ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2010.
Вип. 72. С. 232–242

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2010.
Is. 72. P. 232–242

УДК 517.53

ТЕОРЕМА ТИПУ БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦІЛИХ РЯДІВ ДІРІХЛЕ З НЕМОНОТОННИМИ ПОКАЗНИКАМИ

Ігор ОВЧАР[1], Олег СКАСКІВ[2]

[1]*Івано-Франківський національний технічний університет нафти і газу,*
76000 Івано-Франківськ, вул. Карпатська, 15
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: matstud@franko.lviv.ua

Для цілого ряду Діріхле $F(z)=\sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, де послідовність показників така, що $\{\lambda_n\colon n\geq 0\}\subset \mathbb{R}_+$, знайдено умови, за яких $\ln M(x,F)\sim \ln\mu(x,F)$ при $x\to+\infty$ $(x\notin E,\ \int_E d\ln x<+\infty)$, де $M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|\colon y\in\mathbb{R}\}$, $\mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}\colon n\geq 0\}$ $(x\in\mathbb{R})$.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член, логарифмічна міра, співвідношення Бореля.

Через S_a позначатимемо клас абсолютно збіжних у півплощині $\{z\colon \mathrm{Re}\ z<a\}$, $a\leqslant+\infty$, рядів Діріхле вигляду

$$F(z)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n},\quad z\in\mathbb{C},\tag{1}$$

де $\{\lambda_n\colon n\geq 0\}\subset[0,+\infty)$; $S\overset{def}{=}S_{+\infty}$ – клас цілих рядів Діріхле.

Через $S^+(\lambda)$ та $S_0^+(\lambda)$ позначатимемо підкласи відповідно класів S та S_0, у які входять ряди Діріхле вигляду (1) з фіксованою послідовністю показників $\lambda=(\lambda_n)$ такою, що $\lambda_n\uparrow+\infty$ $(1\leqslant n\uparrow+\infty)$. Для $F\in S_a$, $a\leqslant+\infty$ та $x<a$ позначимо

$$M(x,F)=\sup\{|F(x+iy)|\colon y\in\mathbb{R}\},\quad \mu(x,F)=\max\{|a_n|e^{x\lambda_n}\colon n\geq 0\}.$$

Відомо ([1]) таке: для того, щоб для кожної функції $F\in S^+(\lambda)$ співвідношення Бореля

$$\ln M(x,F)=(1+o(1))\ln\mu(x,F)\tag{2}$$

виконувалось при $x \to +\infty$ зовні деякої множини $E \subset [0, +\infty)$ $(x \notin E)$ скінченної міри Лебега необхідно і достатньо, щоб умова

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} \frac{1}{n\mu_n} < +\infty \tag{3}$$

виконувалась з $\mu_n = \lambda_n$ $(n \geq 0)$.

Водночас у різних класах абсолютно збіжних рядів Діріхле відомо ([2]-[9]), що в достатніх умовах, за виконання яких справджуються ті чи інші асимптотичні співвідношення, послідовності (λ_n) і $(-\ln|a_n|)$ у випадку класу $S^+ \stackrel{def}{=} \bigcup\limits_{\lambda} S^+(\lambda)$ та послідовності (λ_n) і $(\ln|a_n|)$ у випадку класу $S_0^+ \stackrel{def}{=} \bigcup\limits_{\lambda} S_0^+(\lambda)$ з якісного погляду є рівноправними. В [2] подібний ефект доведено у класі S_0^+ стосовно співвідношення (2), а в [5, 6, 7] у цьому ж класі та у класі S стосовно співвідношення

$$M(x, F) = (1 + o(1))\mu(x, F). \tag{4}$$

У цьому разі від послідовності показників $\lambda = (\lambda_n)$ в [5, 6] у класі S вимагається лише, щоб виконувалась умова

$$(\forall\ n \geq 0): \quad \lambda_n < \sup\{\lambda_j : j \geq 0\} \stackrel{def}{=} \beta, \tag{5}$$

тобто, допускається як обмеженість послідовності показників, так і наявність у неї будь-якої кількості точок скупчення.

У цій статті доводимо подібний ефект стосовно співвідношення (2) у класі S.

Через S^{Δ}, $\Delta \in (0, +\infty]$, позначимо клас цілих рядів Діріхле з класу S, показники яких задовольняють умову (5) з $\beta \leqslant \Delta$.

Через L позначимо клас неперервних, додатних, зростаючих до $+\infty$ функцій; L_1 – підклас L, до якого входять функції $\Phi(t)$ такі, що

$$\int\limits_{x_0}^{x} \frac{\Phi(t)}{t} dt = O(\Phi(x)) \quad (x \to +\infty);$$

L_2 – підклас L, до якого входять функції $\Phi(t)$, обернені функції $\varphi(t)$ до яких задовольняють умову Карамати

$$(\forall c > 0): \quad \varphi(ct) = O(\varphi(t)) \quad (t \to +\infty).$$

Зауважимо, що $L_1 = L_2$. Справді, якщо $\Phi \in L_1$, то при фіксованому $c \geq 1$ і $t \to +\infty$ маємо

$$0 \leq \ln \frac{\varphi(ct)}{\varphi(t)} = \int\limits_{\varphi(t)}^{\varphi(ct)} d\ln x \leq \frac{1}{\Phi(\varphi(t))} \int\limits_{\varphi(t)}^{\varphi(ct)} \frac{\Phi(x)}{x} dx = \frac{1}{t} O(\Phi(\varphi(ct))) = O(1),$$

тобто $\Phi \in L_2$.

Навпаки, з означення класу L_2 одержуємо, зокрема, що знайдеться стала $C_1 > 1$ така, що $\Phi(\frac{t}{2}) \leq \frac{1}{C_1}\Phi(t)$ $(t \geq t_0)$. Не зменшуючи загальності, вважаємо $t_0 = 0$. Тому

$$\int\limits_0^t \frac{\Phi(x)}{x}dx = \sum_{k=0}^{\infty} \int\limits_{t\cdot 2^{-k-1}}^{t\cdot 2^{-k}} \frac{\Phi(x)}{x}dx \leq \Phi(t)\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{C_1}\right)^k \ln 2 = O(\Phi(t)) \quad (t \to \infty),$$

тобто $L_2 \subset L_1$. Отже, $L_1 = L_2$.

Доведемо спочатку теорему, яка містить оцінку загального члена цілого ряду Діріхле з класу S через максимальний член ряду. Доведення цієї теореми ідейно близьке до доведення відповідної теореми з [2].

Надалі, для $F \in S^{\Delta}$ позначатимемо $\Phi(\sigma) \stackrel{def}{=} \ln \mu(\sigma, F)$, $\Phi_1(\sigma) \stackrel{def}{=} \Phi(\sigma)/\sigma$, а через φ та φ_1 позначатимемо, відповідно, обернені функції до функцій Φ та Φ_1.

Логарифмічною мірою вимірної множини $E \subset [1, +\infty)$ називаємо величину

$$\ln -meas(E) \stackrel{def}{=} \int\limits_E d\ln x.$$

Теорема 1. *Нехай функція $F \in S^{+\infty}$ така, що $\Phi_1 \in L_1$, а $v(t)$ – невід'ємна на $[0, +\infty)$ і додатна при $t \to +\infty$ функція така, що $\int_0^{+\infty} v(t)dt < +\infty$. Якщо $\ln n = o(\ln|a_n|)$ $(n \to +\infty)$, то існує функція $c_1(t) \uparrow +\infty$ $(t \to +\infty)$ така, що для всіх $n \geq 0$ і для всіх $\sigma > 0$ $(\sigma \notin E, \ln -meas(E) < +\infty)$ виконується нерівність*

$$|a_n|e^{\sigma\lambda_n} \leq \mu(\sigma, F)\exp\left\{-\sigma\int\limits_{\mu_\nu}^{\mu_n}(\mu_n - t)\frac{c_1(t)}{\varphi(t)}v(4t)dt\right\}, \tag{6}$$

де $\mu_n = -\ln|a_n|$, а $\nu = \nu(\sigma, F) = \max\{n\colon |a_n|e^{x\lambda_n} = \mu(x, F)\}$ – центральний індекс ряду (1).

Доведення. Зауважимо спочатку, що з того, що $F(0) \neq \infty$ випливає, що $|a_n| \to 0$ $(n \to +\infty)$, звідки $\mu_n = -\ln|a_n| \to +\infty$ $(n \to +\infty)$. Не зменшуючи загальності, припускатимемо, що $\mu_n \uparrow +\infty$ $(n \to +\infty)$, тобто послідовність (μ_n) монотонно зростає до $+\infty$.

Оскільки інтеграл $\int_0^{+\infty} v(t)dt$ збіжний, то $l(x) \stackrel{def}{=} \int_x^{+\infty} v(t)dt \downarrow 0$ $(x \to +\infty)$, а також $c_1(x) \stackrel{def}{=} (l(x))^{-1/2} \uparrow +\infty$ $(x \to +\infty)$. Крім того,

$$M = \int\limits_0^{+\infty} c_1(t)v(4t)dt \leq -\frac{1}{4}\int\limits_0^{+\infty}(l(x))^{-\frac{1}{2}}dl(x) = \frac{1}{2}\sqrt{l(0)} < +\infty. \tag{7}$$

Виберемо тепер

$$\alpha(t) = -\int\limits_t^{+\infty}\frac{1}{\varphi(u)}c_1(u)v(4u)du.$$

Зауважимо, що з (7) випливає, що

$$\alpha(t) = o\left(\frac{1}{\varphi(t)}\right) \quad (t \to +\infty). \tag{8}$$

Позначимо

$$\alpha_n = \exp\Big\{-\int\limits_0^{\mu_n} \alpha(t)dt\Big\}, \quad \tau_n = \alpha(\mu_n),$$

і розглянемо ряд Діріхле

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{\alpha_n} e^{z\mu_n}, \tag{9}$$

з $b_n = e^{\lambda_n}$. Покажемо, що функція $f \in S_0$. Справді, з того, що $F \in S$, випливає $\varliminf\limits_{n\to+\infty} \frac{-\ln|a_n|}{\lambda_n} = +\infty$, тому $\lambda_n = o(\mu_n)$ $(n \to +\infty)$. Звідси та з (7)

$$\ln \frac{b_n}{\alpha_n} = \lambda_n - \int\limits_0^{\mu_n} \int\limits_t^{+\infty} \frac{c(u)}{\varphi(u)} v(4u)du = o(\mu_n) \quad (n \to +\infty).$$

Оскільки за умовою $\ln n = o(\mu_n)$ $(n \to +\infty)$, то за теоремою Валірона для абсциси абсолютної збіжності ряду (9) одержуємо

$$\sigma_a(f) = \varliminf_{n\to+\infty} \frac{-\ln(b_n/\alpha_n)}{\mu_n} = 0.$$

Отже, $f \in S_0$.

Для того, щоб можна було застосувати міркування, подібні як у доведенні теореми 2 з [2], достатньо показати, що центральний індекс $\nu(x, f) \to +\infty$ $(x \to -0)$. Це випливало би з того, що $\mu(x, f) \to +\infty$ $(x \to -0)$. Останнє співвідношення рівносильне до умови

$$\sup\Big\{\frac{b_n}{\alpha_n} : \ n \geq 0\Big\} = +\infty. \tag{10}$$

Покажемо, що ця умова виконується. Справді, $0 \leq \ln \mu(\sigma, F) = -\mu_\nu + \sigma\lambda_\nu$ $(\sigma \geq \sigma_0)$, $\nu = \nu(\sigma - 0, F)$, звідки $\mu_\nu \leqslant \sigma\lambda_\nu$. Оскільки, $\Phi(\sigma) = \sigma\Phi_1(\sigma) = \ln \mu(\sigma, F) \leq \sigma\lambda_\nu$ $(\sigma \geq \sigma_0)$, то $\sigma \leqslant \varphi_1(\lambda_\nu)$, де φ_1 – обернена функція до функції Φ_1. Тому

$$\sigma \leqslant \varphi_1(\lambda_\nu), \quad \mu_\nu \leq \sigma\lambda_\nu \leq \lambda_\nu\varphi_1(\lambda_\nu) \quad (\sigma \geq \sigma_0), \quad \nu = \nu(\sigma - 0, F). \tag{11}$$

Залишилося зауважити, що функція $t/\varphi(t)$ є оберненою до функції $t\varphi_1(t)$, де φ_1 – функція обернена до функції $\Phi_1(t) = \frac{\Phi(t)}{t}$, тому

$$\lambda_\nu \geq \frac{\mu_\nu}{\varphi(\mu_\nu)} \quad (\sigma \geq \sigma_0) \quad \nu = \nu(\sigma - 0, F).$$

Звідси

$$\ln \frac{b_\nu}{\alpha_\nu} \geq \frac{\mu_\nu}{\varphi(\mu_\nu)} - \int\limits_0^{\mu_\nu} |\alpha(t)|dt, \quad \nu = \nu(\sigma - 0, F).$$

З умови $\Phi_1 \in L_1$ випливає, що $t/\varphi(t) = \Phi_1(\varphi(t)) \to +\infty$ $(t \to +\infty)$, а також

$$\int\limits_0^x \frac{dt}{\varphi(t)} = \frac{x}{\varphi(x)} + \int\limits_0^{\varphi(x)} \frac{\Phi(u)}{u^2} du + O(1) =$$

$$= \frac{x}{\varphi(x)} + O\left(\frac{\Phi(\varphi(x))}{\varphi(x)}\right) = O\left(\frac{x}{\varphi(x)}\right) \quad (x \to +\infty).$$

Тому, застосовуючи (8), отримуємо

$$\int\limits_0^{\mu_\nu} |\alpha(t)|dt = o\big(\mu_\nu/\varphi(\mu_\nu)\big) \quad (\sigma \to +\infty), \quad \nu = \nu(\sigma - 0, F),$$

звідки, остаточно одержуємо

$$\ln \frac{b_\nu}{\alpha_\nu} \geq (1 + o(1))\frac{\mu_\nu}{\varphi(\mu_\nu)} \to +\infty \quad (\sigma \to +\infty), \quad \nu = \nu(\sigma - 0, F),$$

тобто виконується (10), тому $\nu(x, f) \to +\infty$ $(x \to -0)$.

Нехай (s_j) – послідовність точок стрибка центрального індексу $\nu(s, f)$ занумерована так, що $\nu(s, f) = j$ для $s \in [s_j, s_{j+1})$ і, якщо $\nu(s_{j+1} - 0, f) = j$ і $\nu(s_{j+1}, f) = j + p$, то $s_{j+1} = s_{j+2} = \cdots = s_{j+p} < s_{j+p+1}$. Зрозуміло, що $s_j \to -0$ $(j \to +\infty)$.

Якщо $x \in [s_k + \tau_k, s_{k+1} + \tau_k) \stackrel{def}{=} E_k^* \subset (-\infty; 0)$, то $\nu(x - \tau_k, f) = k$ і за означенням $\mu(x - \tau_k, f)$ подібно як і у доведенні теореми 2 з [2] для всіх $n \geq 0$ одержуємо

$$\frac{b_n}{\alpha_n} \mathrm{e}^{(x - \tau_k)\mu_n} \leq \mu(x - \tau_k, f).$$

Звідси при $n \neq k$

$$\frac{b_n}{b_k} \mathrm{e}^{x(\mu_n - \mu_k)} \leq \frac{\alpha_n}{\alpha_k} \mathrm{e}^{\tau_k(\lambda_n - \lambda_k)} = \exp\left\{-\int\limits_{\mu_k}^{\mu_n} (\alpha(t) - \alpha(\mu_k))dt\right\} < 1.$$

Підставляючи тут $x = -\frac{1}{\sigma}, \sigma > 0$, одержуємо

$$\frac{|a_n|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n}}{|a_k|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_k}} = \left(\frac{b_n \mathrm{e}^{x\mu_n}}{b_k \mathrm{e}^{x\mu_k}}\right)^\sigma < 1 \quad (n \neq k), \tag{12}$$

тобто $\nu(\sigma, F) = k$ і $\mu(\sigma, F) = |a_k|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_k}$ при $\sigma \in [-(s_k + \tau_k)^{-1}, -(s_{k+1} + \tau_k)^{-1})$. Тому для всіх $\sigma > 0$ таких, що $x = -\sigma^{-1} \in \bigcup_{k \in J} E_k^*$, де $J \subset \mathbb{N} \cup \{0\}$ – множина значень центрального індексу $\nu(x, f)$, і для всіх $n \geq 0$ з (12) одержуємо

$$\frac{|a_n|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n}}{|a_k|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_k}} = \left(\frac{b_n \mathrm{e}^{x\mu_n}}{b_k \mathrm{e}^{x\mu_k}}\right)^\sigma \leq \exp\left\{-\sigma \int\limits_{\mu_k}^{\mu_n} (\mu_n - t)\alpha'(t)dt\right\} \tag{13}$$

при $\sigma = -\frac{1}{x} > 0$. Звідси для всіх $\sigma \in \bigcup_{k \in J} \widetilde{E}_k \stackrel{def}{=} \widetilde{E}$, де $\widetilde{E}_k \subset (0, +\infty)$ – образ множини E_k^* при відображенні $\sigma = -\frac{1}{x}$, одержуємо (6).

Оцінимо логарифмічну міру множини

$$E_2 = [-s_1^{-1}, +\infty) \setminus \widetilde{E} = \bigcup_{k=1}^{+\infty} [-(s_k + \tau_{k-1})^{-1}, -(s_k + \tau_k)^{-1}).$$

Зауважимо таке: оскільки $(\forall\ n)(\forall\ x)\colon\ -\mu_n + x\lambda_n \leqslant \ln \mu(x, F)$, то при $\sigma = \varphi(\mu_n)$ отримаємо

$$\lambda_n \leq \frac{\mu_n + \Phi(\sigma)}{\sigma} = \frac{2\mu_n}{\varphi(\mu_n)}.$$

Звідси і з (11) виводимо

$$\sigma \leq \varphi_1(\lambda_{\nu(\sigma-0,F)}) \leq \varphi_1\left(\frac{2\mu_{\nu(\sigma-0,F)}}{\varphi(\mu_{\nu(\sigma-0,F)})}\right) \leq c\varphi(\mu_{\nu(\sigma-0,F)}), \tag{14}$$

останню нерівність виводимо за допомогою умови $\Phi_1 \in L_1$, тут $c < +\infty$. Справді, нехай $K \in (0,+\infty)$ таке, що

$$\int\limits_{\sigma e^{-2K}}^{\sigma} \frac{\Phi_1(t)}{t}dt \leq \int\limits_{0}^{\sigma} \frac{\Phi_1(t)}{t}dt \leq K\Phi_1(\sigma).$$

Тоді $2\Phi_1\left(\sigma e^{-2K}\right) \leq \Phi_1(\sigma)$. Звідси (14) одержуємо з $c = e^{2K}$.

Нехай тепер $k \in J$. Тоді

$$\nu(s_k + \tau_{k-1} - 0, f) = \nu\left(-\left(s_k + \tau_{k-1} - 0\right)^{-1}, F\right) \leq k-1$$

і, отже, застосовуючи (14), одержуємо

$$|s_k + \tau_{k-1}|^{-1} = -(s_k + \tau_{k-1})^{-1} \leq c\varphi(\mu_{k-1}). \tag{15}$$

Звідси за означенням τ_k отримуємо

$$|s_k + \tau_{k-1}|^{-1}(|\tau_{k-1}| - |\tau_k|) \leq c\int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(t)v(4t)dt,$$

а також при $k \to +\infty$

$$\ln - meas(\widetilde{E}_k) = \ln - meas\left(([|s_k + \tau_{k-1}|^{-1}, |s_k + \tau_k|^{-1}))\right) =$$

$$= \ln\left|\frac{s_k + \tau_{k-1}}{s_k + \tau_k}\right| \leq \frac{|\tau_{k-1}| - |\tau_k|}{|s_k + \tau_k|} =\leq \frac{|\tau_{k-1}| - |\tau_k|}{|s_k + \tau_{k-1}| - (|\tau_{k-1}| - |\tau_k|)} \leq$$

$$\leq c\int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(t)v(4t)dt\left(1 - c\int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(t)v(4t)dt\right)^{-1} \leq 2c\int\limits_{\mu_{k-1}}^{\mu_k} c_1(t)v(4t)dt,$$

де стала $c > 0$ визначена вище. Якщо ж тепер $j \notin J$ і $k, p \in J$ такі, що $p < j < k$, $s_p < s_{p+1} = s_j = s_k < s_{k+1}$, то

$$\bigcup_{j=p+1}^{k} \widetilde{E}_k = \bigcup_{j=p+1}^{k} [|s_j + \tau_{j-1}|^{-1}; |s_j + \tau_j|^{-1}) = [|s_{p+1} + \tau_p|^{-1}, |s_k + \tau_k|^{-1})$$

і, отже,

$$\ln - meas\left(\bigcup_{j=p+1}^{k} \widetilde{E}_k\right) \leq \ln\frac{|s_{p+1} + \tau_p|}{|s_{p+1} + \tau_k|} \leq \frac{|\tau_p| - |\tau_k|}{|s_{p+1} + \tau_p| - (|\tau_p| - |\tau_k|)}.$$

Застосовуючи (15), при $p \to +\infty$ маємо

$$\ln - meas\left(\bigcup_{j=p+1}^{k} \widetilde{E}_k\right) \leq 2c\int\limits_{\mu_p}^{\mu_k} c_1(u)v(4u)du.$$

Остаточно

$$\ln -meas\,(E_2) = \ln -meas\Big(\bigcup_{j=1}^{+\infty} \widetilde{E}_j\Big) \le 2c\int\limits_0^{\infty} c_1(u)v(4u)du < +\infty.$$

Теорему 1 доведено. □

Доведемо тепер теорему про співвідношення типу Бореля для цілих рядів Діріхле з класу S.

Додатну послідовність (x_n) назвемо *майже монотонно спадною*, якщо знайдеться стала $\delta > 0$ така, що $x_m \leqslant \delta x_n$ для всіх $n \ge n_1$ і $m \ge n+1$.

Теорема 2. *Нехай $F \in S^{\Delta}$, $\Delta \leqslant +\infty$, $\mu_n \stackrel{def}{=} -\ln|a_n|$. Якщо $\Phi_1 \in L_1$, послідовність $(\ln n/\mu_n)$ майже монотонно спадна і виконується умова (3), то співвідношення (2) виконується при $\sigma \to +\infty$ зовні деякої множини скінченної логарифмічної міри.*

Доведення. У [9, Зауваження 1] знаходимо таке твердження: якщо $F \in S^{\Delta}$ $\Delta < +\infty$, то

$$\ln\mu(x, F) = (1 + o(1))\ln F(x) = (1 + o(1))\beta x \quad (x \to +\infty).$$

Тому надалі вважатимемо, що $\beta = +\infty$.

З умови (3), як і під час доведення теореми з [1], одержуємо, що

$$\int\limits_{\mu_1}^{+\infty} \frac{\ln n_1(t))}{t^2}dt < +\infty, \quad n_1(t) = \sum_{\mu_n \leqslant t} 1.$$

Тому теорему 1 можна застосувати з функціями $v(t) = 16t^{-2}\ln n_1(t)$, $c_1(t) = c(4t)$. Прийнявши в (6) $n = 0$ для всіх $\sigma > 0$ зовні множини скінченної логарифмічної міри, отримаємо

$$\ln\mu(\sigma, F) \ge \sigma\int\limits_0^{\mu_\nu} \frac{1}{\varphi(t)}\frac{c(4t)\ln n_1(4t)}{t}dt \ge \frac{\sigma}{\varphi(\mu_\nu)}c\left(\frac{\mu_\nu}{2}\right)\ln n_1(2\mu_\nu)\ln 2, \qquad (16)$$

де $\varphi(t)$ – функція обернена до функції $\Phi(\sigma) = \ln\mu(\sigma, F)$. Зауважимо тепер, що з того, що послідовність $(\ln n/\mu_n)$ майже монотонно спадна випливає, що

$$\frac{\ln n_1(\tau)}{\tau} \leqslant 2\delta\cdot\frac{\ln n_1(t)}{t}$$

для всіх $t \geqslant t_0$ і $\tau \geqslant t$. Тому з нерівності (6) для всіх $\sigma > 0$ зовні множини скінченної логарифмічної міри одержуємо

$$\sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \frac{|a_n|e^{\sigma\lambda_n}}{\mu(\sigma, F)} \le \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp\Big\{-\sigma\int\limits_{\mu_\nu}^{\mu_n} \frac{c(4t)}{\varphi(t)}\frac{\mu_n - t}{t^2}\ln n_1(4t)dt\Big\} \le$$

$$\le \sum_{\mu_n > 2\mu_\nu} \exp\Big\{-c^*(4\mu_\nu)\frac{\mu_\nu\sigma}{\varphi(\mu_\nu)}\frac{\ln n_1(4\mu_n)}{\mu_n}\int\limits_{\mu_\nu}^{\mu_n}\frac{\mu_n - t}{t^2}dt\Big\}, \quad \nu = \nu(\sigma, F),$$

де $c^*(4\mu_\nu) \overset{def}{=} 2\delta c(4\mu_\nu)$, у цьому разі ми також скористалися монотонністю $t/\varphi(t)\uparrow$. Якщо згадати, що $\max\left\{\frac{\ln x}{x} : x>0\right\} = \frac{1}{\mathrm{e}}$, то при $\sigma\to+\infty$ зовні множини скінченної логарифічної міри одержимо

$$\sum_{\mu_n>2\mu_\nu} \frac{|a_n|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n}}{\mu(\sigma,F)} \le \sum_{\mu_n>2\mu_\nu} \exp\left\{\frac{-\sigma c^*(\mu_\nu)}{\varphi(\mu_\nu)}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\ln n_1(4\mu_n)\right\}, \tag{17}$$

де $\nu=\nu(\sigma,F)$ – центральний індекс. Зауважимо тепер, що для всіх досить великих σ з нерівності $0\le \ln\mu(\sigma,F) = -\mu_\nu+\sigma\lambda_\nu$ одержуємо $\sigma\ge\frac{\mu_\nu}{\lambda_\nu}$, а за означенням максимального члена для всіх n при $\sigma=\varphi(\mu_n)$

$$\lambda_n \le \frac{\ln\mu(\sigma,F)+\mu_n}{\sigma} = \frac{\Phi(\sigma)+\mu_n}{\sigma} = \frac{2\mu_n}{\varphi(\mu_n)},$$

тому $\sigma\ge\frac{1}{2}\varphi(\mu_\nu)$ і, отже, з (16) і (17) при $\sigma\to+\infty$ зовні множини скінченної логарифмічної міри одержуємо

$$\ln\mu(\sigma,F) \ge \frac{\ln 2}{2} c(2\mu_\nu)\ln n_1(2\mu_\nu)),$$

$$\sum_{\mu_n>2\mu_\nu} \frac{|a_n|\mathrm{e}^{\sigma\lambda_n}}{\mu(\sigma,F)} \le \sum_{\mu_n>2\mu_\nu} \exp\left\{-\frac{c^*(\mu_\nu)}{2}\left(1-\frac{1}{\mathrm{e}}\right)\ln n_1(4\mu_n)\right\} = o(1), \quad \nu=\nu(\sigma,F).$$

Звідси при $\sigma\to+\infty$ ($\sigma\notin E$ – скінченної логарифмічної міри)

$$0\leqslant \ln M(\sigma,F)-\ln\mu(\sigma,F) \le \ln(n_1(2\mu_\nu)+o(1)) \le \ln(n_1(2\mu_\nu)+o(1)) \le o(\ln\mu(\sigma,F)).$$

Теорему 2 доведено. □

Доведемо непокращуваність (необхідність) умови (3). Правильна така теорема.

Теорема 3. *Для кожної послідовності* (a_n) *такої, що* $0<|a_n|\downarrow 0$ $(n\to+\infty)$,

$$\overline{\lim_{n\to+\infty}} \frac{\ln n}{\ln\frac{1}{|a_n|}} = \theta < 1,$$

і умова (3) не виконується, існує функція $F\in S^{+\infty}$, *для якої*

$$\frac{\ln M(\sigma,F)}{\ln\mu(\sigma,F)} \to +\infty \ (\sigma\to+\infty). \tag{18}$$

Доведення. Не зменшуючи загальності, вважаємо, що (a_n) – послідовність додатних чисел, $a_1=\frac{1}{\mathrm{e}}$, $a_0=1$. Оскільки ряд (3) розбіжний, то розбіжний також ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty}\frac{c_s}{\mu_s}, \quad c_s=\ln(s+1)-\ln s, \quad \mu_s=-\ln a_s.$$

Визначимо тепер послідовність

$$\varkappa_j = \sum_{s=1}^{j-1}\frac{c_s}{\mu_s}+1, \quad \varkappa_1=1$$

та з її допомогою послідовність показників

$$\lambda_n = \lambda_1+\sum_{s=1}^{n}\frac{1}{\varkappa_s}(\mu_s-\mu_{s-1}), \quad \lambda_1=1, \quad \lambda_0=0.$$

Зауважимо, що при такому означенні $\lambda_{n+1} > \lambda_n$ $(n \geq 0)$ та
$\varkappa_n = \frac{1}{\lambda_n - \lambda_{n-1}}(\ln a_{n-1} - \ln a_n)$.

Оскільки $\lambda_n = o(\mu_n)$ $(n \to +\infty)$, то $\ln\left(a_n e^{\sigma\lambda_n}\right) = -(1+o(1))\mu_n$ $(n \to +\infty)$ при фіксованому σ. Звідси, завдяки умові $\overline{\lim}_{n\to+\infty} \frac{1}{\mu_n}\ln n = \theta < 1$, одержуємо $F \in S^{+\infty}$. Для всіх $\sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$

$$\ln\mu(\sigma, F) \leq -\mu_n + \varkappa_{n+1}\lambda_n =$$

$$= -\sum_{s=1}^{n} \varkappa_s(\lambda_s - \lambda_{s-1}) + \lambda_n\varkappa_{n+1} = \sum_{s=1}^{n}(\varkappa_{n+1} - \varkappa_s)(\lambda_s - \lambda_{s-1}) =$$

$$= \sum_{s=1}^{n}(\lambda_s - \lambda_{s-1})\sum_{j=s}^{n}(\varkappa_{j+1} - \varkappa_j) = \sum_{j=1}^{n}(\varkappa_{j+1} - \varkappa_j)\sum_{s=1}^{j}(\lambda_s - \lambda_{s-1}) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\frac{c_j}{\mu_j}\sum_{s=1}^{j}\frac{\mu_s - \mu_{s-1}}{\varkappa_s} = o\left(\sum_{j=1}^{n} c_j\right) = o(\ln n) \quad (n \to +\infty). \tag{19}$$

Зауважимо тепер, що для $1 \leq m \leq n,\ \sigma \in [\varkappa_n, \varkappa_{n+1}]$

$$\ln\left(a_m e^{\sigma\lambda_m}\right) \geq x\left(-\frac{\mu_m}{\varkappa_n} + \lambda_m\right) = x\sum_{s=1}^{m}(\mu_s - \mu_{s-1})\left(\frac{1}{\varkappa_s} - \frac{1}{\varkappa_n}\right) + \lambda_1 x \geq 0.$$

Звідси і з (19) випливає

$$\frac{\ln M(\sigma, F)}{\ln\mu(\sigma, F)} \geq \frac{\ln\left(\sum\limits_{m=1}^{n} a_m e^{\sigma\lambda_m}\right)}{\ln\mu(\sigma, F)} \geq \frac{\ln n}{\ln\mu(\sigma, F)} \to +\infty\ (\sigma \to +\infty).$$

Теорему 3 доведено. □

Наслідок. *Існує послідовність (a_n) така, що умова (3) з $\mu_n = -\ln|a_n|$ не виконується, для якої існує функція $F \in S^{+\infty}$ така, що $\Phi_1 \in L_1$ (тут $\Phi_1(\sigma) = \frac{\ln\mu(\sigma,F)}{\sigma}$) і виконується співвідношення (18).*

Доведення. Якщо вибрати $\mu_n = 2\ln(n+1)$, то умови, а отже, і твердження теореми 3 виконуються. Нескладно перевірити, що

$$\varkappa_{n+1} \sim \frac{\beta}{2}\ln\ln n\ (n \to +\infty) \text{ і } \lambda_n \sim \frac{4}{\beta}\frac{\ln n}{\ln\ln n}\ (n \to +\infty)$$

за вибору послідовностей (λ_n) і $(\varkappa_{n+1})$, як і у доведенні теореми 3. Тому для досить великих n, $\varkappa_{n+1} < \frac{2\mu_n}{\lambda_n}$. З іншого боку, якщо $\varkappa_{n+1} < \frac{2\mu_n}{\lambda_n}$ $(n \geq n_0)$, то $t^{-2}\ln\mu(t, F)$ – не спадає для досить великих t, тому $\int^{\sigma} t^{-2}\ln\mu(t, F)dt = O\left(\frac{1}{\sigma}\ln\mu(\sigma, F)\right)$ $(\sigma \to +\infty)$, тобто $\Phi_1 \in L_1$. □

Зауваження 1. Наскільки істотною у теоремах 1 і 2 є умова $\Phi_1 \in L_1$ авторам невідомо.

Зауваження 2. Умова теореми 2, що послідовність $(\ln n/\mu_n)$ майже монотонно спадає, правдоподібно, є зайвою, позаяк вона виглядає технічною. Подібна умова виникала, наприклад, в [10], [11], [12]. У деяких із розглянутих там випадків її пізніше було знято (див., наприклад, [13]).

1. *Скаскив О.Б.* О поведении максимального члена ряда Дирихле, задающего целую функцию / *Скаскив О.Б.* // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37, №1. – С. 41-47.
2. *Скаскив О.Б.* О теореме типа Бореля для ряда Дирихле, имеющего нулевую абсциссу абсолютной сходимости / *Скаскив О.Б.* // Укр. мат. журн. – 1989. – Т. 41, №11. – С. 1532-1541.
3. *Скаскив О.Б.* О росте в полуполосах аналитических функций, педставленных рядами Дирихле / *Скаскив О.Б.* // Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45, №5. – С. 681-694.
4. *Шеремета М.Н.* Об одном свойстве целых рядов Дирихле с убывающими коэффициентами / *Шеремета М.Н.* // Укр. мат. журн. – 1993. – Т. 45, №6. – С. 843-853.
5. *Скаскив О.Б.* О минимуме модуля суммы ряда Дирихле с ограниченной последовательностью показателей / *Скаскив О.Б.* // Матем. заметки. – 1994. – Т. 56, №5. – С. 117-128.
6. *Скаскiв О.Б.* Про еквiвалентнiсть суми i максимального члена цiлого ряду Дiрiхле / *Скаскiв О.Б., Стасюк Я.З.* // Мат. студiї. – 2009. – Т. 31, №1. – С. 37-46.
7. *Скаскiв О.Б.* Про еквiвалентнiсть суми i максимального члена абсолютно збiжного у пiвплощинi ряду Дiрiхле / *Скаскiв О.Б., Стасюк Я.З.* // Карпатськi математичнi публiкацiї. – 2009. – Т. 1, №1. – С.100-106.
8. *Сало Т.* Про максимум модуля i максимальний член абсолютно збiжних рядiв Дiрiхле / *Сало Т., Скаскiв О.* // Матем. Вiсник НТШ. – 2007. – Т. 3. – С. 764-574.
9. *Долинюк М.* Про правильне зростання суперпозицiї ряду Дiрiхле i зростаючої функцiї / *Долинюк М.* // Вiсн. Львiв. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 70. – С. 45-51.
10. *Скаскив О.Б.* Некоторые теоремы типа Бореля для целых рядов Дирихле / *Скаскив О.Б., Херате С.* – Львов: Деп. в УкрНИИНТИ, 1991.
11. *Скаскив О.Б.* О центральном показателе целого ряда Дирихле / *Скаскив О.Б., Херате С.* – Львов: Деп. В УкрНИИНТИ, 1992.
12. *Скаскiв О.Б.* Про центральний показник абсолютно збiжних рядiв Дiрiхле / *Скаскiв О.Б.* // Доп. НАН України. – 2000. – №10. – С. 27-30.
13. *Скаскiв О.Б.* Асимптотичнi оцiнки iнтегралiв типу Лапласа / *Скаскiв О.Б., Тракало О.М.* // Мат. студiї. – 2002. – Т. 18, №2. – С. 125-146.

ON THE BOREL TYPE THEOREM FOR ENTIRE DIRICHLET SERIES WITH NONMONOTONOUS EXPONENTS

Ihor OVCHAR[1], Oleh SKASKIV[2]

[1]*Ivano-Frankivsk National Technical University of Oil and Gas, 76000 Ivano-Frankivsk, Karpatska str., 15*
[2]*Ivan Franko National University of L'viv, 79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1*
e-mail: matstud@franko.lviv.ua

For a entire Dirichlet series $F(z) = \sum\limits_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, where sequence of the exponents such that $\{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, conditions for $\ln M(x, F) \sim \ln \mu(x, F)$

as $x \to +\infty$ ($x \notin E$, $\int_E d\ln x < +\infty$), where $M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)|: y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(x,F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n}: n \geq 0\}$ ($x \in \mathbb{R}$) are establish.

Key words: Dirichlet series, maximal term, logarithmic measure, Borel condition.

О ТЕОРЕМЕ ТИПА БОРЕЛЯ ДЛЯ ЦЕЛЫХ РЯДОВ ДИРИХЛЕ С НЕМОНОТОННЫМИ ПОКАЗАТЕЛЯМИ

Игорь ОВЧАР[1], Олег СКАСКИВ[2]

[1] *Ивано-Франковский национальный технический университет нефти и газа, 76000 Ивано-Франковск, ул. Карпатская, 15*
[2] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко, 79000 Львов, ул. Университетская, 1*
e-mail: matstud@franko.lviv.ua

Для целого ряда Дирихле $F(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n e^{z\lambda_n}$, где последовательность показателей такая, что $\{\lambda_n : n \geq 0\} \subset \mathbb{R}_+$, получены условия при выполнении которых $\ln M(x,F) \sim \ln \mu(x,F)$ при $x \to +\infty$ ($x \notin E$, $\int_E d\ln x < +\infty$), где $M(x,F) = \sup\{|F(x+iy)|: y \in \mathbb{R}\}$, $\mu(x,F) = \max\{|a_n|e^{x\lambda_n}: n \geq 0\}$ ($x \in \mathbb{R}$).

Ключевые слова: ряды Дирихле, максимальный член, логарифмическая мера, соотношение Бореля.

Стаття надійшла до редколегії 09.11.2010

Прийнята до друку 22.12.2010