ISSN 2078-3744. Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. 2011. Випуск 74. С. 5–10
Visnyk of the Lviv Univ. Series Mech. Math. 2011. Issue 74. P. 5–10

УДК 517.946

ІСНУВАННЯ РОЗВ'ЯЗКУ ЗАДАЧІ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗІЛІНІЙНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ З АБСОРБЦІЄЮ В НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ З НУЛЬОВИМ ЗАГОСТРЕННЯМ

Ольга БОЛДОВСЬКА

Донецький національний університет,
вул. Університетська, 24, Донецьк, 83001
e-mail: omboldovskaya@mail.ru

В циліндричній області, необмеженій за просторовими змінними, розглянуто задачу Неймана для квазілінійного параболічного рівняння з абсорбцією. Отримано умови існування та неіснування розв'язку цієї задачі.

Ключові слова: нелінійне параболічне рівняння, задача Неймана, необмежена область.

1. Вступ. Розглянуто початково-крайову задачу Неймана

$$u_t = \operatorname{div}(|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p \quad \text{в} \quad Q_T = \Omega \times (0,T), \tag{1}$$

$$|Du|^{\lambda-1}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0, \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{2}$$

$$u(x,0) = \mu, \quad x \in \Omega, \tag{3}$$

де μ – невід'ємна скінченна міра Радона, $\lambda > 0$, $p > 1$. Область $\Omega \in \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 2$, є необмеженою і набуває вигляду

$$\Omega = \{x \in R^N : \ |x'| < x_N^{\beta}, \ \beta > 1\}, \quad x' = (x_1, \ldots, x_{N-1}),$$

$\partial\Omega$ – межа Ω; $\overrightarrow{n}$ – зовнішня одинична нормаль до $\partial\Omega \times (0,T)$, $T > 0$.

Мета нашої праці – дослідити проблеми існування та неіснування слабкого розв'язку задачі (1)-(3) в Q_T.

Параболічні рівняння з абсорбцією є цікавими завдяки впливу абсорбуючого доданка на розв'язність задач, які розглядають. Задача Коші для багатьох відомих модельних нелінійних параболічних рівнянь з абсорбцією та початковою функцією-мірою досить детально досліджена. Задачу Коші з початковою δ-функцією для рівняння теплопровідності з абсорбцією розглядали Х. Брезіс та А. Фрідман [1], для рівняння пористого середовища з абсорбцією – Ш. Камін та Л.А. Пєлєт'є [2], для рівняння неньютонівської фільтрації з абсорбцією – А. Гміра [3], Х. Чен, Я. Кі, М. Ванг [4], для параболічного рівняння з подвійною нелінійністю та абсорбцією –

Х.Ж. Фан [5], для параболічного рівняння з абсорбцією більш загального вигляду (з вимірними коефіцієнтами) – І.І. Скрипнік [6]. У працях зазначених авторів визначали деякий показник абсорбції (назвемо його критичним), залежно від якого існує чи не існує слабкий розв'язок задачі Коші. У [7-9] результати, які отримали для задачі Коші, були розповсюджені на випадок задачі Неймана (1)-(3) в широкому класі необмежених областей, що "не звужуються на нескінченності" та задовольняють умову конуса. В праці ці результати узагальнюються на випадок області з нульовим кутом, тобто області, яка не задовольняє умову конуса.

Означення 1. *Вважатимемо, що* $u(x,t)$ *– слабкий розв'язок задачі* (1)-(3)*, якщо* $u(x,t)\geqslant 0$ *та для будь-якого* $\tau>0$

$$u(x,t)\in C(0,T;L_{2,loc}(\overline{\Omega}))\cap L_{\infty,loc}(\overline{\Omega}\times(\tau,T))\cap L_{\lambda+1,loc}(\tau,T;W_{1,\lambda+1,loc}(\Omega));$$

правильна інтегральна тотожність

$$\int\limits_0^T\int\limits_\Omega(-u\ \xi_t+|Du|^{\lambda-1}Du\ D\xi+u^p\ \xi)\,dx\,dt=0,\quad\forall\,\xi\in C_0^1(R^N\times(\tau,T));$$

$$\lim_{t\to0}\int\limits_\Omega u(x,t)\ X(x)\,dx=\int\limits_\Omega X(x)\,d\mu\quad\forall\,X(x)\in C_0^\infty(R^N).$$

Основними результатами праці є такі теореми.

Теорема 1. *Нехай* μ *– невід'ємна скінченна міра Радона. Якщо* $\lambda+\frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1}>1$ *та* $p<\lambda+\frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1}$*, тоді існує слабкий розв'язок задачі* (1)-(3).

Теорема 2. *Нехай* $\mu=\delta(x)$*. Якщо* $\lambda+\frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1}<1$ *або* $1<\lambda+\frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1}\leqslant p$*, тоді задача* (1)-(3) *не має розв'язку.*

2. Доведення.

Доведення теореми 1. Нехай $\Omega_\rho=\Omega\cap\{|x|<\rho\},\rho>0$. Доведемо спочатку існування розв'язку такої задачі Діріхле-Неймана:

$$(u_k)_t=\operatorname{div}(|Du_k|^{\lambda-1}Du_k)-u_k^p,\quad\text{в }\Omega_k\times(0,T),\tag{4}$$

$$|Du_k|^{\lambda-1}\frac{\partial u_k}{\partial\overrightarrow{n}}=0,\quad\text{на }\partial\Omega\cap\partial\Omega_k,\tag{5}$$

$$u_k(x,0)=u_{0k}(x),\quad\text{в }\Omega_k,\tag{6}$$

$$u_k=0,\quad\text{в }\Omega\cap\partial\Omega_k,\tag{7}$$

де $u_{0k}\in C_0^\infty(\overline{\Omega}_k)$, $u_{0k}\underset{k\to\infty}{\longrightarrow}u_0$ у $L_2(\Omega)$. Для зручності індекс "k" надалі не писатимемо, якщо не виникатиме такої потреби. Користуючись [10], існування розв'язку задачі (4)-(7) доводитемемо методом Фаедо-Гальоркіна. Нехай $\omega_1,\ldots,\omega_m$ – "база" в $V=V_1\cap V_2$, де

$$V_1=W_{1,\lambda+1}(\Omega)\cap\left\{\frac{\partial u_m}{\partial\overrightarrow{n}}=0\ \text{ на }\ \partial\Omega\cap\partial\Omega_k;\quad u_m=0\ \text{ у }\ \Omega\cap\partial\Omega_k\right\},\quad V_2=L_{p+1}(\Omega),$$

і $u_m(t)$ – "наближений розв'язок" задачі (4)-(7). Простір V – сепарабельний (див. [10]). Для будь-яких m, i, $\omega_i\in V$, $\omega_1,...,\omega_m$ – лінійно незалежні, лінійні комбінації ω_i щільні в V. Така база існує (див. [10]). Визначимо $u_m(t)\in[\omega_1,...,\omega_m]$ – простір, який натягується на лінійну оболонку $\omega_1, ..., \omega_m$. Нехай $A(\varphi) = -\operatorname{div}(|D\varphi|^{\lambda-1}D\varphi)$. Шукатимемо $u_m = u_m(t)$ у вигляді

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^{m} g_{im}(t)\omega_i,$$

де g_{im} визначають з умов

$$(u'_m(t), \omega_j) + (A(u_m(t)), \omega_j) + (u_m^p, \omega_j) = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant m. \tag{8}$$

Разом з системою нелінійних диференціальних рівнянь (8) розглянемо також початкові умови

$$u_m(0) = u_{0m}, \quad \text{де} \quad u_{0m} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_{im}\omega_i \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} u_0 \quad \text{у} \quad L_2(\Omega). \tag{9}$$

З відомих результатів про нелінійні системи отримаємо існування розв'язку задачі (8)-(9) на проміжку $[0, t_m]$, $t_m > 0$. Якщо домножити (8) на $g_{im}(t)$, провести додавання за j, то одержимо

$$(u'_m(t), u_m(t)) + (A(u_m(t)), u_m(t)) + (u_m^p, u_m) = 0,$$

звідки, інтегруванням від 0 до t, отримуємо

$$\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_m^2(t)\,dx + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} |Du_m(t)|^{\lambda+1}\,dx\,dt + \int\limits_0^t\int\limits_{\Omega} u_m^{p+1}\,dx\,dt = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega} u_{0m}^2\,dx. \tag{10}$$

У зв'язку з тим, що права частина (10) (внаслідок (9)) обмежена сталою, яка не залежить від m, то

$$u_m \in L_\infty(0,T;L_2(\Omega)) \cap L_{\lambda+1}(0,T;V_1) \cap L_{p+1}(0,T;V_2), \quad t_m = T,$$

(вкладення $u_m(x,t) \in L_{\lambda+1}(0,T;V_1)$ випливає з результатів про еквівалентні норми у просторі $W_{1,\lambda+1}(\Omega)$, [11]). Отож, можна виділити підпослідовність (для спрощення позначимо її також через $\{u_m\}$) таку, що

$$\begin{gathered} u_m \to u \quad *\text{- слабко в} \quad L_\infty(0,T;L_2(\Omega)), \\ u_m \to u \quad \text{слабко в} \quad L_{\lambda+1}(0,T;V_1) \cap L_{\lambda+1}(0,T;V_2), \\ u_m(T) \to \xi \quad \text{слабко в} \quad L_2(\Omega), \\ u_m^p \to \sigma \quad \text{слабко в} \quad L_{(p+1)'}(0,T;V'_2), \\ A(u_m) \to \chi \text{ слабко в } L_{(\lambda+1)'}(0,T;V'_1). \end{gathered} \tag{11}$$

Остання збіжність виконується завдяки нерівності

$$\|A(u)\|_{L_{(\lambda+1)'}(0,T;V'_1)} \leqslant \gamma \|u\|^{\lambda}_{L_{\lambda+1}(0,T;V_1)},$$

тобто $A : L_{\lambda+1}(0,T;V_1) \to L_{(\lambda+1)'}(0,T;V'_1)$. Через V'_1 ми позначаємо простір, спряжений до V_1; $\frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{(\lambda+1)'} = 1$. $V'_2, (p+1)'$ визначають аналогічно.

Фіксуємо j та перейдемо до границі в (8) при $m \to \infty$

$$u_t + \chi + \sigma = 0.$$

З останньої рівності випливає, що $u_t \in L_{(\lambda+1)'}(0,T;V_1') \cap L_{(p+1)'}(0,T;V_2')$. З того, що $u \in L_{\lambda+1}(0,T;V_1) \cap L_{p+1}(0,T;V_2)$, $u_t \in L_{(\lambda+1)'}(0,T;V_1') \cap L_{(p+1)'}(0,T;V_2')$ та компактності вкладання $V \subset L_q$ (див. [12]), де $q = \frac{(\beta(N-1)+1)(\lambda+1)}{\beta(N-1)-\lambda} > 2$,

$$V \subset L_q \subset L_2 \equiv L_{2'} \subset V'$$

випливає, що $u : [0,T] \to L_2(\Omega)-$ неперервна функція, та відображення $u \to u(0)$ є сюр'єктивним відображенням на $L_2(\Omega)$. Отож, $u(0)$ і $u(T)$ мають сенс та $u(0) = u_0$, $u(T) = \xi$. Також можна вважати, що $u_m \to u$ сильно в $L_2(Q_T)$ та майже всюди (м.в.).

Для доведення того, що $\sigma = u^p$ використаємо таку лему.

Лема 1 ([10]). *Нехай Q – обмежена область у $R^N \times R^1_+$, f_m та f такі функції з $L_s(Q), 1 < s < \infty$, що $||f_m||_{L_s(Q)} \leqslant C$, $f_m \to f$ м.в. в Q. Тоді $f_m \to f$ слабко в $L_s(Q)$.*

Застосуємо лему 1 до функції $f_m = u_m^p$ та $s = (p+1)'$. На підставі збіжності $u_m \to u$ майже всюди випливає, що $u_m^p \to u^p$ майже всюди. Отже, з леми 1 отримаємо слабку збіжність $u_m^p \to u^p$ у просторі $L_{(p+1)'}(Q_T)$. З іншого боку, згідно з (11) є слабка збіжність $u_m^p \to \sigma$ в $L_{(p+1)'}(Q_T)$, звідки й отримуємо рівність $\sigma = u^p$.

Внаслідок монотонності оператора A, неважко показати, що $\chi = A(u)$[10].

Отож, існування розв'язку задачі (4)-(7) доведено.

Нехай $u_k = 0$ поза Ω_k, тобто u_k визначені всюди на $\Omega \times (0,T)$. Користуючись компактністю сім'ї розв'язків u_k, можна перейти до границі по $k \to \infty$ аналогічно як у [13-15]. Гранична функція буде розв'язком такої задачі Неймана:

$$u_t = \operatorname{div}(|Du|^{\lambda-1}Du) - u^p \quad \text{в} \quad Q_T,$$

$$|Du|^{\lambda-1}\frac{\partial u}{\partial \overrightarrow{n}} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T),$$

$$u(x,0) = u_0, \quad x \in \Omega,$$

де $u_0 \in L_2(\Omega)$. Далі розглянемо послідовність розв'язків $\{u^{(n)}\}$ попередньої задачі

$$(u^{(n)})_t = \operatorname{div}(|Du^{(n)}|^{\lambda-1}Du^{(n)}) - (u^{(n)})^p \quad \text{у} \quad Q_T, \tag{12}$$

$$|Du^{(n)}|^{\lambda-1}\frac{\partial u^{(n)}}{\partial \overrightarrow{n}} = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \times (0,T), \tag{13}$$

$$u^{(n)}(x,0) = u_0^{(n)}, \quad x \in \Omega. \tag{14}$$

Тут $u_0^{(n)} \in L_2(\Omega)$,

$$\lim_{n\to\infty, t\to 0} \int\limits_\Omega u^{(n)}(x,t)\ X(x)\,dx = \int\limits_\Omega X(x)\,d\mu \quad \forall\, X(x) \in C_0^\infty(R^N).$$

З результатів [16] випливає існування слабкого розв'язку задачі (12)-(14). Для доведення існування розв'язку задачі (1)-(3) треба довести кілька оцінок апроксимуючого розв'язку задачі (12)-(14) аналогічно до [7-8]. $\square$

Доведення теореми 2 можна провести, використовуючи методику, яка була розроблена в [7-9]. У припущенні, що за умов теореми 2 існує слабкий розв'язок задачі

(1)-(3), можна довести, що

$$\lim_{t\to 0}\int_{\Omega} u(x,t)\ X(x)\,dx = 0, \quad \forall\ X(x)\in C_0^{\infty}(R^N). \tag{15}$$

Цей факт суперечить означенню 1, що призводить до твердження теореми 2. Доведення рівності (15) ґрунтується на виборі спеціальних пробних функцій у інтегральній тотожності. Наприклад, у випадку $\lambda + \frac{\lambda+1}{\beta(N-1)+1} = p$ використовуються пробні функції, пов'язані з логарифмом [9]. Також варто зазначити, що на відміну від [7-9], при доведенні (15) відбувається заміна просторової змінної N на β з визначення області Ω.

Список використаної літератури

1. *Bresis H.* Nonlinear parabolic equations involving measures as initial conditions / *Bresis H., Friedman A.* // J. Math. Pures Appl. – 1983. – № 62. – P. 73-97.
2. *Kamin S.* Source-type solutions of degenerate diffusion equations with absorption / *Kamin S., Peletier L.A.* // Israel Jour. Math. – 1985. – № 50. – P. 219-230.
3. *Gmira A.* On quasilinear parabolic equations involving measure data / *Gmira A.* // Asymptotic Anal. – 1990. – № 3. – P. 43-56.
4. *Chen X.* Singular solutions of parabolic p-Laplacian with absorption / *Chen X., Qi Y., Wang M.* // Trans. Amer. Math. Soc. – 2007. – № 359. – P. 5653-5668.
5. *Fan H.J.* Cauchy problem of some doubly degenerate parabolic equations with initial datum a measure / *Fan H.J.* // Acta Math. Sinica, English Series. – 2004. – Vol. 20, № 4. – P. 663-682.
6. *Skrypnik I.I.* Removability of isolated singularities of solutions of quasilinear parabolic equations with absorption / *Skrypnik I.I.* // Sb. Math. – 2005. – № 196. – P. 1693-1713.
7. *Болдовская О.М.* Существование и несуществование слабого решения задачи Неймана для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений в областях с некомпактной границей. Случай медленной диффузии / *Болдовская О.М.* // Тр. ИПММ НАНУ. – 2008. – Т. 16. – С. 33-54.
8. *Болдовская О.М.* Существование и несуществование слабого решения задачи Неймана для вырождающихся квазилинейных параболических уравнений в областях с некомпактной границей. Случай быстрой диффузии / *Болдовская О.М.* // Вісник ДонНУ, Серія А: Природничі науки. – 2009. - Вип. 1. – С. 52-59.
9. *Болдовская О.М.* Устранение особенностей решений задачи Неймана для вырождающихся параболических уравнений с абсорбцией / *Болдовская О.М.* // Нелин. гр. задачи. – 2008. – Т. 18. – С. 1-19.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.-Л.* – М., 1972.
11. *Михлин С.Г.* Линейные уравнения в частных производных. Учеб. пособие для вузов / *Михлин С.Г.* – М., 1977.
12. *Мазья В.Г.* Пространства С.Л. Соболева / *Мазья В.Г.* – Л., 1985.
13. *Tsutsumi M.* On solutions of some doubly nonlinear parabolic equations with absorbtion / *Tsutsumi M.* // J. Math. Anal. Appl. – 1988. – Vol. 132. – P. 187-212.
14. *Ivanov A.V.* Holder estimates near the boundary for generalized solutions of quasilinear parabolic equations that admit double degeneration / *Ivanov A.V.* // Zap. Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. – 1991. – Vol. 188. – P. 45-69.
15. *Porzio M.* Holder estimates for local solutions of some doubly nonlinear degenerate parabolic equations / *Porzio M., Vespri V.* // J. Diff. Eqns. – 1993. – Vol. 103. – P. 146-178.

16. *Alt H.W.* Quasilinear elliptic-parabolic differential equations / *Alt H.W., Luckhaus S.* // Math. Z. – 1983. – Vol. 183. – P. 311-341.

Стаття: надійшла до редакції 08.03.2011
прийнята до друку 21.09.2011

EXISTENCE OF THE SOLUTION TO NEUMANN PROBLEM TO FOR QUASILINEAR PARABOLIC ABSORBTION EQUATION IN UNBOUNDED DOMAIN WITH ZERO SHARPENING

Ol'ha BOLDOVS'KA

National University of Donetsk,
Universytets'ka Str., 24, Donetsk, 83001
e-mail: omboldovskaya@mail.ru

Neumann problem for quasilinear parabolic absorbtion equation in cylinder domain unbounded with respect to spatial variable is considered. Some existence and nonexistence condition for solution to this problem are obtained.

Key words: nonlinear parabolic equation, Neumann problem, unbounded domain.

СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С АБСОРБЦИЕЙ В НЕОГРАНИЧЕНОЙ ОБЛАСТИ С НУЛЕВЫМ ОБОСТРЕНИЕМ

Ольга БОЛДОВСКАЯ

Донецкий национальный университет,
ул. Университетская, 24, Донецк, 83001
e-mail: omboldovskaya@mail.ru

В неограниченой за пространственными переменными цилиндрической области рассмотрено задачу Неймана для квазилинейного параболического уравнения с абсорбцией. Получено условия существования и несуществования решения этой задачи.

Ключевые слова: нелинейные параболические уравнения, задача Неймана, неограниченая область.