ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 52–60
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 52–60

УДК 517.574

КЛАСИФІКАЦІЯ ІЗОЛЬОВАНИХ ОСОБЛИВИХ ТОЧОК СУБГАРМОНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Оксана ГНАТЮК[1], Андрій КОНДРАТЮК[1], Юлія КУД'ЯВІНА[2]

[1] *Львівський національний університет імені Івана Франка,*
вул. Університетська, 1, Львів, 79000
e-mail: oksanka.gnatyuk@gmail.com
e-mail: kond@franko.lviv.ua
[2] *Інститут математики національної академії наук України,*
вул. Терещенківська, 3, Київ, 01601
e-mail: kudjavina@mail.ru

Запропоновано класифікацію ізольованих особливих точок субгармонійних функцій. Доведено взаємозв'язки між інтегральними середніми та мірами Ріса субгармонійних функцій у проколотих околах ізольованих особливостей.

Ключові слова: субгармонійна функція, ізольована особлива точка, міра Ріса, усувна особлива точка.

1. Вступ. Нехай функція $u(x)$ субгармонійна в деякому проколотому околі точки $x_0 \in \mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, тобто, в $G\backslash\{x_0\}$, де G – відкрита множина в $\mathbb{R}^m$ і u тотожно відмінна від $-\infty$. Тоді ця точка x_0 називається ізольованою особливою точкою функції u.

Якщо F – підмножина множини G, функція u субгармонійна в $G\backslash F$ і існує субгармонійна в G функція $\widetilde{u}$ така, що $\widetilde{u} = u(x)$ при $x \in G\backslash F$, то множина F називається усувною, а функція $\widetilde{u}$ називається субгармонійним продовженням функції u на F [1].

Означення 1 ([2], с. 233). *Компактна множина $F \subset \mathbb{R}^m$ називається полярною, якщо існує субгармонійна в $\mathbb{R}^m$ функція u, скінченна в кожній точці $x \in \mathbb{R}^m\backslash F$ і $u(x) = -\infty$ на F.*

Ємність такої компактної множини дорівнює 0.

Нехай F – полярна множина в $\mathbb{R}^m$, G – відкрита множина в $\mathbb{R}^m$ і існує u – субгармонійна функція в $G\backslash F$. Функція u продовжується субгармонійно на F тоді і лише тоді, коли вона обмежена зверху на $G\backslash F$ [2, с. 255]. У цьому разі її субгармонійне продовження $\widetilde{u}$ на G задається таким співвідношенням [1, с. 59]:

$$\widetilde{u}(x) = \begin{cases} u(x), & x \in G\backslash F, \\ \lim\limits_{y\to x, y\in G\backslash F} \sup u(y), & x \in F. \end{cases}$$

Таке продовження $\widetilde{u}$ на G єдине. У випадку $F = \{x_0\}$ точка x_0 називається усувною точкою фукнції u. В [3] ми подали зображення субгармонійної функції u в околі її ізольованої усувної точки. Наша мета – вивчити взаємозв'язки між поведінкою функції u в термінах інтегральних середніх і розподілом її мас Ріса в околі довільної ізольованої особливої точки. Залежно від цього ми подаємо класифікацію ізольованих особливих точок субгармонійних функцій.

2. Класифікація ізольованих особливих точок субгармонійних функцій. Як було зазначено у Вступі, точка x_0 – усувна точка субгармонійної функції u тоді і лише тоді, коли u обмежена зверху в деякому її проколотому околі. Відтак інші ізольовані особливі точки можемо класифікувати так.

Означення 2. *Нехай x_0 – ізольована особлива точка субгармонійної функції u і $u(x)$ необмежена зверху в кожному її проколотому околі.*

1. *Точка x_0 називається позитивним полюсом, якщо існують проколотий окіл $G\backslash\{x_0\}$ і стала $C > 0$ такі, що*

$$u(x) \leqslant C \log \frac{1}{|x - x_0|}, \qquad m = 2,$$

$$u(x) \leqslant C|x - x_0|^{2-m}, \qquad m \geqslant 3. \tag{1}$$

2. *Точка x_0 називається істотно особливою в іншому (протилежному) випадку.*

У випадку $m = 2$, $u = \log|f|$, $f(z)$ – голоморфна в $G\backslash\{z_0\}$, точка z_0 буде відповідно усувною, полюсом чи істотно особливою точкою функції f.

Справді, у цьому випадку z_0 – усувна точка функції f тоді і лише тоді, коли f обмежена в кожному її проколотому околі, що еквівалентно обмеженості $\log|f|$ зверху. Точка z_0 полюс функції f тоді і лише тоді, коли $|f(z)| \to +\infty$, при $z \to \infty$. У цьому разі існує $n \in \mathbb{N}$ таке, що

$$f(z) = \frac{\phi(z)}{(z - z_0)^n},$$

де ϕ голоморфна в точці z_0, $\phi(z_0) \neq 0$. Це еквівалентно тому, що $\log|f(z)| \to +\infty$, при $z \to z_0$ і $\log|f(z)| \leqslant C \log \frac{1}{|z - z_0|}$ в кожному проколотому околі точки z_0, де C – деяка стала. В інших випадках точка z_0 істотно особлива.

3. Інтегральні середні та міра Ріса субгармонійної функції в околі усувної точки. Оскільки властивість субгармонійності зберігається при зсувах і розтягах чи стисках області її визначення, то можемо вважати, що $x_0 = 0$ і що G круг чи куля радіуса більшого за 1. За цих домовленостей через $I(r, u)$ або коротко $I(r)$ будемо позначати інтегральні середні субгармонійної функції u по сфері S_r

радіуса r з центром $x_0 = 0$,

$$I(r) = I(r,u) = \frac{1}{|S_r|} \int\limits_{|x|=r} u(x)d\sigma, \qquad 0 < r \leqslant 1,$$

де $|S_r|$ площа сфери S_r, а $d\sigma$ – елемент її площі.

Лема 1. *Якщо x_0 – усувна точка субгармонійної функції u, то*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I(\varepsilon, u) = \widetilde{u}(0), \tag{2}$$

де $\widetilde{u}$ – субгармонійне продовження u на G.

Доведення. Приймемо $I(\varepsilon, u) = I(\varepsilon, \widetilde{u})$. З нерівності $\widetilde{u}(0) \leqslant I(\varepsilon, \widetilde{u}(0))$ та напівнеперервності зверху функції $\widetilde{u}$ випливає, що $I(\varepsilon, \widetilde{u}(0)) \to \widetilde{u}(0)$ при $\varepsilon \to 0$. Звідси одержуємо (2). □

У випадку усувної точки будемо вважати, що функція u довизначена в точці $x_0 = 0$ формулою 2 і замість $\widetilde{u}$ писатимемо u.

Для ізольованої особливої точки $x_0 = 0$ довільного характеру функція розподілу $\nu(t)$ міри Ріса μ функції u визначається так [4]:

$$\nu(t) - \nu(t_0) = \mu(\{x : t_0 < x \leqslant t\}), \qquad t_0 < t < 1,$$
$$\nu(t_0) - \nu(t) = \mu(\{x : t < x \leqslant t_0\}), \qquad 0 < t < t_0,$$

де значення $t_0 \in (0,1)$ та $\nu(t_0) \in \mathbb{R}$ вибирають довільними. Функція $\nu(t)$ неспадна, неперервна справа на $(0,1)$ і визначена з точністю до сталої.

Для усувної точки $x_0 = 0$ субгармонійної функції u в [3] з'ясували, що границя

$$\lim_{t \to 0} \nu(t) := \nu(+0)$$

скінченна, а також, що

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\log \varepsilon} I(\varepsilon) := \gamma \in [0, +\infty), \qquad m = 2,$$
$$\lim_{\varepsilon \to 0} (-\varepsilon^{m-2} I(\varepsilon)) := \gamma \in [0, +\infty), \qquad m \geqslant 3. \tag{3}$$

Ми подаємо таку класифікацію усувних особливих точок.

Означення 3. *Усувна точка $x_0 = 0$ субгармонійної функції u називається:*

i) *звичайною, якщо $-\infty < \widetilde{u}(0)$;*

ii) *усувною точкою I роду, якщо $u(0) = -\infty$ і інтеграл*

$$\int\limits_0^1 \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t^{m-1}} dt \tag{4}$$

збігається;

iii) *усувною точкою II роду, якщо $\widetilde{u}(0) = -\infty$ і інтеграл (4) розбігається.*

В термінах інтегральних середніх і функції розподілу $\nu(t)$ міри Ріса функції u ці точки характеризуються так.

Теорема 1. *Виконуються такі твердження:*

а) *якщо* $x_0 = 0$ *– звичайна усувна точка субгармонійної функції* u, *то*

$$I(r) - u(0) = \int\limits_0^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t^{m-1}} dt, \qquad 0 < r < 1;$$

б) *якщо* $x_0 = 0$ *– усувна точка I роду, то*

$$I(r) - \gamma \log r = \int\limits_0^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t} + \gamma_1, \qquad m = 2,$$

де

$$\gamma_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} (I(\varepsilon) - \gamma \log \varepsilon),$$

і

$$I(r) + \gamma r^{2-m} = (m-2) \int\limits_0^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t^{m-1}} dt + \gamma_1, \qquad m \geqslant 3,$$

де

$$\gamma_1 = \lim_{\varepsilon \to 0} (I(\varepsilon) + \gamma \varepsilon^{2-m});$$

в) *якщо* $x_0 = 0$ *– усувна точка II роду, то*

$$I(r) - \gamma \log r = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\int\limits_\varepsilon^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t} dt + I(\varepsilon) - \gamma \log \varepsilon \right), \qquad m = 2$$

і

$$I(r) + \gamma r^{2-m} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left((m-2) \int\limits_\varepsilon^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t^{m-1}} dt + I(\varepsilon) + \gamma \varepsilon^{2-m} \right), \qquad m \geqslant 3.$$

Для доведення Теореми 1 нам потрібна лема.

Лема 2. *Якщо* $x_0 = 0$ *– усувна точка субгармонійної функції* u, *то при* $0 < r_0 < < r < 1$ *виконується*

$$\frac{1}{\log r_0 - \log r} \int\limits_{r_0}^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t} dt = \frac{I(r) - I(r_0)}{\log r_0 - \log r} + \gamma, \quad m = 2,$$

$$\frac{m-2}{r_0^{2-m} - r^{2-m}} \int\limits_{r_0}^r \frac{\nu(t) - \nu(+0)}{t^{m-1}} dt = \frac{I(r) - I(r_0)}{r_0^{2-m} - r^{2-m}} - \gamma, \quad m \geqslant 3. \tag{5}$$

Доведення. В [5], [4] доведено такий аналог формули Єнсена при $0 < s < r_0 < r < 1$

$$\frac{1}{\log r_0 - \log r} \int\limits_{r_0}^r \frac{\nu(t)}{t} - \frac{1}{\log s - \log r_0} \int\limits_s^{r_0} \frac{\nu(t)}{t} =$$

$$= \frac{I(r) - I(r_0)}{\log r_0 - \log r} - \frac{I(r_0) - I(s)}{\log s - \log r_0}, \qquad m = 2$$

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74

і

$$\frac{m-2}{r_0^{2-m}-r^{2-m}}\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}-\frac{m-2}{s^{2-m}-r_0^{2-m}}\int\limits_{s}^{r_0}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}=$$
$$=\frac{I(r)-I(r_0)}{r_0^{2-m}-r^{2-m}}-\frac{I(r_0)-I(s)}{s^{2-m}-r_0^{2-m}},\qquad m\geqslant 3. \tag{6}$$

Спрямувавши s до нуля і врахувавши (3), бачимо, що останнє відношення правого боку (6) прямує до γ. Отож, ми отримуємо вираз з правого боку (5). Щодо лівого боку (6), то покажемо, що

$$\lim_{s\to+0}\frac{1}{\log s-\log r_0}\int\limits_{s}^{r_0}\frac{\nu(t)}{t}dt=\nu(+0),\quad m=2, \tag{7}$$

та

$$\lim_{s\to+0}\frac{m-2}{s^{2-m}-r_0^{2-m}}\int\limits_{s}^{r_0}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}dt=\nu(+0),\quad m\geqslant 3 \tag{8}$$

і отримаємо вираз з лівого боку (5). Покажемо, що виконується (8).

Оскільки $\nu(t)$ неспадна, то

$$\nu(+0)=\frac{(m-2)\nu(+0)}{s^{2-m}-r_0^{2-m}}\int\limits_{s}^{r_0}\frac{dt}{t^{m-1}}\leqslant\frac{m-2}{s^{2-m}-r_0^{2-m}}\int\limits_{s}^{r_0}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}dt. \tag{9}$$

З іншого боку, оскільки значення $\nu(+0)$ скінченне, то для довільного $\varepsilon>0$ знайдеться $s_0>0$ таке, що $\nu(s)<\nu(+0)+\varepsilon$ при $0<s<s_0$. Тому вираз з правого боку (9) не перевищує

$$(\nu(+0)+\varepsilon)\frac{s^{2-m}-s_0^{2-m}}{s^{2-m}-r_0^{2-m}}+\frac{m-2}{s^{2-m}-r_0^{2-m}}\int\limits_{s_0}^{r_0}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}dt.$$

Спрямувавши s до нуля, одержимо, що правий бік (9) не перевищує $\nu(+0)+\varepsilon$. Враховуючи довільність ε та (9), отримаємо (8). Співвідношення (7) доводиться аналогічно. Лему 2 доведено. □

Доведення Теореми 1.

Доведення. Якщо $x_0=0$ – звичайна усувна точка, то згідно з Лемою 1 $u(0)=I(+0)\neq-\infty$ і з (3) випливає, що $\gamma=0$. Скоротивши (5) на множник перед інтегралом і спрямувавши r_0 до нуля, одержимо a.

Якщо $x_0=0$ – усувна точка I роду, то співвідношення (5) дає

$$I(r)-\gamma\log r=\int\limits_{0}^{r}\frac{\nu(t)-\nu(+0)}{t}dt+\lim_{r_0\to0}(I(r_0)-\gamma\log r_0),\quad m=2$$

і

$$I(r)+\gamma r^{2-m}=(m-2)\int\limits_{0}^{r}\frac{\nu(t)-\nu(+0)}{t^{m-1}}dt+\lim_{r_0\to0}(I(r_0)+\gamma r_0^{2-m}),\quad m\geqslant 3,$$

тобто *б*. Твердження *в* випливає безпосередньо з (5). Теорема 1 доведена. □

Зауваження 1. Порівнюючи рівність пункту *а* Теореми 1 з класичним аналогом формули Єнсена для субгармонійних функцій (див., наприклад, [2]), бачимо, що

$$\nu(t) - \nu(t_0) = n(t),$$

де $n(t) = \mu(\{x : |x| \leqslant t\})$.

Покажемо тепер, що всі випадки Означення 3 можливі. Приклади випадку *а* добре відомі. Функції $u(x) = \log|x|$ при $m = 2$ і $u(x) = -|x|^{2-m}$ при $m \geqslant 3$, визначені в $\mathbb{R}^m \backslash \{0\}$, мають усувну точку $x_0 = 0$ I роду, бо вони гармонійні і за $\nu(t)$ можна взяти тотожний нуль.

Подамо приклад субгармонійної функції з усувною точкою II роду. Нехай $z = x + iy$,

$$u(\zeta) = \int\limits_{|z|\leqslant 1} \frac{\log|z-\zeta| dxdy}{(1-\log|z|)^2|z|^2}.$$

Вона субгармонійна в $\mathbb{R}^2$ як логарифмічний потенціал. Отримали $u(0) = -\infty$ і

$$\nu(t) - \nu(+0) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|z|\leqslant t} \frac{dxdy}{(1-\log|z|)^2|z|^2} =$$

$$= \int\limits_0^t \frac{d\tau}{(1-\log\tau)^2\tau} = \frac{1}{1-\log t}, \qquad 0 < t \leqslant 1.$$

Інтеграл

$$\int\limits_0^1 \frac{\nu(t)-\nu(+0)}{t} dt = \int\limits_0^1 \frac{dt}{(1-\log t)t}$$

розбігається. Тому $x_0 = 0$ – усувна точка функції u II роду.

При $m \geqslant 3$ і $2 \leqslant \alpha < m$ аналогічно перевіряється, що $x_0 = 0$ є усувною точкою II роду субгаромнійної функції

$$u(x) = -\int\limits_{|\xi|\leqslant 1} \frac{d\xi}{|x-\xi|^{m-2}|\xi|^\alpha}.$$

4. Інтегральні середні та функція розподілу міри Ріса субгармонійної функції в околі позитивного полюса та істотно особливої точки.

Теорема 2. *Якщо $x_0 = 0$ – позитивний полюс субгармонійної функції u, то при $m = 2$*

$$I(r) = \alpha \log r + \lim_{\varepsilon\to+0} \left(\int\limits_\varepsilon^r \frac{\nu(t)-\nu(\varepsilon)}{t} dt + I(\varepsilon) - I_+^\wedge(\varepsilon)\log\varepsilon \right), \qquad 0 < r < 1, \qquad (10)$$

де $I_+^\wedge(\varepsilon)$ – похідна справа за змінною $\log r$ функції $I(r)$ в точці ε, і

$$\alpha = \lim_{\varepsilon\to+0} I_+^\wedge(\varepsilon),$$

а при $m \geqslant 3$

$$I(r)=\alpha r^{2-m}+\lim_{\varepsilon\to+0}\left((m-2)\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\nu(t)-\nu(\varepsilon)}{t^{m-1}}dt+I(\varepsilon)-I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)\varepsilon^{2-m}\right),\ 0<r<1, \quad (11)$$

де $I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)$ *похідна справа функції* $I(r)$ *за змінною* r^{2-m} *в точці* ε, *і*

$$\alpha=-\lim_{\varepsilon\to+0}I_{+}^{\wedge}(\varepsilon).$$

Якщо ж $x_0 = 0$ – *істотно особлива точка субгармонійної функції* u, *то при* $m = 2$

$$I(r)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\nu(t)-\nu(\varepsilon)}{t}dt+I(\varepsilon)+I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)(\log r-\log\varepsilon)\right),\qquad 0<r<1, \qquad (12)$$

а при $m \geqslant 3$

$$I(r)=\lim_{\varepsilon\to+0}\left((m-2)\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\nu(t)-\nu(\varepsilon)}{t^{m-1}}dt+I(\varepsilon)+I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)(\varepsilon^{2-m}-r^{2-m})\right),\ 0<r<1. \quad (13)$$

Доведення. При $m \geqslant 3$ співвідношення (6) запишемо у вигляді

$$(m-2)\int\limits_{r_0}^{r}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}dt=I(r)-I(r_0)-\frac{r_0^{2-m}-r^{2-m}}{r_0^{2-m}-s^{2-m}}\left((m-2)\int\limits_{s}^{r_0}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}dt-I(r_0)+I(s)\right).$$

Спрямувавши r_0 до $s+0$ і прийнявши $s=\varepsilon$, знаходимо

$$(m-2)\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\nu(t)}{t^{m-1}}dt=I(r)-I(\varepsilon)+I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)(\varepsilon^{2-m}-r^{2-m})-\nu(\varepsilon)(\varepsilon^{2-m}-r^{2-m}),$$

що можна записати у вигляді

$$I(r)=(m-2)\int\limits_{\varepsilon}^{r}\frac{\nu(t)-\nu(\varepsilon)}{t^{m-1}}dt+I(\varepsilon)+I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)(\varepsilon^{2-m}-r^{2-m}),\qquad 0<r<1. \qquad (14)$$

Звідси випливає (13) не залежно від характеру особливості точки $x_0 = 0$. Доведемо таке: коли $x_0 = 0$ – позитивний полюс, то (13) набуває вигляду (11).

Приймемо $t = r^{2-m}$, $I(r) = \psi(t)$, $0 < r < 1$. Функція $\psi(t)$ опукла на $(1, +\infty)$, тому $\psi'_{+}(t)$ не спадає, а відтак має границю при $t \to +\infty$ скіченну, або $+\infty$. У випадку, коли $x_0 = 0$ – позитивний полюс, ця границя скінченна. Справді, згідно з (1) існують сталі $C > 0$ та r_0, $0 < r_0 < 1$, такі, що $I(r) \leqslant r^{2-m}$ при $0 < r \leqslant r_0$, тобто $\psi(t) \leqslant Ct$, $t_0 \leqslant t$. Окрім того, існує скіченна чи $+\infty$ границя відношення $\frac{\psi(t)}{t}$ при $t \to +\infty$ (див., наприклад, [2]) і

$$\psi(2t)-\psi(t)=\int\limits_{t}^{2t}\psi'_{+}(t)dt\geqslant\psi'_{+}(t)t.$$

Тому границя

$$\lim_{t\to\infty}\psi'_{+}(t)=\lim_{\varepsilon\to0}I_{+}^{\wedge}(\varepsilon)$$

існує і скінченна. Позначивши її через α, з (14) одержуємо (11). Співвідношення (12) та (10) доводяться аналогічно. Теорему 2 доведено. $\square$

Список використаної літератури

1. *Klimek M.* Pluripotential theory / *Klimek M.* – Clarendon, 1991.
2. *Hayman W.K.* Subharmonic functions / *Hayman W.K., Kennedy P.B.* – M., 1980.
3. *Gnatiuk O.P.* Subharmonic functions in ball layers. II / *Gnatiuk O.P., Kondratyuk A.A.* // Mat. Stud. – 2011. – Vol. 35., №1. – P. 50-59.
4. *Gnatiuk O.P.* Subharmonic functions in ball layers. I / *Gnatiuk O.P., Kondratyuk A.A.* // Mat. Stud. – 2010. – Vol. 34., №2. – P. 180-192.
5. *Kondratyuk A.A., Stashyshyn O.V.* Subharmonic functions on annuli. A two-parameter approach. / *Kondratyuk A.A., Stashyshyn O.V.* // Математичний вісник НТШ. – 2010. – №7. – С. 352-365.

Стаття: надійшла до редакції 19.11.2010
доопрацьована 08.06.2011
прийнята до друку 21.09.2011

CLASSIFICATION OF ISOLATED SINGULARITIES OF SUBHARMONIC FUNCTIONS

Oksana GNATIUK[1], Andriy KONDRATYUK[1], Julia KUDJAVINA[2]

[1]*Ivan Franko National University of Lviv,*
Universitetska Str., 1, Lviv, 79000
e-mail: oksanka.gnatyuk@gmail.com
e-mail: kond@franko.lviv.ua
[2]*Institute of Mathematics of the National Academy of Sciences of Ukraine,*
Tereshchenkivska Str., 3, Kyiv, 01601
e-mail: kudjavina@mail.ru

Classification of isolated singularities of subharmonic functions is proposed. Also, relationships between integral means and Riesz measures of subharmonic functions in punctured neighbourhoods of isolated singularities are established.

Key words: subharmonic function, isolated singularity, the Riesz measure, removable singularity.

ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74

КЛАССИФИКАЦИЯ ИЗОЛИРОВАННЫХ ОСОБЫХ ТОЧЕК СУБГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Оксана ГНАТЮК[1], Андрей КОНДРАТЮК[1], Юлия КУДЬЯВИНА[2]

[1]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
ул. Университетская, 1, Львов, 79000
e-mail: oksanka.gnatyuk@gmail.com
e-mail: kond@fanko.lviv.ua
[2]*Институт метематики национальной академии наук Украины,*
ул. Терещенковская, 3, Киев, 01601
e-mail: kudjavina@mail.ru

Предложена классификация изолированных особых точек субгармонических функций. Установленны взаимосвязи между интегральными средними и мерами Рисса субгармонических функций в проколотых окрестностях изолированных особенностей.

Ключевые слова: субгармоническая функция, изолированная особая точка, мера Рисса, устранимая особая точка.