rho}{2} - \sin\pi\rho\right), \quad r\to\infty.$$

Враховуючи (16) та твердження *а* леми 3 для $\rho \in \left(\frac{\beta_0}{\pi};2\right)$, отримуємо, що $T(r,f_1) >$ $> T(r,f_2)$ для всіх достатньо великих r.

У випадку $\Delta = \cos\pi\rho$ завдяки твердженню *г* теореми 1

$$T(r,f_2) \sim \frac{r^\rho}{\rho\,|\sin\pi\rho|}\left(|\sin\pi\rho|\,(2+\cos\pi\rho)\right), \quad r\to\infty.$$

Тому завдяки (16) і твердженню *б* леми 3 для $\rho \in \left(\frac{\beta_0}{\pi};2\right)$ отримуємо, що $T(r,f_1) >$ $> T(r,f_2)$ при $r \geq r_0$. Теорема 3 доведена. □

4. Висновок. Показано, що для функцій f_1, f_2 класу $M(+,-)$ довільного порядку $\rho \in \left(2 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2; 2\right)$ не зберігається властивість монотонності стосовно нулів і полюсів їхніх неванлінновових характеристик. Якщо порядок ρ таких функцій задовольняє умову $1 \leq \rho \leq 2 - \frac{1}{\pi}\operatorname{arctg}2$, то чи зберігається ця властивість з'ясувати не вдалось.

Список використаної літератури

1. *Гольдберг А.А.* Распределение значений мероморфных функций / *Гольдберг А.А., Островский И.В.* – М., 1970.
2. *Заболоцкий Н.В.* Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик мероморфных функций нулевого рода / *Заболоцкий Н.В.* // Укр. мат. журн. – 1980. – Т. 33, № 6. – С. 805-810.
3. *Заболоцкий Н.В.* Некоторые соотношения для неванлинновских характеристик дельта-субгармонических функций порядка меньше 1 / *Заболоцкий Н.В.* // Теория функций, функц. анализ прилож. – 1983. – Вып. 39. – С. 49-56.
4. *Гольдберг А.А.* Про одну нерівність, зв'язану з функціями, опуклими відносно логарифма / *Гольдберг А.А.* // ДАН УРСР. – 1957. – № 3. – С. 227-230.
5. *Sheremeta M.* Some open problems in theory of functions of a complex variable / *Sheremeta M., Zabolotskyi M.* // Мат. студії. – 1994. – Вип. 3. – С. 117-119.

Стаття: надійшла до редакції 28.04.2011
прийнята до друку 21.09.2011

PROPERTY OF MONOTONICITY WITH RESPECT TO ZEROS AND POLES OF NEVANLINNA CHARACTERISTIC OF MEROMORPHIC FUNCTIONS

Mykola ZABOLOTSKYY, Ihor DEYNEKA

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytetska Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: ihordeyneka@gmail.com

Meromorphic in $\mathbb{C}$ functions f_1, f_2 with positive zeros and negative poles of an arbitrary order $\rho \in (2 - \operatorname{arctg} 2/\pi;\ 2)$ were built, for which integrated counting functions and Nevanlinna characteristics satisfy the conditions $N(r,0,f_1) \leq N(r,0,f_2)$, $N(r,\infty,f_1) \leq N(r,\infty,f_2)$ for $r \geq 0$ and $T(r,f_1) > T(r,f_2)$ for all sufficiently large r. The method of construction does not allow to get the answer regarding the existence of such functions with order of growth $\rho \in [1; 2 - \operatorname{arctg} 2/\pi]$.

Key words: meromorphic function, order of function, type of function, Nevanlinna characteristic.

СВОЙСТВО МОНОТОННОСТИ ОТНОСИТЕЛЬНО НУЛЕЙ И ПОЛЮСОВ НЕВАНЛИННОВЫХ ХАРАКТЕРИСТИК МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ

Николай ЗАБОЛОЦКИЙ, Игорь ДЕЙНЕКА

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: ihordeyneka@gmail.com

Построено мероморфные в $\mathbb{C}$ функции f_1, f_2 произвольного порядка $\rho \in (2 - \operatorname{arctg} 2/\pi;\ 2)$ с положительными нулями и отрицательными полюсами, усредненные считающие функции и неванлинновые характеристики которых удовлетворяют условия $N(r,0,f_1) \leq N(r,0,f_2)$, $N(r,\infty,f_1) \leq N(r,\infty,f_2)$ для $r \geq 0$ и $T(r,f_1) > T(r,f_2)$ для всех достаточно больших r. Метод построения не позволяет получить ответ о существовании таких функций порядка возростания $\rho \in [1; 2 - \operatorname{arctg} 2/\pi]$.

Ключевые слова: мероморфная функция, порядок функции, тип функции, неванлинновая характеристика.