ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 83–88
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 83–88

УДК 519.21

БАГАТОФРАКТАЛЬНІ ДОБУТКИ ДИФУЗІЙНИХ ПРОЦЕСІВ: РАНДОМІЗОВАНИЙ ВИПАДОК

Ярослав ЄЛЕЙКО, Тарас ЛАЗАРІВ, Степан МАЗУР

Львівський національний університет імені Івана Франка,
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: lazariv@rambler.ru

Розглянуто властивості багатофрактальних добутків експоненціальних дифузійних процесів визначених стохастичним диференціальним рівнянням з лінійним зсувом і окремою формою дифузійного коефіцієнта залежно від граничного розподілу.

Ключові слова: багатофрактальні добутки, функція Реньї, стаціонарна дифузія, рандомізований процес.

1. Вступ. Багатофрактальні процеси використовують у багатьох галузях, зокрема в фінансах, генетиці, в комп'ютерних мережах та ін. Ми будемо розглядати багатофрактальні добутки незалежних випадкових процесів, породжених так званим батьківським процесом, який є дифузійним процесом в експоненціальній формі з заданим граничним розподілом. Також розглянемо рандомізований процес з ваговими коефіцієнтами α_1, α_2 і побудуємо для цього процесу функцію Реньї.

2. Багатофрактальні добутки випадкових процесів. Введемо такі умови:

A1: $\Lambda^{(i)}(t), \quad t \in [0,1]$, $i = 0,1,2,...$ послідовність стаціонарних процесів у широкому розумінні, таких що $\forall\, t, t_1, t_2 \in [0,1]$ та для всіх $i = 0,1,2,...$ виконуються такі припущення:

$$E\Lambda^{(i)}(t) = 1, \tag{1}$$

$$Var\Lambda^{(i)}(t) = \sigma_\Lambda^2 < \infty, \tag{2}$$

$$Cov(\Lambda^{(i)}(t_1), \Lambda^{(i)}(t_2)) = R_\Lambda(t_1 - t_2) = \sigma_\Lambda^2 \rho_i(t_1 - t_2), \quad \rho_i(0) = 1. \tag{3}$$

A2: $\Lambda_b^{(i)} \stackrel{def}{=} \Lambda(tb^i)$, $t \in [0,1]$, $i = 0,1,2,...$, де $b > 1$ – масштабний параметр, $E\Lambda(t) = 1$.

A3: Для $t \in [0,1]$, нехай $\Lambda(t) = \exp\{X(t)\}$, де $X(t)$ – стаціонарний процес з $EX^2(t) < \infty$,

$$Cov(X(t_1), X(t_2)) = R_X(t_1 - t_2) = \sigma_X^2 r_X(t_1 - t_2), \quad r_X(0) = 1.$$

Ми припустимо, що існує щільність $p_\theta(x)$ і двовимірна щільність $p_\theta(x_1, x_2; t_1 - t_2)$ такі, що $M_\theta(\zeta) = E\exp\{\zeta X(t)\}$, існує для $\zeta \in \Sigma_1 \subset$ R і для двовимірного випадку $M_\theta(\zeta_1, \zeta_2; t_1 - t_2) = E\exp\{\zeta_1 X(t_1) + \zeta_2 X(t_2)\}$ існує для $(\zeta_1, \zeta_2) \in \Sigma_2 \subset R^2$, $\Sigma_1 \cap \Sigma_2 \notin \emptyset$.

Зауважимо, що $\theta \in \Theta \subseteq R^p$, $p \geq 1$. За умов A1- A3 припущення (1)-(3) набудуть вигляду

$$E\Lambda_b^{(i)}(t) = M_\theta(1) = 1,$$

$$Var\Lambda_b^{(i)}(t) = M_\theta(2) - 1 = \sigma_\Lambda^2 < \infty,$$

$$Cov(\Lambda_b^{(i)}(t_1), \Lambda_b^{(i)}(t_2)) = M_\theta(1; 1; (t_1 - t_2)b^i) - 1, \quad b > 1.$$

Введемо скінченний добуток процесів

$$\Lambda_n(t) = \prod_{i=0}^{n} \Lambda_b^{(i)}(t) = \exp\{\sum_{i=0}^{n} X(tb^i)\}$$

і кумулятивний процес

$$A_n(t) = \int_0^t \Lambda_n(s)ds, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, ...$$

Також розглянемо відповідні додатні випадкові міри, визначені на борелевих множинах $B \subset [0, 1]$

$$\mu_n(B) = \int_B \Lambda_n(s)ds, \quad n = 0,\, 1,\, 2,\, ...$$

Було доведено [2], що $\mu_n \to \mu$ (м.н.). Якщо задано скінченну або зліченну сім'ю множин $B_j \subset [0, 1]$, то виконується таке: для всіх j $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B_j) = \mu(B_j)$ з ймовірністю 1. Якщо $A_n \to A$ (м.н.), A і A_n – неперервні, тоді для всіх $t \in [0, 1]$ $\lim_{n\to\infty} A_n(t) = A(t)$ з ймовірністю 1. Зауважимо, що одне з двох тверджень виконується: 1. $A_n(t) \to A(t)$ в L_q для всіх t; 2. $A_n(1) \to 0$ (м.н.). Також будемо використовувати функцію Реньї

$$T(q) = \lim_{n\to\infty} \inf \frac{\log E \sum\limits_{k=0}^{2^n-1} \mu^q(I_k^{(n)})}{\log |I_k^{(n)}|} = \lim_{n\to\infty} \inf \left(-\frac{1}{n} \right) \log_2 E \sum_{k=0}^{2^n-1} \mu^q(I_k^{(n)}),$$

де $I_k^{(n)} = [k2^{-n}, (k+1)2^{-n}]$, $\quad k = 0,\, 1,\, \ldots,\, 2^n - 1$.

3. Умови L_2-збіжності та стохастичне диференціальне рівняння. Надалі будемо користуватися такою теоремою [4].

Теорема 1. *Нехай умови **A1-A3** виконуються.*

1. Якщо для деяких додатних чисел δ і γ,

$$\exp\{-\delta|\tau|\} \leq \rho(\tau) = \frac{M_\theta(1, 1; \tau) - 1}{M_\theta(2) - 1} \leq |c\tau|^{-\gamma}, \tag{4}$$

тоді $A_n(t)$ збігається в $L_2 \iff b > 1 + \sigma_\Lambda^2 = M_\theta(2)$.

2. Якщо $A_n(t)$ збігається в L_1, тоді граничний процес $A(t)$ задовольняє рекурсію

$$A(t) = \frac{1}{b}\int\limits_0^1 \Lambda(s)d\tilde{A}(bs), \tag{5}$$

де процеси Λ та $\tilde{A}$ незалежні, а процеси A та $\tilde{A}$ мають однакові скінченновимірні розподіли.

3. Якщо A невироджений, виконується рекурсія (5), $A(1) \in L_q$ для деякого $q > 0$ і

$$\sum_{n=0}^{\infty} c(q; b^{-n}) < \infty, \quad c(q,t) = E \sup_{s\in[0,1]} |\Lambda^q(0) - \Lambda^q(s)|,$$

тоді існують константи $\overline{C}$ та $\underline{C}$ такі, що для всіх $t \in [0,1]$

$$\underline{C} t^{q-\log_b E\Lambda^q(t)} \le EA^q(t) \le \overline{C} t^{q-\log_b E\Lambda^q(t)},$$

яке можна подати як $EA^q(t) \sim t^{q-\log_b E\Lambda^q(t)}$.

4. Якщо A невироджений, $A(1) \in L_q$, $q > 1$ та Λ, як у твердженні 3, тоді функція Реньї набуде вигляду

$$T(q) = q - 1 - \log_b E\Lambda^q(t) = q - 1 - \log_b M_\theta(q).$$

5. Якщо A невироджений, $A(1) \in L_2$, тоді

$$Var\ A(t) \ge Var \int\limits_0^t \Lambda(s)ds.$$

Розглянемо одновимірне стохастичне дифузійне рівняння

$$dX(t) = -(X(t) - \mu)dt + \sqrt{v(X(t))}dB(t), \quad t \ge 0,$$

де $\theta > 0$, $\mu \in (l,r)$, $-\infty \le l < r \le \infty$, v – невід'ємна функція на інтервалі (l,r), і $\{B(t), t \ge 0\}$ – стандартний броунівський рух.

4. Рандомізований випадок. Нагадаємо, що

$$M_{\theta X}(\zeta) = E\exp\{\zeta\, X(t)\},$$

$$E\Lambda(t) = 1, \quad E\Lambda(t) = M_{\theta X}(1).$$

Будемо розглядати батьківський процес у формі

$$\Lambda(t) = \exp\{\alpha_1 X(t) + \alpha_2 Y(t) + C\}, \tag{6}$$

де $X(t) \sim N(0, \sigma_X^2)$, $t \ge 0$ процес, що задовольняє стохастичне диференціальне рівняння

$$dX(t) = -\theta X(t)dt + \sigma_X\sqrt{2\theta}dB(t), \quad \theta > 0, \quad \sigma_X > 0, \tag{7}$$

а $Y(t) \sim \Gamma(\beta, \lambda)$ задовольняє диференціальне рівняння

$$dY(t) = -\theta(Y(t) - \frac{\beta}{\lambda})dt + \sqrt{\frac{2\theta}{\lambda}Y(t)}dB(t), \quad t \ge 0, \quad \lambda > 1, \quad \beta \ge 1. \tag{8}$$

З наведеного вище отримаємо

$$M_{\theta Z}(\zeta) = E\exp\{\zeta\,\alpha_1(X(t) + C_X) + \zeta\,\alpha_2(Y(t) + C_Y) + \zeta\, C'\} =$$

$$= \exp\{\zeta\, C'\} E \exp\{\zeta\, \alpha_1 (X(t) + C_X) + \zeta\, \alpha_2 (Y(t) + C_Y)\} =$$
$$= \exp\{\zeta\, C'\} M_{\theta X}(\zeta\, \alpha_1) M_{\theta Y}(\zeta\, \alpha_2),$$
$$M_{\theta Z}(1) = 1. \tag{9}$$

З пунктів 2 і 3 одержимо

$$M_{\theta X}(\alpha_1) = \exp\{\tfrac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 - \alpha_1)\},$$
$$M_{\theta Y}(\alpha_2) = \frac{1}{(1-\frac{\alpha_2}{\lambda})^{\beta}} \exp\{-c_1\alpha_2\}; c_1 = \log{(1-\tfrac{1}{\lambda})}^{-\beta}, \quad \lambda > 1, \quad \beta \geq 1.$$

Для знаходження C використаємо умову (9)

$$\exp\{C'\} \cdot \exp\{\tfrac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 - \alpha_1)\} \cdot \exp\{-\alpha_2 \log{(1-\tfrac{1}{\lambda})}^{-\beta}\} = (1-\tfrac{\alpha_2}{\lambda})^{\beta},$$
$$C' + \tfrac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 - \alpha_1) - \alpha_2 \log{(1-\tfrac{1}{\lambda})}^{-\beta} = \log{(1-\tfrac{\alpha_2}{\lambda})}^{\beta},$$
$$C' + \tfrac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 - \alpha_1) + \alpha_2\beta \log(1-\tfrac{1}{\lambda}) = \beta\log(1-\tfrac{\alpha_2}{\lambda}),$$
$$C' = \beta \log\left(\frac{(\lambda-\alpha_2)\lambda^{\alpha_2-1}}{(\lambda-1)^{\alpha_2}}\right) - \frac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 - \alpha_1).$$

Оскільки $C = C' + \alpha_1 C_X + \alpha_2 C_Y$, то отримаємо

$$C = \beta \log\left(\frac{(\lambda-\alpha_2)\lambda^{\alpha_2-1}}{(\lambda-1)^{\alpha_2}}\right) - \frac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2 - \alpha_1) + \alpha_1(-\frac{1}{2}\sigma_X^2) + \alpha_2(-\log{(1-\tfrac{1}{\lambda})}^{-\beta}) =$$
$$= \beta \log\left(\frac{(\lambda-\alpha_2)\lambda^{\alpha_2-1}}{(\lambda-1)^{\alpha_2}}\right) - \frac{1}{2}\sigma_X^2\alpha_1^2 + \alpha_2\beta\log(1-\tfrac{1}{\lambda}) =$$
$$= \beta \log\left(\frac{\lambda-\alpha_2}{\lambda}\right) - \frac{1}{2}\sigma_X^2\alpha_1^2.$$

Отже, $C = \log\left(1-\frac{\alpha_2}{\lambda}\right)^{\beta} - \frac{1}{2}\sigma_X^2\alpha_1^2$.

Враховуючи наведене вище, батьківський процес $\Lambda(t)$ набуде вигляду

$$\Lambda(t) = \exp\left\{\alpha_1 X(t) + \alpha_2 Y(t) + \log\left(1-\frac{\alpha_2}{\lambda}\right)^{\beta} - \frac{1}{2}\sigma_X^2\alpha_1^2\right\}.$$

Запишемо коваріаційну функцію для рандомізованого процесу $Z(t) = \alpha_1 X(t) + \alpha_2 Y(t)$

$$Var\ Z(t) = \alpha_1^2\sigma_X^2 + \alpha_2^2\tfrac{\beta}{\lambda^2},$$
$$R_Z(\tau) = (\alpha_1^2\sigma_X^2 + \alpha_2^2\tfrac{\beta}{\lambda^2}) \cdot r_Z(\tau); \qquad r_Z(\tau) = \exp\{-\theta\,\tau\}.$$

Знайдемо функції моментів

$$M_{\theta Z}(\zeta) = \exp\{\zeta\, C'\} M_{\theta X}(\zeta\, p_1) M_{\theta Y}(\zeta\, p_2) =$$
$$= \exp\{\zeta C'\} \cdot \exp\{\tfrac{1}{2}\sigma_X^2(\alpha_1^2\zeta^2 - \alpha_1\zeta)\} \cdot \exp\{-\alpha_2\zeta \log{(1-\tfrac{1}{\lambda})}^{-\beta}\} \cdot \frac{1}{(1-\frac{\alpha_2\zeta}{\lambda})^{\beta}} =$$
$$= \frac{1}{(1-\frac{\alpha_2\zeta}{\lambda})^{\beta}} \exp\{\zeta\beta\log\frac{\lambda-\alpha_2}{\lambda} + \frac{1}{2}\alpha_1^2\sigma_X^2(\zeta^2-\zeta)\},$$
$$M_{\theta Z}(\zeta_1, \zeta_2; t_1 - t_2) = E\exp\{\zeta_1(\alpha_1 X(t_1) + \alpha_2 Y(t_1) + C) + \zeta_2(\alpha_1 X(t_2) + \alpha_2 Y(t_2) + C)\} =$$
$$= M_{\theta X}(\alpha_1\zeta_1, \alpha_2\zeta_2; t_1 - t_2)\, M_{\theta Y}(\alpha_1\zeta_1, \alpha_2\zeta_2; t_1 - t_2) \times$$
$$\times \exp\{(C - \alpha_1 C_X - \alpha_2 C_Y)(\zeta_1 + \zeta_2)\}, \quad (\zeta_1, \zeta_2) \in R^2.$$

У цьому випадку

$$M_{\theta Z}(1) = 1,$$
$$Cov(\Lambda(t_1), \Lambda(t_2)) = M_{\theta Z}(1, 1; t_1 - t_2) - 1.$$

Використавши теорему 1, знайдемо функцію Реньї

$$T(q) = q - 1 - \log_b E\Lambda^q(t) = q - 1 - \log_b M_{\theta Z}(q) =$$
$$= q - 1 + \beta \log_b(1 - \tfrac{\alpha_2 q}{\lambda}) - \left(q\beta \log \frac{\lambda - \alpha_2}{\lambda} + \frac{1}{2}\alpha_1^2 \sigma_X^2 (q^2 - q)\right) \log_b e.$$

5. Висновки. Ми розглянули рандомізований випадок стаціонарних дифузійних процесів, знайшли для нього коваріаційну функцію, лінійний зсув, функції моментів і функцію Реньї. Отже, посилаючись на теорему 1, можемо побудувати багатофрактальні добутки для рандомізованого процесу.

Список використаної літератури

1. *Anh V.V.* Multifractal products of stationary diffusion processes / *Anh V.V., Leonenko N.N., Shieh N.R.* // Stochastic Anal. Appl. – 2009. – Vol. 27, №3. – P. 475-499.
2. *Kahane J.-P.* Positive martingales and random measures / *Kahane J.-P.* // Chin. Ann. Math., Ser. B. – 1987. – Vol. 8. – P. 1-12.
3. *Bibby M.* Difussion-type models with given marginal distribution and autocorrelation function / *Bibby M., Skovgaard I., Sorensen M.* // Bernoulli – 2005. – Vol. 11, №2. – P. 191-220.
4. *Mannersalo P.* Multifractal products of stochastic processes: construction and some basic properties / *Mannersalo P., Norros I., Riedi R.* // Adv. Appl. Probab. – 2002. – Vol. 34, №4. – P. 888-903.

Стаття: надійшла до редакції 06.04.2011
прийнята до друку 21.09.2011

MULTIFRACTAL PRODUCTS OF DIFFUSION PROCESSES AND RANDOMIZED SCENARIO

Yaroslav YELEYKO, Taras LAZARIV, Stepan MAZUR

Ivan Franko National University of L'viv,
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
e-mail: lazariv@rambler.ru

We investigate the properties of multifractal products of the exponential of stationary diffusion processes defined by stochastic differential equations with linear drift and certain form of the diffusion coefficient corresponding to a variety of marginal distribution.

Key words: multifractal products, Renyi function, stationary diffusion, randomized scenario.

МНОГОФРАКТАЛЬНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ ДИФФУЗИОННЫХ ПРОЦЕССОВ: РАНДОМИЗИРОВАННЫЙ СЛУЧАЙ

Ярослав ЕЛЕЙКО, Тарас ЛАЗАРИВ, Степан МАЗУР

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: lazariv@rambler.ru

Рассмотрено свойства многофрактальных произведений экспоненциальных диффузионных процессов определенных стохастическим дифференциальным уравнением с линейным сдвигом и формой диффузионного коэффициента в соответствие от граничного распределения.

Ключевые слова: многофрактальные произведения, функция Реньи, стационарная диффузия, рандомизированный случай.