ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 61–73
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 61–73

УДК 512.536.75+512.546

СИМЕТРИЧНІ ТОПОЛОГІЧНІ ГРУПИ ТА ПІВГРУПИ

Ігор ГУРАН[1], Олег ГУТІК[1], Олександр РАВСЬКИЙ[2], Іван ЧУЧМАН[1]

[1]*Львівський національний університет імені Івана Франка, вул. Університетська 1, Львів, 79000*
[2]*Інститут прикладних проблем механіки і математики НАН України, вул. Наукова 3б, Львів, 79061*
e-mails: igor_guran@yahoo.com, o_gutik@franko.lviv.ua, oravsky@mail.ru, chuchman_i@mail.ru

Описано компактифікації Бора топологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ бієктивних перетворень зі скінченним носієм нескінченного кардинала λ, топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ майже тотожних часткових бієктивних перетворень нескінченного кардинала λ та топологічних півгруп монотонних і майже монотонних коскінченних ін'єктивних перетворень натуральних чисел $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ і $\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N})$.

Ключові слова: топологічна півгрупа, топологічна група, компактифікація Бора.

1. Вступ. Всі простори ми вважаємо гаусдорфовими. Надалі всі кардинали ми будемо ототожнювати з відповідними їм початковими ординалами. Через ω позначатимемо перший нескінченний ординал, $\mathbb{N}$ – множину натуральних чисел, $\mathbb{Z}_2$ – двоелементну групу, а через $\mathbb{Z}_2^0$ – групу $\mathbb{Z}_2$ з приєднаним нулем. Надалі використовуватимемо термінологію та позначення з [7, 8, 11, 12, 14, 15, 17, 25, 26].

Півгрупою називається непорожна підмножина з заданою на ній бінарною асоціативною операцією. Півгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент y з S такий, що $x = xyx$ і $y = yxy$. У цьому випадку будемо говорити, що елемент y є *інверсним* до x і позначатимемо його через x^{-1}. Відображення, яке ставить кожному елементові інверсної півгрупи інверсний до нього елемент, називається *інверсією*.

Елемент e півгрупи S називається *ідемпотентом*, якщо $ee = e$. *Підмножину ідемпотентів* (*в'язку*) півгрупи S позначатимемо через $E(S)$.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{R}$ на півгрупі S називається *конгруенцією*, якщо з того, що $a\mathfrak{R}b$, для $a, b \in S$, випливає $ac\mathfrak{R}bc$ і $da\mathfrak{R}db$, для довільних $c, d \in S$. На кожній півгрупі S існують такі конгруенції: *одинична* (*діагональ*) $\Delta(S) = \{(s, s) \mid s \in S\}$

та *універсальна* $\Omega(S) = S \times S$. Одиничну та універсальну конгруенції називають *тривіальними* конгруенціями.

Гаусдорфовий топологічний простір із заданою на ньому (роздільно) неперервною півгруповою операцією називається (*напів*)*топологічною півгрупою.* Інверсна топологічна півгрупа з неперервною інверсією називається *топологічною інверсною півгрупою.* Топологія τ на інверсній півгрупі S така, що (S, τ) – топологічна (інверсна) півгрупа, називається *півгруповою* (*інверсною*) топологією на S.

Топологічна група – це топологічний простір (G, τ) із заданою на ньому неперервною груповою операцією та інверсією, і в цьому випадку топологія τ на G називається *груповою.*

Нехай λ – кардинал $\geqslant 1$ і $\alpha\colon \lambda \rightharpoonup \lambda$ – часткове відображення (часткове перетворення) кардинала λ. Через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ позначатимемо область визначення та область значень, відповідно, часткового перетворення α. Якщо α – часткове бієктивне перетворення, то потужність множини $\operatorname{dom}\alpha$ будемо називати *рангом* часткового відображення α, і позначатимемо $\operatorname{rank}\alpha$.

Через $\mathscr{I}_\lambda$ позначимо множину усіх часткових взаємно однозначних перетворень кардинала λ з півгруповою операцією

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta \quad \text{якщо} \quad x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \mid y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \quad \text{для} \quad \alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

Півгрупа $\mathscr{I}_\lambda$ називається *симетричною інверсною півгрупою* над λ (див. [14]). Симетричну інверсну півгрупу вперше ввів Вагнер у [1, 2], вона відігає важливу роль у теорії півгруп.

Підпівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda \mid \operatorname{rank}\alpha \leqslant n\}$ в $\mathscr{I}_\lambda$ є інверсною підпівгрупою, і крім того, ідеалом в $\mathscr{I}_\lambda$, для всіх $n = 1, 2, 3, \ldots$. Півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ називається *симетричною інверсною півгрупою скінченних перетворень рангу n кардинала* λ. Зауважимо, що симетрична інверсна півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^1$ скінченних перетворень рангу 1 множини потужності λ ізоморфна півгрупі $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць B_λ.

Симетричну інверсну півгрупу обмеженого скінченного рангу $\mathscr{I}_\lambda^n$ як топологічну та напівтопологічну вперше вивчали у [19], де доведено, що вона є півгрупою зі щільними ідеальними рядами, і у підсумку півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ алгебрично замкнена в класі напівтопологічних інверсних півгруп з неперервною інверсією. У [22] доведено, що півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ алгебрично h-замкнена в класі топологічних інверсних півгруп, а також описана борівська компактифікація нескінченної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ в класі топологічних півгруп. У [21] зазначено достатні умови для того, щоб півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ була H-замкненою чи абсолютно H-замкненою в класі топологічних півгруп. Також в [19] доведено, що на симетричній інверсній півгрупі скінченного рангу $\mathscr{I}_\lambda^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{I}_\lambda^n$ не існує компактної топології, стосовно якої вона була б напівтопологічною півгрупою. Водночас в [20] описано усі компактні та зліченно компактні топології на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^1$, за яких $\mathscr{I}_\lambda^1$ є напівтопологічною півгрупою.

У праці [6] описано усі нетривіальні конгруенції на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$, доведено, що довільний гомоморфний образ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ є півгрупою зі щільними ідеальними рядами, а отже, півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ алгебрично h-замкнена півгрупа в класі напівтопологічних інверсних півгруп з неперервною інверсією. У [6] також описано усі компактні та зліченно компактні топології τ на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ такі, що $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ є напівтопологічною півгрупою.

Часткове перетворення $\alpha \in \mathscr{I}_\lambda$ називається *майже тотожним*, якщо множина $\lambda \setminus \operatorname{dom}\alpha$ скінченна і $(x)\alpha \neq x$ тільки для скінченої кількості $x \in \lambda$. Позначимо

$$\mathscr{I}_\lambda^\infty = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda \quad | \quad \alpha \quad \text{є майже тотожнім}\}.$$

Очевидно, що $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ є інверсною підпівгрупою півгрупи $\mathscr{I}_\omega$. Півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ називається *півгрупою майже тотожних часткових ін'єктивних перетворень* кардинала λ [13].

В [13] описані відношення Гріна на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$, усі (двосторонні) ідеали і всі конгруенції на $\mathscr{I}_\lambda^\infty$. У [13] доведено, що кожна гаусдорфова спадково берівська топологія τ на $\mathscr{I}_\omega^\infty$ така, що $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ є напівтопологічною півгрупою, є дискретною і описано замикання дискретної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ у топологічній півгрупі. Також доведено, що для нескінченного кардинала λ дискретна напівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ не вкладається в компактну топологічну півгрупу та побудовано дві недискретні гаусдорфові інверсні півгрупові топології на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$.

Нехай $\mathbb{N}$ – множина натуральних чисел. Через $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ позначимо півгрупу монотонних неспадних ін'єктивних часткових перетворень множини $\mathbb{N}$ таких, що множини $\mathbb{N}\setminus\operatorname{dom}\varphi$ і $\mathbb{N}\setminus\operatorname{rank}\varphi$ є скінченними для всіх $\varphi \in \mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$. Очевидно, що $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ є інверсною підпівгрупою півгрупи $\mathscr{I}_\omega$. Півгрупа $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ називається *півгрупою коскінченних монотонних часткових бієкцій* множини $\mathbb{N}$ [23].

У [23] Гутік і Реповш довели, що півгрупа $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ має алгебричні властивості, подібні до біциклічної півгрупи: вона біпроста і всі її нетривіальні півгрупові гомоморфізми є або ж ізоморфізмами, або ж груповими гомоморфізмами. Вони довели, що кожна гаусдорфова локально компактна півгрупова інверсна топологія на $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ є дискретною. Описали замикання дискретної півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ у топологічній півгрупі.

Часткове відображення $\alpha\colon \mathbb{N} \rightharpoonup \mathbb{N}$ називається *майже монотонним*, якщо існує скінченна підмножина A в $\mathbb{N}$ така, що звуження $\alpha|_{\mathbb{N}\setminus A}\colon \mathbb{N}\setminus A \rightharpoonup \mathbb{N}$ є монотонним частковим відображенням. Через $\mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ позначимо півгрупу майже монотонних ін'єктивних часткових перетворень множини $\mathbb{N}$ таку, що множини $\mathbb{N}\setminus\operatorname{dom}\varphi$ і $\mathbb{N}\setminus\operatorname{rank}\varphi$ є скінченними для всіх $\varphi \in \mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$. Очевидно, що півгрупа $\mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ є інверсною підпівгрупою півгрупи $\mathscr{I}_\omega$ і півгрупа $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ є інверсною підпівгрупою півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ також. Півгрупа $\mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ називається *півгрупою коскінченних майже монотонних часткових бієкцій* множини $\mathbb{N}$ [10].

В [10] доведено, що всі нетривіальні гомоморфізми півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ є груповими, або ізоморфізмами. Також доведено, що кожна гаусдорфова берівська топологія τ на $\mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ така, що $(\mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}), \tau)$ – напівтопологічна півгрупа є дискретною. Описано замикання дискретної півгрупи $(\mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N}), \tau)$ в топологічній півгрупі та побудовано недискретні гаусдорфові інверсні півгрупові топології на $\mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$.

Нехай $\mathsf{S}(\lambda)$ – група бієктивних перетворень кардинала λ. Для довільного $\alpha \in \mathsf{S}(\lambda)$ позначимо $\operatorname{supp}(\alpha) = \{x \in \lambda \mid (x)\alpha \neq x\}$. Нехай $\mathscr{S}(\lambda) = \{\alpha \in \mathsf{S}(\lambda) \mid |\operatorname{supp}(\alpha)| < \omega\}$. Через $\mathscr{A}(\lambda)$ позначимо підгрупу парних підстановок групи $\mathscr{S}(\lambda)$. Зауважимо, що $\mathscr{A}(\lambda)$ – єдина нетривіальна нормальна підгрупа в $\mathscr{S}(\lambda)$ і $\mathscr{A}(\lambda)$ – проста група.

В [4] доведено, що група $\mathscr{A}(\lambda)$, а отже, і група $\mathscr{S}(\lambda)$, при $\lambda > \omega$ в топології поточкової збіжності не вкладається в добуток топологічних груп зліченного псевдохарактеру. З іншого боку, група $\mathscr{S}(\lambda)$ у довільній відокремлюваній груповій топології не вкладається в τ-обмежену топологічну групу, якщо $\lambda > \tau \geqslant \omega$ [5].

З наслідку 2 випливає, що на групі $\mathscr{S}(\lambda)$, при $\lambda > \omega$, не існує цілком обмеженої групової топології. Виникає питання, відповідь на яке автори не знають: *Чи існує на групі $\mathscr{A}(\lambda)$, $\lambda > \omega$, локально компактна відокремлювана недискретна групова топологія?*

Ми описали компактифікації Бора топологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ та топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ майже тотожних часткових бієктивних перетворень нескінченного кардинала λ та топологічних півгруп монотонних і майже монотонних коскінченних ін'єктивних перетворень натуральних чисел $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ і $\mathscr{I}_\infty^{\not\nearrow}(\mathbb{N})$.

2. Про вкладення групи $\mathscr{S}(\lambda)$. Топологічна група G називається *цілком обмеженою*, якщо для довільного околу одиниці U існує скінченна підмножина A в G така, що $A \cdot U = G$.

Ми будемо називати групу *прекомпактно топологізовною*, якщо на ній існує цілком обмежена гаусдорфова групова топологія. Для натурального n через $\mathbf{U}_n(\mathbb{C})$ ми позначимо групу унітарних матриць порядку n над полем комплексних чисел $\mathbb{C}$. Будемо говорити, що група G *має повну систему унітарних зображень*, якщо для довільного елемента $x \in G$ існують натуральне n та гомоморфізм $f\colon G \to \mathbf{U}_n(\mathbb{C})$ такі, що $(x)f \neq e$.

Лема 1 ([8, с. 237, теорема 33])**.** *Кожна компактна гаусдорфова топологічна група має повну систему унітарних зображень.*

Зауважимо, що кожна підгрупа компактної групи – прекомпактна.

Теорема 1. *Група G є прекомпактно топологізовною тоді і тільки тоді, коли вона має повну систему унітарних зображень.*

Доведення. Необхідність випливає з леми 1. Доведемо достатність. Для кожного неодиничного елемента x групи G зафіксуємо натуральне число $n(x)$ та гомоморфізм $f_x\colon G \to \mathbf{U}_{n(x)}(\mathbb{C})$ такі, що $(x)f_x \neq e$. Тоді діагональний добуток $\prod_{x\in G\setminus\{e\}} f_x$ є ізоморфним вкладенням групи G у компактну групу $\prod_{x\in G\setminus\{e\}} \mathbf{U}_{n(x)}(\mathbb{C})$, тому група G є прекомпактно топологізовною. $\square$

Теорема 2. *Проста група G – прекомпактно топологізовна тоді і тільки тоді, коли існують натуральне n та ін'єктивний гомоморфізм $f\colon G \to \boldsymbol{U}_n(\mathbb{C})$.*

Доведення. Достатність очевидна. Доведемо необхідність. Без обмеження загальності можна вважати, що $G \neq \{e\}$. Зафіксуємо довільний елемент $x \in G \setminus \{e\}$. За теоремою 1 існують натуральне число n та гомоморфізм $f\colon G \to \mathbf{U}_n(\mathbb{C})$ такі, що $(x)f \neq e$. Оскільки група G – проста, то $\ker f = \{e\}$, тому гомоморфізм f ін'єктивний. $\square$

Лема 2 ([3, теорема VII.1.C])**.** *Для довільного натурального n кожна підгрупа $G \subset \boldsymbol{U}_n(\mathbb{C})$ скінченної експоненти є скінченною.*

Наслідок 1. *Якщо проста група G є прекомпактно топологізовною, то кожна її підгрупа скінченної експоненти скінченна.*

Лема 3 ([7, с. 60])**.** *Група $\mathscr{A}(\lambda)$ є простою для $\lambda \geqslant 5$.*

Наслідок 2. *Якщо λ – нескінченний кардинал, то група $\mathscr{A}(\lambda)$ не є прекомпактно топологізовною.*

Доведення. Зафіксуємо довільну послідовність $\{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ попарно різних елементів кардинала λ. Тоді підгрупа T в $\mathscr{A}(\lambda)$, породжена множиною $\{(x_{3i}x_{3i+1}x_{3i+2}) \mid i \in \mathbb{N}\}$, є нескінченною підгрупою групи $\mathscr{A}(\lambda)$ експоненти 3. Тоді з леми 3, теореми 2 та наслідку 1 випливає, що група $\mathscr{A}(\lambda)$ не прекомпактно топологізовна. $\square$

З наслідку 2 випливає наслідок 3.

Наслідок 3. *Якщо λ – нескінченний кардинал, то довільний гомоморфізм з групи $\mathscr{A}(\lambda)$ в компактну топологічну групу є анулюючим.*

З наслідку 3 випливає наслідок 4.

Наслідок 4. *Якщо λ – нескінченний кардинал, то довільний неперервний гомоморфізм h з топологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ в компактну топологічну групу K є анулюючим тоді і лише тоді, коли $\mathscr{A}(\lambda)$ – незамкнена підгрупа в $\mathscr{S}(\lambda)$. У протилежному випадку підгрупа $(\mathscr{S}(\lambda))h$ в K ізоморфна дискретній групі $\mathbb{Z}_2$.*

Оскільки за теоремою Елліса (див. [16]) кожна локально компактна напівтопологічна група є топологічною групою, то з наслідку 4 випливає наслідок 5.

Наслідок 5. *Якщо λ – нескінченний кардинал, то довільний неперервний гомоморфізм h з напівтопологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ в компактну топологічну групу K є анулюючим тоді і лише тоді, коли $\mathscr{A}(\lambda)$ – незамкнена підгрупа в $\mathscr{S}(\lambda)$. У протилежному випадку підгрупа $(\mathscr{S}(\lambda))h$ в K ізоморфна дискретній групі $\mathbb{Z}_2$.*

3. Компатифікації Бора топологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ та півгруп $\mathscr{I}_{\lambda}^{\infty}$, $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ і $\mathscr{I}_{\infty}^{\!\!\Rsh\!\nearrow}(\mathbb{N})$. Нехай $\mathfrak{A}$ – клас топологічних алгебр (клас топологічних груп, топологічних півгруп, напівтопологічних груп, напівтопологічних півгруп тощо) і $S \in \mathfrak{A}$. Компатифікацією Бора алгебри S в класі $\mathfrak{A}$ називається пара $(\beta, B(S))$ така, що $B(S) \in \mathfrak{A}$ – компактна топологічна алгебра, $\beta\colon S \to B(S)$ – неперервний гомоморфізм, якщо $g\colon S \to T$ – неперервний гомоморфізм з топологічної алгебри S в компактну топологічну алгебру $T \in \mathfrak{A}$, то існує єдиний неперервний гомоморфізм $\bar{g}\colon B(S) \to T$ такий, що діаграма

$$\begin{tikzcd} S \arrow[r, "\beta"] \arrow[d, "g"'] & B(S) \arrow[dl, "\bar{g}"] \\ T & \end{tikzcd}$$

є комутативною. У випадку, коли зрозуміло про який гомоморфізм β йдеться, ми позначатимемо Борівську компактифікацію $(\beta, B(S))$, зазначаючи лише топологічну алгебру $B(S)$.

З наслідків 3 і 4 випливає теорема.

Теорема 3. *Нехай λ – нескінченний кардинал. Тоді:*

(*i*) *компактифікація Бора (напів)топологічної групи $\mathscr{A}(\lambda)$ в класі (напів)топологічних груп є тривіальною групою;*
(*ii*) *компактифікація Бора (напів)топологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ в класі (напів)топологічних груп є тривіальною групою тоді і лише тоді, коли $\mathscr{A}(\lambda)$ – незамкнена підгрупа в $\mathscr{S}(\lambda)$;*
(*iii*) *компактифікація Бора (напів)топологічної групи $\mathscr{S}(\lambda)$ в класі (напів)топологічних груп ізоморфна дискретній групі $\mathbb{Z}_2$ тоді і лише тоді, коли $\mathscr{A}(\lambda)$ – замкнена підгрупа в $\mathscr{S}(\lambda)$.*

На півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ для довільного невід'ємного цілого числа n означимо відношення $\mathfrak{K}_n(I)$, $\mathfrak{K}_n(\mathsf{S}_\infty)$ і $\mathfrak{K}_n(\mathsf{A}_\infty)$ так:

1. Через $\mathfrak{K}_n(I)$ позначимо конгруенцію на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ породжену ідеалом $I_n = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda^\infty \mid |\lambda \setminus \operatorname{dom} \alpha| \geqslant n\}$, тобто $\mathfrak{K}_n(I) = (I_n \times I_n) \cup \Delta(\mathscr{I}_\lambda^\infty)$. Зауважимо, що $\mathfrak{K}_0(I) = \Omega(\mathscr{I}_\lambda^\infty)$.
2. Елементи α і β півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ є n_{S_∞}-*еквівалентними*, якщо:
   (*i*) $\alpha \mathscr{H} \beta$; і
   (*ii*) $|\lambda \setminus \operatorname{dom} \alpha| = |\lambda \setminus \operatorname{dom} \beta| = n$.
   Означимо відношення $\mathfrak{K}_n(\mathsf{S}_\infty)$ на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ так:
$$\mathfrak{K}_n(\mathsf{S}_\infty) = \{(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in n_{\mathsf{S}_\infty}\} \cup (I_{n+1} \times I_{n+1}) \cup \Delta(\mathscr{I}_\lambda^\infty).$$
3. Елементи α і β півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ є n_{A_∞}-*еквівалентними*, якщо:
   (*i*) $\alpha \mathscr{H} \beta$;
   (*ii*) $\alpha \cdot \beta^{-1}$ є парною підстановкою множини $\operatorname{dom} \alpha$; і
   (*iii*) $|\lambda \setminus \operatorname{dom} \alpha| = |\lambda \setminus \operatorname{dom} \beta| = n$.
   Означимо відношення $\mathfrak{K}_n(\mathsf{A}_\infty)$ на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ так:
$$\mathfrak{K}_n(\mathsf{A}_\infty) = \{(\alpha, \beta) \mid (\alpha, \beta) \in n_{\mathsf{A}_\infty}\} \cup (I_{n+1} \times I_{n+1}) \cup \Delta(\mathscr{I}_\lambda^\infty).$$

Виконується така теорема.

Теорема 4 ([13]). *Для довільного невід'ємного цілого числа n відношення $\mathfrak{K}_n(\mathsf{S}_\infty)$ і $\mathfrak{K}_n(\mathsf{A}_\infty)$ є конгруенціями на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$.*

У праці [13] також доведено таку теорему.

Теорема 5 ([13]). *Сім'я*
$$\begin{aligned} \mathsf{Cong}(\mathscr{I}_\lambda^\infty) &= \{\Delta(\mathscr{I}_\lambda^\infty),\ \Omega(\mathscr{I}_\lambda^\infty)\} \cup \{\mathfrak{K}_n(\mathsf{S}_\infty) \mid n = 0,1,2,\ldots\} \cup \\ &\cup \{\mathfrak{K}_n(\mathsf{A}_\infty) \mid n = 0,1,2,\ldots\} \cup \{\mathfrak{K}_n(I) \mid n = 1,2,\ldots\} \end{aligned}$$
визначає усі конгруенції на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$.

Через $H(\mathbb{I})$ позначимо групу одиниць півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$. Кожна максимальна підгрупа півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$, а отже, і група одиниць $H(\mathbb{I})$, ізоморфна групі $\mathscr{S}(\lambda)$ [13].

Лема 4. *Нехай $\lambda \geqslant \omega$ і $h\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to K$ – алгебричний гомоморфізм у компактну топологічну півгрупу K. Тоді півгрупа $(\mathscr{I}_\lambda^\infty)h$ ізоморфна деякій підпівгрупі півгрупи $\mathbb{Z}_2^0$.*

Доведення. Оскільки за теоремою 1.11 [5] замикання підгрупи в компактній топологічній півгрупі є підгрупою, то звуження $h_{H(\mathbb{I})} = h|_{H(\mathbb{I})}\colon H(\mathbb{I}) \to K$ гомоморфізму

h не є ізоморфізмом. Тоді за теоремою 5 отримаємо, що $(\mathscr{I}_\lambda^\infty \setminus H(\mathbb{I}))h$ – одноточкова підмножина в K. Оскільки підгрупа $H(\mathbb{I})$ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ ізоморфна групі $\mathscr{S}(\lambda)$ і група $\mathscr{S}(\lambda)$ містить лише одну власну нетривіальну нормальну підгрупу $\mathscr{A}(\lambda)$, то $(H(\mathbb{I}))h$ є підгрупою групи $\mathbb{Z}_2$. Також з того, що множина $\mathscr{I}_\lambda^\infty \setminus H(\mathbb{I})$ є ідеалом півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$, врахувавши попередні міркування, отримуємо, що $(\mathscr{I}_\lambda^\infty)h$ – підпівгрупа півгрупи $\mathbb{Z}_2^0$. □

Теорема 6. *Нехай λ – нескінченний кардинал. Тоді:*

(i) *компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп є нетривіальною півгрупою тоді і лише тоді, коли група одиниць $H(\mathbb{I})$ є відкрито-замкненою підгрупою в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$;*

(ii) *компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп топологічно ізоморфна дискретній напівґратці $(\{0,1\},\min)$ тоді і лише тоді, коли група одиниць $H(\mathbb{I})$ відкрито-замкнена підгрупа в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ і $\mathscr{A}(\lambda)$ – незамкнена підгрупа в $H(\mathbb{I})$;*

(iii) *компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп ізоморфна дискретній півгрупі $\mathbb{Z}_2^0$ тоді і лише тоді, коли група одиниць $H(\mathbb{I})$ відкрито-замкнена підгрупа в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ і $\mathscr{A}(\lambda)$ – відкрита підгрупа в групі одиниць півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$.*

Доведення. (i) Спочатку доведемо достатність. Справді, якщо $H(\mathbb{I})$ – відкрито-замкнена підгрупа в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$, то відображення $h\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to (\{0,1\},\min)$, означене за формулою

$$(\alpha)h = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha \in H(\mathbb{I}); \\ 0, & \text{якщо } \alpha \notin H(\mathbb{I}), \end{cases}$$

є неперервним гомоморфізмом. Отож, компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп є нетривіальною півгрупою.

Тепер доведемо необхідність. Припустимо, що компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп є нетривіальною півгрупою. Оскільки множина $\mathscr{I}_\lambda^\infty \setminus H(\mathbb{I})$ є ідеалом півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$, то за лемою 4 і теоремою 5 існує неперервний гомоморфізм $h\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to \mathbb{Z}_2^0$ такий, що $(H(\mathbb{I}))h \cap (\mathscr{I}_\lambda^\infty \setminus H(\mathbb{I}))h = \varnothing$. Отже, маємо, що $(H(\mathbb{I}))h \in \mathbb{Z}_2$ і $(\mathscr{I}_\lambda^\infty \setminus H(\mathbb{I}))h = 0$, і з неперервності гомоморфізму h випливає, що $H(\mathbb{I})$ – відкрито-замкнена підгрупа в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$.

(ii) Припустимо, що група одиниць $H(\mathbb{I})$ відкрито-замкнена підгрупа в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ і $\mathscr{A}(\lambda)$ – незамкнена підгрупа в $H(\mathbb{I})$. Оскільки $\mathscr{A}(\lambda)$ єдина власна нетривіальна нормальна підгрупа в $H(\mathbb{I})$, то з наслідку 4 випливає, що образ групи $H(\mathbb{I})$ при неперервному гомоморфізмі $g\colon H(\mathbb{I}) \to K$ у компактну топологічну півгрупу K є тривіальною півгрупою. Тоді відображення $h\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to (\{0,1\},\min)$, означене за формулою

$$(\alpha)h = \begin{cases} 1, & \text{якщо } \alpha \in H(\mathbb{I}); \\ 0, & \text{якщо } \alpha \notin H(\mathbb{I}), \end{cases}$$

є неперервним гомоморфізмом. Отож, компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп ізоморфна дискретній напівґратці $(\{0,1\},\min)$.

Припустимо, що компактифікація Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп ізоморфна дискретній напівґратці $(\{0,1\},\min)$. Тоді за твердженням (i) група одиниць $H(\mathbb{I})$ є відкрито-замкненою підгрупою в $\mathscr{I}_\lambda^\infty$. Припустимо, що $\mathscr{A}(\lambda)$ – замкнена підгрупа в $H(\mathbb{I})$. Нехай 0 – нуль півгрупи $\mathbb{Z}_2^0$, $\bar{0}$ і $\bar{1}$ – елементи підгрупи $\mathbb{Z}_2$. Тоді відображення $l\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to \mathbb{Z}_2^0$, означене за формулою

$$(\alpha)l = \begin{cases} \bar{0}, & \text{якщо } \alpha \in \mathscr{A}(\lambda); \\ \bar{1}, & \text{якщо } \alpha \in H(\mathbb{I}) \setminus \mathscr{A}(\lambda); \\ 0, & \text{якщо } \alpha \notin H(\mathbb{I}), \end{cases}$$

є неперервним сюр'єктивним гомоморфізмом. Оскільки $3 = \left|\mathbb{Z}_2^0\right| > |\{0,1\}| = 2$, то не існує гомоморфізму $\bar{l}\colon (\{0,1\}, \min) \to \mathbb{Z}_2^0$ такого, що $l = \beta \circ \bar{l}$, де $\beta\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to (\{0,1\}, \min)$ – довільний гомоморфізм. З отриманого протиріччя випливає, що $\mathscr{A}(\lambda)$ – незамкнена підгрупа групи одиниць $H(\mathbb{I})$.

Твердження (iii) випливає з леми 4 та тверджень (i) і (ii) теореми. $\square$

З наступних трьох прикладів видно, що компактифікацією Бора топологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ в класі топологічних півгруп залежно від топології визначеної на $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ можуть бути усі три півгрупи, зазначені в теоремі 6: $\mathbb{Z}_2^0$, $(\{0,1\}, \min)$ і тривіальна півгрупа.

Приклад 1. Нехай $\lambda \geqslant \omega$ і $\tau_{\mathfrak{d}}$ – дискретна топологія на $\mathscr{I}_\lambda^\infty$. Тоді $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_{\mathfrak{d}})$ – топологічна інверсна півгрупа, і відображення $l\colon \mathscr{I}_\lambda^\infty \to \mathbb{Z}_2^0$, означене за формулою

$$(\alpha)l = \begin{cases} \bar{0}, & \text{якщо } \alpha \in \mathscr{A}(\lambda); \\ \bar{1}, & \text{якщо } \alpha \in H(\mathbb{I}) \setminus \mathscr{A}(\lambda); \\ 0, & \text{якщо } \alpha \notin H(\mathbb{I}), \end{cases}$$

є неперервним сюр'єктивним гомоморфізмом. З леми 4 випливає, що півгрупа $\mathbb{Z}_2^0$ є компактифікацією Бора півгрупи $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_{\mathfrak{d}})$ в класі топологічних півгруп.

Приклад 2. Означимо топологію τ_F на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ так. Для кожного елемента α півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ означимо сім'ю

$$\mathscr{B}_F(\alpha) = \{U_\alpha(F) \mid F \text{ – скінченна підмножина в } \operatorname{dom}\alpha\},$$

де

$$U_\alpha(F) = \{\beta \in \mathscr{I}_\lambda^\infty \quad | \quad \operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta, \ \ \operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta \text{ і } (x)\beta = (x)\alpha \text{ для всіх } x \in F\}.$$

Оскільки умови (BP1)-(BP3) [17] виконуються для сім'ї $\{\mathscr{B}_F(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}_\lambda^\infty}$, то сім'я $\{\mathscr{B}_F(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}_\lambda^\infty}$ є базою топології τ_F на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$. За твердженням 5.11 [13], $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_F)$ є топологічною інверсною півгрупою, топологічний простір якої цілком регулярний. Оскільки група одиниць $H(\mathbb{I})$ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ є відкритою підгрупою в $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_F)$ і підгрупа $\mathscr{A}(\lambda)$ щільна в $H(\mathbb{I})$ (див. [4]), то півгрупа $(\{0,1\}, \min)$ є компактифікацією Бора півгрупи $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_F$ в класі топологічних півгруп.

Приклад 3. Означимо топологію τ_{WF} на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ так: для кожного елемента α півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ означимо сім'ю

$$\mathscr{B}_{WF}(\alpha) = \{U_\alpha(F) \mid F \text{ – скінченна підмножина в } \operatorname{dom}\alpha\},$$

де

$$U_\alpha(F) = \{\beta \in \mathscr{I}_\lambda^\infty \quad | \quad \operatorname{dom}\beta \subseteq \operatorname{dom}\alpha \ \text{ і } \ (x)\beta = (x)\alpha \ \text{ для всіх } \ x \in F\}.$$

Оскільки умови (BP1)-(BP3) [17] виконуються для сім'ї $\{\mathscr{B}_{WF}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}_\lambda^\infty}$, то сім'я $\{\mathscr{B}_{WF}(\alpha)\}_{\alpha\in\mathscr{I}_\lambda^\infty}$ є базою топології τ_{WF} на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^\infty$. За твердженням 5.14 [13],

$(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_{WF})$ є гаусдорфовою топологічною інверсною півгрупою. Оскільки група одиниць $H(\mathbb{I})$ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ не є відкритою підгрупою в $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_F)$, то компактифікація Бора півгрупи $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau_{WF})$ в класі топологічних півгруп є тривіальною півгрупою.

Оскільки за теоремою 5.1 [13] кожна спадково гаусдорфова берівська топологія τ на півгрупі $\mathscr{I}_\omega^\infty$ така, що $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ – напівтопологічна півгрупа, є дискретною, то з теореми 6 випливає твердження 1.

Твердження 1. *Компактифікація Бора гаусдорфової берівської топологічної півгрупи $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ в класі топологічних півгруп ізоморфна дискретній напівгрупі $\mathbb{Z}_2^0$.*

Надалі через $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$ позначатимемо вільну напівґратку з одиницею над кардиналом λ.

Твердження 2. *Нехай τ – гаусдорфова топологія на півгрупі $\mathscr{I}_\omega^\infty$ така, що $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ – топологічна інверсна півгрупа і в'язка $E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$ – є берівським підпростором в $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$. Тоді одиниця $\mathbb{I}$ напівґратки $E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$ є ізольованою точкою в $E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$, а отже, група одиниць $H(\mathbb{I})$ півгрупи $\mathscr{I}_\omega^\infty$ відкрито-замкнена підгрупа в $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$.*

Доведення. За твердженням 2.2 (iii) [13] напівґратка $E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$ ізоморфна напівґратці $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$. Оскільки ${\uparrow}\chi$ – скінченна підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$ для довільного $\chi \in \mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$, то ${\uparrow}\chi$ – замкнена підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$. Занумеруємо всі елементи кардинала λ натуральними числами: $\omega = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots\}$. Для довільного натурального числа n позначимо $y_n = x_1 x_2 \ldots x_n$. Тоді $y_n \in \mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$ та ${\uparrow}y_n$ – скінченна, а отже, і замкнена підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$ для довільного натурального числа n, причому $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} {\uparrow}y_n = \mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$. Оскільки за припущенням твердження топологічний простір напівґратки $E(\mathscr{I}_\omega^\infty) = \mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$ є берівським, то існує елемент y_i напівґратки $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$ такий, що $\operatorname{Int}_{\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)}({\uparrow}y_i) \neq \varnothing$. Отож, існує скінченна відкрита підмножина $A \subseteq {\uparrow}y_i$ в $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$. Тоді за твердженням IV-1.13 [18], ${\uparrow}A$ – відкрита підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$, а отже, одиниця $\mathbb{I}$ напівґратки $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$ є ізольовано точкою в $\mathscr{P}_{<\omega}(\omega)$.

Оскільки $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ – топологічна інверсна півгрупа, то відображення $h_-\colon \mathscr{I}_\omega^\infty \to E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$ та $h_+\colon \mathscr{I}_\omega^\infty \to E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$, означені за формулами $(\chi)h_- = \chi \cdot \chi^{-1}$ та $(\chi)h_+ = \chi^{-1}\cdot\chi$, є неперервними, а отже, $H(\mathbb{I}) = (\mathbb{I})h_+ \cap (\mathbb{I})h_-$ – відкрито-замкнена підмножина в $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$. □

З твердження 2 та теореми 6 випливає така теорема.

Теорема 7. *Нехай τ – гаусдорфова топологія на півгрупі $\mathscr{I}_\omega^\infty$ така, що $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ – топологічна інверсна півгрупа і в'язка $E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$ – є берівським підпростором в $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$. Тоді компактифікація Бора топологічної півгрупи $(\mathscr{I}_\omega^\infty, \tau)$ в класі топологічних півгруп ізоморфна нетривіальній підпівгрупі дискретної півгрупи $\mathbb{Z}_2^0$.*

Елемент e топологічної напівґратки E називається *точкою локального мінімуму* в E, якщо існує відкритий окіл $U(e)$ точки e в E такий, що $U(e) \cap {\downarrow}e = \{e\}$ [18]. Зауважимо, що ідемпотент e топологічної напівґратки E є точкою локального мінімуму в E тоді і лише тоді, коли ${\uparrow}e$ – відкрита множина в E.

Лема 5. *Кожна гаусдорфова локально компактна топологія τ на напівґратці $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$ така, що $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$ – напівтопологічна півгрупа, є дискретною.*

Доведення. Якщо $\lambda < \omega$, то твердження леми очевидне. Тому надалі будемо вважати $\lambda \geqslant \omega$.

Ми покажемо, що для довільного ідемпотенту $\chi \in \mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$ існує ідемпотент $\varepsilon \leqslant \chi$ напівґратки $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$ такий, що $\uparrow\varepsilon$ – відкрита підмножина в $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$. Оскільки $\uparrow\varepsilon$ – скінченна підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$ для кожного ідемпотенту $\varepsilon \in \mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$, то отримуємо, що ε – ізольована точка в $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$.

Зафіксуємо відкритий окіл $U(\chi)$ ідемпотенту χ в $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$ такий, що $\operatorname{cl}_{\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)}(U(\chi))$ – компактна підмножина в $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$. Тоді підпростір $A(\chi) = \operatorname{cl}_{\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)}(U(\chi))$ в $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$ з індукованим з напівґратки $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$ частковим порядком є компактним частково впорядкованим простором, а отже, існує мінімальний елемент χ_0 множини $A(\chi)$ такий, що $\chi_0 \leqslant \chi$. Позаяк $\uparrow\chi_0$ – скінченна підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$, то χ – точка локального мінімуму в $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$. Отож, $\uparrow\chi$ – відкрита скінченна підмножина в $\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda)$, а отже, χ – ізольована точка в $(\mathscr{P}_{<\omega}(\lambda), \tau)$. $\square$

З леми 5 та теореми 6 випливає теорема 8.

Теорема 8. *Нехай λ – нескінченний кардинал і $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau)$ – топологічна інверсна півгрупа з локально компактною в'язкою $E(\mathscr{I}_\omega^\infty)$. Тоді кожен $\mathscr{H}$-клас півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ відкрито-замкнена підмножина в $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau)$, а отже, компактифікація Бора топологічної півгрупи $(\mathscr{I}_\lambda^\infty, \tau)$ в класі топологічних півгруп ізоморфна нетривіальній підпівгрупі дискретної півгрупи $\mathbb{Z}_2^0$.*

Жодна з компактних топологічних півгруп не містить півгрупу $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ [23], оскільки усі нетривіальні гомоморфізми півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ є або ізоморфізмами, або ж груповими гомоморфізмами, причому образ півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ є циклічна група [23, теорема 2.9], то з твердження 2 [9] випливає така теорема.

Теорема 9. *Компактифікація Бора дискретної півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ в класі топологічних півгруп топологічно ізоморфна компактифікації Бора дискретної адитивної групи цілих чисел.*

Аналогічно, оскільки жодна з компактних топологічних півгруп не містить півгрупу $\mathscr{I}_\infty^{\,\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ [10], і всі нетривіальні гомоморфізми півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\,\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ є або ізоморфізмами, або ж груповими гомоморфізмами, причому образ півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\,\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ – циклічна група [10, теорема 2], то з твердження 2 [9] випливає така теорема.

Теорема 10. *Компактифікація Бора дискретної півгрупи $\mathscr{I}_\infty^{\,\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$ в класі топологічних півгруп топологічно ізоморфна компактифікації Бора дискретної адитивної групи цілих чисел.*

Список використаної літератури

1. *Вагнер В.В.* К теории частичных преобразований / *Вагнер В.В.* // ДАН СССР. – 1952. – Т. 84, №5. – С. 653-656.
2. *Вагнер В.В.* Обобщённые группы / *Вагнер В.В.* // ДАН СССР. – 1952. – Т. 84, №5. – С. 1119-1122.
3. *Вейль Г.* Классические группы их инварианты и представления. / *Вейль Г.* – М., 1947.

4. *Гуран И.И.* Топология бесконечной симметрической группы и уплотнения / *Гуран И.И.* // Comment. Math. Univ. Carol. – 1981. – Vol. 22, №2. – P. 311-316.
5. *Гуран I.* Скінченні симетричні групи та їх вкладення / *Гуран I.* // International Conference on Functional Analysis. Dedicated to 90th Anniversary of V. E. Lyantse. (L'viv, Ukraine, November 17-21, 2010). – L'viv, 2010. – Book of Abstracts. – P. 104.
6. *Гутік О.* Про напівтопологічні симетричні інверсні півгрупи обмеженого скінченного рангу / *Гутік О., Рейтер А.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2010. – Вип. 72. – С. 94-106.
7. *Курош А.Г.* Теория групп. / *Курош А.Г.* – М., 1967.
8. *Понтрягин Л.С.* Непрерывные группы. / *Понтрягин Л.С.* – М., 1973.
9. *Anderson L.W.* On the compactification of certain semigroups / *Anderson L.W., Hunter R.P.* // Contrib. Extens. Theory Topol. Struct. Proc. Sympos. Berlin 1967. – 1969. – P. 21-27.
10. *Chuchman I.Ya.* Topological monoids of almost monotone, injective cofinite partial selfmaps of positive integers / *Chuchman I.Ya., Gutik O.V.* // Карпатські математичні публікації. – 2010. – Т. 44, №1. – С. 119-132.
11. *Carruth J.H.* The Theory of Topological Semigroups, Vol. I / *Carruth J.H., Hildebrant J.A., Koch R.J.* – Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1983.
12. *Carruth J.H.* The Theory of Topological Semigroups, Vol. II. / *Carruth J.H., Hildebrant J.A., Koch R.J.* – Marcel Dekker, Inc., New York and Basel, 1986.
13. *Chuchman I.* On monoids of injective partial selfmaps almost everywhere the identity / *Chuchman I., Gutik O.* // Demonstr. Math. – 2011. – Vol. 44, №4. – P. 699-722.
14. *Clifford A.H.* The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. I. / *Clifford A.H., Preston G.B.* – Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961.
15. *Clifford A.H.* The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. II. / *Clifford A.H., Preston G.B.* – Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
16. *Ellis R.* Locally compact transformation groups / *Ellis R.* // Duke Math. J. – 1957. – Vol. 24, №2. – P. 119-125.
17. *Engelking R.* General Topology, 2nd ed. / *Engelking R.* – Heldermann, Berlin, 1989.
18. *Gierz G.* Continuous Lattices and Domains. / *Gierz G., Hofmann K.H., Keimel K., Lawson J.D., Mislove M.W., and Scott D.S.* – Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003.
19. *Gutik O.* Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups / *Gutik O., Lawson J., Repovš D.* // Semigroup Forum. – 2009. – Vol. 78, №2. – P. 326-336.
20. *Gutik O.* Topological semigroups of matrix units / *Gutik O., Pavlyk K.*, // Algebra Discrete Math. – 2005. – №. 3. – P. 1-17.
21. *Gutik O.V.* Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt λ^0-extensions / *Gutik O.V., Pavlyk K.P., Reiter A.R.* // Мат. Студії. – 2009. – Т. 32, №2. – С. 115-131.
22. *Gutik O.V.* Symmetric inverse topological semigroups of finite rank $\leqslant n$ / *Gutik O.V., Reiter A.R.* // Мат. методи фіз.-мех. поля. – 2009. – Т. 52, №3. – С. 7-14.
23. *Gutik O.* Topological monoids of monotone, injective partial selfmaps of $\mathbb{N}$ having cofinite domain and image / *Gutik O., Repovš D.* // Stud. Sci. Math. Hungar. – 2011. – Vol. 48, №3. – P. 342-353.
24. *Haworth R.C.* Baire spaces / *Haworth R.C., McCoy R.A.* – Dissertationes Math., Warszawa, PWN, 1977, Vol. 141. 73p.
25. *Petrich M.* Inverse Semigroups. / *Petrich M.* – John Wiley & Sons, New York, 1984.
26. *Ruppert W.* Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory. / *Ruppert W.* – Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 1079. – Springer, Berlin, 1984.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74

Стаття: надійшла до редакції 05.01.2011
доопрацьована 07.07.2011
прийнята до друку 21.09.2011

SYMMETRIC TOPOLOGICAL GROUPS AND SEMIGROUPS

Igor GURAN[1], Oleg GUTIK[1], Oleksandr RAVSKY[2], Ivan CHUCHMAN[1]

[1]*Ivan Franko National University of L'viv,*
Universytets'ka Str., 1, L'viv, 79000
[2]*Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics of NASU,*
Naukova Str., 3b, L'viv, 79061
e-mails: igor_guran@yahoo.com, o_gutik@franko.lviv.ua, oravsky@mail.ru,
chuchman_i@mail.ru

In this paper we describe Bohr compactifications of a topological group $\mathscr{S}(\lambda)$ of bijective transformations with finite supports of an infinite cardinal λ, a topological semigroup $\mathscr{I}_{\lambda}^{\infty}$ of almost identity partial bijective transformations of an infinite cardinal λ and topological semigroups of monotone and almost monotone cofinite injective transformations of the set of positive integers $\mathscr{I}_{\infty}^{\nearrow}(\mathbb{N})$ and $\mathscr{I}_{\infty}^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$.

Key words: topological semigroup, topological group, Bohr compactification.

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ ГРУППЫ И ПОЛУГРУППЫ

Игорь ГУРАН[1], Олег ГУТИК[1], Александр РАВСКИЙ[2], Иван ЧУЧМАН[1]

[1]*Львовский национальный университет имени Івана Франко,*
ул. Университетская 1, Львов, 79000
[2]*Институт прикладных проблем механики и математики НАН Украины,*
ул. Наукова 3б, Львов, 79061
e-mails: igor_guran@yahoo.com, o_gutik@franko.lviv.ua, oravsky@mail.ru,
chuchman_i@mail.ru

Описано компактификации Бора топологической группы $\mathscr{S}(\lambda)$ биективных преобразований с конечным носителем бесконечного кардинала λ, топологической полугруппы $\mathscr{I}_\lambda^\infty$ почти тождественных частичных биективных преобразований бесконечного кардинала λ и топологических полугрупп монотонных и почти монотонных коконечных инъективных преобразований натуральных чисел $\mathscr{I}_\infty^{\nearrow}(\mathbb{N})$ и $\mathscr{I}_\infty^{\Rsh\!\!\nearrow}(\mathbb{N})$.

Ключевые слова: топологическая полугруппа, топологическая группа, компактификация Бора.