ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2010.
Вип. 72. С. 201–220

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2010.
Is. 72. P. 201–220

УДК 517.95

МІШАНА ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛІНІЙНОЇ ЕВОЛЮЦІЙНОЇ СИСТЕМИ РІВНЯНЬ У НЕОБМЕЖЕНІЙ ОБЛАСТІ

Максим НЕЧЕПУРЕНКО, Галина ТОРГАН

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: m.nechepurenko@nasta.com.ua, torgan_g@yahoo.com

Розглянуто нелінійну зв'язну еволюційну систему в необмеженій області. Отримано достатні умови існування та єдиності розв'язку цієї системи без обмежень на нескінченності.

Ключові слова: нелінійна система, мішана задача.

1. Вступ. Задачі для лінійних і нелінійних систем гіперболо-параболічних рівнянь з частинними похідними першого та другого порядку за часовою змінною в необмежених областях розглядали у багатьох працях (див., наприклад, [4]-[15]). Деякі результати існування єдиного їхнього розв'язку у цих працях отримані в припущенні якісної поведінки розв'язку, початкових даних і правої частини рівняння (системи) на нескінченності, інші результати (для певних класів нелінійних рівнянь) без таких припущень. Кларк в [6] розглядав подібну систему зі сталими коефіцієнтами й однорідними умовами на межі в обмеженій області. Він довів існування сильного та слабкого розв'язку за методом Фаедо-Гальоркіна, використовуючи спеціальну "базу" в просторі $H_0^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)$, введену Медеросом [9], також дослідив асимптотичну поведінку слабкого розв'язку, використовуючи метод Коморніка-Зузи [8]. В [14] одержано умови існування та єдиності узагальненого розв'язку для нелінійної еволюційної гіперболо-параболічної системи в необмеженій за просторовими змінними області.

Ми розглянули мішану задачу для нелінійної еволюційної системи, яка узагальнює певні математичні моделі термодинаміки. Праця розвиває та узагальнює результати [11]. Зазначимо, що ця система містить, зокрема, як частковий випадок, деякі системи гіперболо-параболічних рівнянь термопружності.

2. Формулювання задачі. Нехай $\Omega \in \mathbb{R}^n$ – необмежена область з межею $\partial\Omega \in C^1$ регулярною в сенсі Кальдерона [1, с. 44], $Q_\tau = (0,\tau) \times \Omega$, $\Omega_\tau = \{\tau\} \times \Omega$, $S_\tau = (0,\tau) \times \partial\Omega$, $\tau \in (0,T)$, $0 < T < +\infty$.

В області Q_T розглянемо мішану задачу для системи

$$A_1(u,\theta) \equiv u_{tt} - \sum_{i,j=1}^n (a_{ij}(t,x)u_{x_i})_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t,x)u_{x_i} + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i} +$$
$$+ \alpha_0(t,x)u + \alpha_1(t,x)\theta + \gamma_0(t,x)|u|^{r-2}u + \gamma_1(t,x)|u_t|^{p-2}u_t = f_1(t,x), \qquad (1)$$
$$A_2(u,\theta) \equiv \theta_t - \sum_{i,j=1}^n (c_{ij}(t,x)\theta_{x_i})_{x_j} - \sum_{i=1}^n (\mu_i(t,x)|\theta_{x_i}|^{s-2}\theta_{x_i})_{x_i} +$$
$$+ \sum_{i=1}^n (b_i(t,x)u_t)_{x_i} + \sum_{i=1}^n d_i(t,x)u_{x_i} + \sum_{i=1}^n e_i(t,x)\theta_{x_i} + \beta_0(t,x)u +$$
$$+ \beta_1(t,x)\theta + \gamma_2(t,x)|\theta|^{q-2}\theta = f_2(t,x) \qquad (2)$$

з крайовими

$$u(t,x) = 0, \quad \theta(t,x) = 0 \quad \text{на} \quad S_T, \qquad (3)$$

та початковими

$$u(0,x) = u_0(x), \quad u_t(0,x) = u_1(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0(x) \quad \text{на} \quad \Omega \qquad (4)$$

умовами. Тут $p,r,s,q \in (2,+\infty)$.

Припустимо, що $\Omega_R = \Omega \cap \mathcal{B}_R$ є областю для $\forall R \geqslant 1$, регулярною в сенсі Кальдерона [1, с. 44], $\mathcal{B}_R = \{x \in \mathbb{R}^n : \ |x| < R\}$. Позначимо $Q_{T,R} = (0,T) \times \Omega_R$.

Будемо використовувати тут такі простори: $C([0,T];B)$ ([1], с. 148), $L^r(0,T;B)$ ([1], с. 154, 157), де $r \in [1,+\infty)$, а B – деякий банахів простір; $H^k(\Omega)$, $H_0^k(\Omega)$, $k \in \mathbb{N}$ ([1], с. 44) ([1], с. 44).

Також

$$L^r_{loc}(\overline{\Omega}) = \{v : \ v \in L^r(\Omega_R), \ \forall R \geqslant 1\};$$
$$H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \{v : \ v \in H^1(\Omega_R), \ u\big|_{\partial\Omega\cap\mathcal{B}_R} = 0, \ \forall R \geqslant 1\};$$
$$H^2_{loc}(\overline{\Omega}) = \{v : \ v \in H^2(\Omega_R), \ \forall R \geqslant 1\},$$
$$W^{1,\infty}(\Omega) = \{v : \ v, v_{x_i} \in L^\infty(\Omega), \ i \in \{1,\dots,n\}\};$$
$$W^{1,s}_{0,loc}(\overline{\Omega}) = \{v : \ v, v_{x_i} \in L^s_{loc}(\overline{\Omega}), \ u\big|_{\partial\Omega\cap\mathcal{B}_R} = 0, \ \forall R \geqslant 1, \ i \in \{1,\dots,n\}\}.$$

Вважатимемо, що для коефіцієнтів системи (1)-(2), правих частин і початкових умов виконуються такі припущення:

$(\mathbf{H_1})$: $a_{ij}, a_{ijt} \in L^\infty(Q_T)$, $a_{ij} = a_{ji}$, $a_{ij}(\cdot,0) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ для всіх $i,j \in \{1,\dots,n\}$,

$$a_0|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)\xi_i\xi_j \leqslant a^0|\xi|^2$$

майже для всіх $(t,x) \in Q_T$ і для всіх $\xi \in \mathbb{R}^n$, де a_0, a^0 – додатні сталі;

$(\mathbf{H_2})$: $c_{ij}, c_{ijt} \in L^\infty(Q_T)$, $c_{ij} = c_{ji}$, $c_{ij}(\cdot, 0) \in W^{1,\infty}(\Omega)$ для всіх $i, j \in \{1, \dots, n\}$,

$$c_0|\eta|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t,x)\eta_i\eta_j \leqslant c^0|\eta|^2$$

майже для всіх $(t,x) \in Q_T$ і для всіх $\eta \in \mathbb{R}^n$, де c_0 та c^0 – додатні сталі;

$(\mathbf{H_3})$: $\mu_i, \mu_{it} \in L^\infty(Q_T)$, $\mu_i(\cdot, 0) \in W^{1,\infty}(\Omega)$, $\mu^0 \geqslant \mu_i(t,x) \geqslant \mu_0 > 0$ майже для всіх $(t,x) \in Q_T$ і для всіх $i \in \{1, \dots, n\}$;

$(\mathbf{H_4})$: a_i , a_{it}, b_i, b_{it}, d_i, d_{it}, e_i, $e_{it} \in L^\infty(Q_T)$, $i \in \{1, \dots, n\}$;

$(\mathbf{H_5})$: $\alpha_0, \alpha_{0t}, \alpha_1, \alpha_{1t}, \beta_0, \beta_{0t}, \beta_1, \beta_{1t} \in L^\infty(Q_T)$, $\beta_1(t,x) \geqslant \nu_{\beta_1} > 0$ майже для всіх $(t,x) \in Q_T$;

$(\mathbf{H_6})$: $\gamma_0, \gamma_{0t}, \gamma_1, \gamma_{1t}, \gamma_2, \gamma_{2t} \in L^\infty(Q_T)$; $\hat{\gamma}_0 \geqslant \gamma_0(t,x) \geqslant \tilde{\gamma}_0 > 0$, $\gamma_1(t,x) \geqslant \tilde{\gamma}_1 > 0$, $\gamma_2(t,x) \geqslant \tilde{\gamma}_2 > 0$ майже для всіх $(t,x) \in Q_T$;

$(\mathbf{H_7})$: $f_1, f_2, f_{1t}, f_{2t} \in L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $u_0 \in H^2_{loc}(\overline{\Omega}) \cap H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{2(r-1)}_{loc}(\overline{\Omega})$, $u_1 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{2(p-1)}_{loc}(\overline{\Omega})$, $\theta_0 \in W^{1,2(s-1)}_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap H^2_{loc}(\overline{\Omega}) \cap H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap L^{2(q-1)}_{loc}(\overline{\Omega})$.

Для компактності записів введемо позначення:

$$V_1 = L^2(0,T; H^2_{loc}(\overline{\Omega}) \cap H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^r(0,T; L^r_{loc}(\overline{\Omega})) \cap C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega})),$$
$$V_2 = L^2(0,T; H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^p(0,T; L^p_{loc}(\overline{\Omega})) \cap C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega})),$$
$$V_3 = L^2(0,T; W^{1,s}_{0,loc}(\overline{\Omega}) \cap H^2_{loc}(\overline{\Omega}) \cap H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^r(0,T; L^r_{loc}(\overline{\Omega})) \cap C([0,T]; L^2_{loc}(\overline{\Omega})).$$

Означення 1. *Узагальненим розв'язком задачі (1) - (4) назвемо пару функцій $\{u, \theta\}$, які задовольняють включення $u \in V_1$, $u_t \in V_2$, $\theta \in V_3$ і є границями послідовностей $\{u^k\}$, $\{\theta^k\}$ таких, що $u^k \in V_1$, $u^k_t \in V_2$, $u^k_{tt} \in L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $\theta^k \in V_3$, $\theta^k_t \in L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ і*

$$u^k \to u \quad \text{в} \quad V_1, \quad u^k_t \to u_t \quad \text{в} \quad V_2, \quad \theta^k \to \theta \quad \text{в} \quad V_3$$

і пари $\{u^k, \theta^k\}$ задовольняють початкові умови (4) та інтегральну систему рівностей

$$\int\limits_{\Omega_\tau} u^k_t v\,dx - \int\limits_{\Omega_0} u^k_1(x) v\,dx + \int\limits_{Q_T} \Big[-u^k_t v_t + \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(t,x) u^k_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} a_i(t,x) u^k_{x_i} v +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x)\theta^k_{x_i} v + \alpha_0(t,x) u^k v + \alpha_1(t,x)\theta^k v + \gamma_0(t,x)|u^k|^{r-2}u^k v +$$
$$+ \gamma_1(t,x)|u^k_t|^{p-2}u^k_t v\Big]\,dx\,dt = \int\limits_{Q_\tau} f^k_1(t,x) v\,dx\,dt, \tag{5}$$

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \theta^k_t w\,dx - \int\limits_{\Omega_0} \theta^k_0(x) w\,dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[-\theta^k w + \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t,x)\theta_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t,x)|\theta_{x_i}|^{s-2}\theta_{x_i} w_{x_i} -$$
$$- \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) u^k_t w_{x_i} + \sum_{i=1}^{n} d_i(t,x) u^k_{x_i} w + \sum_{i=1}^{n} e_i(t,x)\theta^k_{x_i} w + \beta_0(t,x) u^k w +$$

$$+\beta_1(t,x)\theta^k w+\gamma_2(t,x)|\theta^k|^{q-2}\theta^k w\Big]\,dx\,dt=\int\limits_{Q_\tau} f_2^k(t,x)w\,dx\,dt \qquad (6)$$

для всіх $\tau\in(0,T]$, *для довільних* $k\in\mathbb{N}$ *і для всіх* $v,w\in C^\infty(0,T;C_0^\infty(\Omega))$, *таких що* $\operatorname{supp} v\in Q_{T,k}$ *та* $\operatorname{supp} w\in Q_{T,k}$ *для всіх* $\tau\in[0,T]$. *Функції* f_j^k, f_{jt}^k $(j=1,2)$, u_0^k, u_1^k, θ_0^k *задовольняють припущення* $(\mathbf{H_7})$ *та*

$$\begin{aligned} &f_j^k\to f_j \quad в \quad L^2(0,T;L^2_{loc}(\overline{\Omega})),\ j=1,2,\quad u_0^k\to u_0 \quad в \quad H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}),\\ &u_1^k\to u_1 \quad в \quad L^2_{loc}(\overline{\Omega}),\quad \theta_0^k\to\theta_0 \quad в \quad W^{1,s}_{0,loc}(\overline{\Omega}),\quad k\to\infty. \end{aligned} \qquad (7)$$

3. Існування та єдиність розв'язку. Розглянемо спершу задачу (1)-(4) в області $Q_T=(0,T)\times\Omega$, де Ω обмежена область з межею $\partial\Omega\in C^1$, регулярною в сенсі Кальдерона.

Означення 2. *Узагальненим розв'язком задачі (1)-(4) в обмеженій області* Q_T *назвемо пару функцій* (u,θ), *які задовольняють включення* $u\in L^2(0,T;V_1(\Omega))\cap \cap L^r(Q_T)$, $u_t\in C(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega))\cap L^p(Q_T)$, $u_{tt}\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$, $\theta\in C(0,T;L^2(\Omega))\cap L^2(0,T;V_2(\Omega))\cap L^q(Q_T)$, $\theta_t\in L^\infty(0,T;L^2(\Omega))$ *та інтегральну систему рівностей*

$$\begin{aligned} &\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{tt}v+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}v_{x_j}+\sum_{i=1}^n a_i(t,x)u_{x_i}v+\sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i}v+\\ &\qquad+\alpha_0(t,x)uv+\alpha_1(t,x)\theta v+\gamma_0(x)|u|^{r-2}uv+\\ &\qquad+\gamma_1(t,x)|u_t|^{p-2}u_t v\Big]\,dx\,dt=\int\limits_{Q_\tau} f_1(t,x)v\,dx\,dt,\\ &\int\limits_{Q_\tau}\Big[\theta_t w+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta_{x_i}w_{x_j}+\sum_{i=1}^n \mu_i(t,x)|\theta_{x_i}|^{s-2}\theta_{x_i}w_{x_i}+\sum_{i=1}^n c_i(t,x)u_t w_{x_i}+\\ &\qquad-\sum_{i=1}^n b_i(t,x)u_t w_{x_i}+\sum_{i=1}^n d_i(t,x)u_{x_i}w+\sum_{i=1}^n e_i(t,x)\theta_{x_i}w+\beta_0(t,x)uw+\\ &\qquad+\beta_1(t,x)\theta w+\gamma_2(t,x)|\theta|^{q-2}\theta w\Big]\,dx\,dt=\int\limits_{Q_\tau} f_2(t,x)w\,dx\,dt \end{aligned}$$

для всіх $\tau\in(0,T)$ *і для всіх* $v,w\in C^1(0,T;C_0^1(\Omega))$, *та початкові умови* $u(0,x)=u_0(x)$, $u_t(0,x)=u_1(x)$, $\theta(0,x)=\theta_0(x)$.

Нам знадобиться теорема існування узагальненого розв'язку задачі (1)-(4) для обмеженої області, отримана в [15].

Теорема 1. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{H_1})-(\mathbf{H_7})$ *та* a_{ijtt}, $c_{ijtt}\in L^\infty(Q_T)$, $i\in\{1,\dots,n\}$. *Якщо* r *таке, що* $r<\frac{2(n-1)}{n-2}$ *для* $n>2$ *та* $r>2$ *для* $n\in\{1,2\}$, *то існує узагальнений розв'язок задачі (1)-(4) в обмеженій області* Q_T.

Доведемо існування та єдиність узагальненого розв'язку задачі (1)-(4) у випадку необмеженої області.

Теорема 2. *Нехай виконуються умови* $(\mathbf{H_1})-(\mathbf{H_7})$ *та* $u_0 \in H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})$, $u_1 \in L^2_{loc}(\overline{\Omega})$, $\theta_0 \in W^{1,s}_{0,loc}(\overline{\Omega})$, $f_i \in L^2(0,T; L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$ $(i=1,2)$. *Якщо* r *таке, що* $r < \frac{2(n-1)}{n-2}$ *для* $n > 2$ *та* $r > 2$ *для* $n \in \{1,2\}$, $n(r-2) < p$, $\frac{1}{s}+\frac{1}{p} < 1$, $q > s$, *тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)-(4).*

Доведення. Існування. Нехай послідовності $\{f_i^k\}$, $\{u_0^k\}$, $\{u_1^k\}$ та $\{\theta_0^k\}$ задовольняють припущення $(\mathbf{H_7})$ та умову (7).

Розглянемо в обмеженій області $Q_{T,k}$, $k \in \mathbb{N}$ допоміжну задачу

$$\begin{aligned} &A_1(u,\theta) = f_1^{k,k}, \\ &A_2(u,\theta) = f_2^{k,k}, \quad (t,x) \in Q_{T,k}, \end{aligned} \tag{8}$$

з крайовими

$$u\big|_{S_{T,k}} = 0, \quad \theta\big|_{S_{T,k}} = 0, \quad S_{T,k} = (0,T) \times \partial\Omega_k, \tag{9}$$

та початковими

$$u(0,x) = u_0^{k,k}(x),\ u_t(0,x) = u_1^{k,k}(x), \quad \theta(0,x) = \theta_0^{k,k}(x), \quad x \in \Omega_k \tag{10}$$

умовами.

Тут початкові умови та праві частини мають такий вигляд:

$$\begin{aligned} &f_j^{k,k}(t,x) = \begin{cases} f_j^k(t,x), & (t,x) \in Q_{T,k}, \\ 0, & (t,x) \in Q_T \backslash Q_{T,k}, \end{cases} \quad j \in \{1,2\}, \\ &u_i^{k,k}(x) = u_i^k(x)\xi_k(x),\ i \in \{0,1\}, \\ &\theta_0^{k,k}(x) = \theta_0^k(x)\xi_k(x), \end{aligned}$$

де $\xi_k \in C^2(\mathbb{R}^n)$, $0 \leqslant \xi_k(x) \leqslant 1$ для $x \in \overline{\Omega}$, $\xi_k(x) = 1$ для $|x| \leqslant k-1$ та $\xi_k(x) = 0$ для $|x| \geqslant k$.

Оскільки виконуються умови теореми 1 з [15], то існує узагальнений розв'язок $\{u^k, \theta^k\}$ задачі (8)-(10) в області $Q_{T,k}$ для кожного фіксованого k такий, що u^k_{tt}, $\theta^k_t \in L^\infty(0,T; L^2(\Omega_{T,k}))$. Продовжимо $\{u^k\}$ та $\{\theta^k\}$ нулем на $Q_T \backslash Q_{T,k}$ та збережемо за цими функціями ті самі позначення.

Розглянемо (u^k, θ^k) розв'язок задачі (8)-(10) для довільного фіксованого $k \in \mathbb{N}$. Відповідно до означення узагальненого розв'язку одержуємо

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q_\tau} \Big[u^k_{tt} v_t &+ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u^k_{x_i} v_{x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u^k_{x_i} v + \sum_{i=1}^n b_i(t,x) \theta^k_{x_i} v + \\ &+ \alpha_0(t,x) u^k v + \alpha_1(t,x) \theta^k v + \gamma_0(t,x) |u^k|^{r-2} u^k v + \\ &+ \gamma_1(t,x) |u^k_t|^{p-2} u^k_t v \Big]\, dx\, dt = \int\limits_{Q_\tau} f_1^{k,k}(t,x) v\, dx\, dt, \end{aligned} \tag{11}$$

$$\begin{aligned} \int\limits_{Q_\tau} \Big[\theta^k_t w &+ \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x) \theta_{x_i} w_{x_j} + \sum_{i=1}^n \mu_i(t,x) |\theta_{x_i}|^{s-2} \theta_{x_i} w_{x_i} - \sum_{i=1}^n b_i(t,x) u^k_t w_{x_i} + \\ &+ \sum_{i=1}^n d_i(t,x) u^k_{x_i} w + \sum_{i=1}^n e_i(t,x) \theta^k_{x_i} w + \beta_0(t,x) u^k w + \beta_1(t,x) \theta^k w + \end{aligned}$$

$$+\gamma_2(t,x)|\theta^k|^{q-2}\theta^k w\Big]\,dx\,dt=\int\limits_{Q_\tau} f_2^{k,k}(t,x)w\,dx\,dt,\quad \tau\in(0,T). \tag{12}$$

Приймемо в (11)-(12) $v=u_t^k\psi_R(x)e^{-\lambda t}$, $w=\theta^k\psi_R(x)e^{-\lambda t}$, де $\lambda>0$, $\psi_R(x)=[h_R(x)]^\alpha$,

$$h_R(x)=\begin{cases}\frac{1}{R}(R^2-|x|^2), & 0\leqslant |x|\leqslant R,\\ 0, & |x|>R,\end{cases}$$

$\alpha>1$, $k>R+1$, $k\in\mathbb{N}$.

Отримаємо систему рівностей

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{tt}^k u_t^k\psi_R(x)+\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}^k(u_{tx_j}^k\psi_R(x)+u_t^k(\psi_R(x))_{x_j})+$$
$$+\sum_{i=1}^n a_i(t,x)u_{x_i}^k u_t^k\psi_R(x)+\sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i}^k u_t^k\psi_R(x)+\alpha_0(t,x)u^k u_t^k\psi_R(x)+$$
$$+\alpha_1(t,x)\theta^k u_t^k\psi_R(x)+\gamma_0(t,x)|u^k|^{r-2}u^k u_t^k\psi_R(x)+$$
$$+\gamma_1(t,x)|u_t^k|^p\psi_R(x)\Big]e^{-\lambda t}\,dx\,dt=\int\limits_{Q_\tau} f_1^{k,k}(t,x)u_t^k\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt, \tag{13}$$

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[\theta_t^k\theta^k\psi_R(x)+\sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta_{x_i}^k\left(\theta_{x_j}^k\psi_R(x)+\theta^k(\psi_R(x))_{x_j}\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^n \mu_i(t,x)|\theta_{x_i}^k|^{s-2}\theta_{x_i}^k\left(\theta_{x_i}^k\psi_R(x)+\theta^k(\psi_R(x))_{x_i}\right)-$$
$$-\sum_{i=1}^n b_i(t,x)u_t^k(\theta_{x_i}^k\psi_R(x)+\theta^k(\psi_R(x))_{x_i})+\sum_{i=1}^n d_i(t,x)u_{x_i}^k\theta^k\psi_R(x)+$$
$$+\sum_{i=1}^n e_i(t,x)\theta_{x_i}^k\theta^k\psi_R(x)+\beta_0(t,x)u^k\theta^k\psi_R(x)+\beta_1(t,x)|\theta^k|^2\psi_R(x)+$$
$$+\gamma_2(t,x)|\theta^k|^q\psi_R(x)\Big]e^{-\lambda t}\,dx\,dt=\int\limits_{Q_\tau} f_2^{k,k}(t,x)\theta^k\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt. \tag{14}$$

Додамо (13) і (14) та оцінимо всі доданки отриманої рівності. Очевидно

$$I_1^a=\int\limits_{Q_\tau} u_{tt}^k u_t^k\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\tau}|u_t^k|^2\psi_R(x)e^{-\lambda\tau}\,dx+$$
$$+\frac{\lambda}{2}\int\limits_{Q_\tau}|u_t^k|^2\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt-\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}|u_1^{k,k}|^2\psi_R(x)\,dx.$$

На підставі умови ($\mathbf{H_1}$) одержимо

$$I_2^a = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u_{x_i}^k u_{x_j t}^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant \frac{a_0}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda \tau}\, dx -$$
$$- \frac{a_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt + \frac{\lambda a_0}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt -$$
$$- \frac{a^0}{2} \int\limits_{\Omega_0} \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^{k,k}|^2 \psi_R(x)\, dx,$$

де $a_1 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T} \sum\limits_{i,j}^n |a_{ijt}(t,x)|^2$;

$$I_3^a = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x) u_{x_i}^k u_t^k (\psi_R(x))_{x_j} e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant -\frac{A_0 \delta_0^a}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt -$$
$$- \frac{\delta_0^a n^2}{p} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^p \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt - \mu_1(\delta_0^a, p) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n \left| \frac{(\psi_R(x))_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/p}} \right|^{\frac{2p}{p-2}} e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Тут $A_0 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T} \sum\limits_{i,j}^n |a_{ij}(t,x)|^2$, $\delta_0^a > 0$, $\mu_1(\delta_0^a, p) > 0$.

З умови ($\mathbf{H_4}$) отримаємо

$$I_4^a = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n a_i(t,x) u_{x_i}^k u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant -\frac{A_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt -$$
$$- \frac{n}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$

де $A_1 = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^n |a_i(t,x)|^2$. З огляду на умову ($\mathbf{H_5}$) одержимо

$$I_5^a = \int\limits_{Q_\tau} \alpha_0(t,x) u^k u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant -\frac{\nu_{\alpha_0}}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Тут $\nu_{\alpha_0} = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} |\alpha_0(t,x)|^2$. Враховуючи нерівність

$$\int\limits_{Q_\tau} |u^k(t,x)|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant 2T \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{k,k}(x)|^2 \psi_R(x)\, dx +$$
$$+ T^2 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k(t,x)|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \tag{15}$$

отримаємо таку оцінку:

$$I_5^a = \int\limits_{Q_\tau} \alpha_0(t,x) u^k u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant -T\nu_{\alpha_0} \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{k,k}|^2 \psi_R(x)\, dt -$$
$$- \frac{2T^2\nu_{\alpha_0}+1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Крім того,

$$I_6^a = \int\limits_{Q_\tau} \alpha_1(t,x) \theta^k u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant -\frac{\nu_{\alpha_1}}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt -$$
$$- \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$

де $\nu_{\alpha_1} = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} |\alpha_1(t,x)|^2$. З умови ($\mathbf{H_6}$) одержуємо такі оцінки:

$$I_7^a = \int\limits_{Q_\tau} \gamma_0(t,x) |u^k|^{r-2} u^k u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant \frac{\tilde{\gamma}_0}{r} \int\limits_{\Omega_\tau} |u^k|^r \psi_R(x) e^{-\lambda \tau}\, dx -$$
$$- \frac{\hat{\gamma}_0}{r} \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{k,k}|^r \psi_R(x)\, dx + \frac{\tilde{\gamma}_0 \lambda}{r} \int\limits_{Q_\tau} |u^k|^r \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt -$$
$$- \frac{G_0}{r} \int\limits_{Q_\tau} |u^k|^r \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$
$$I_8^a = \int\limits_{Q_\tau} \gamma_1(t,x) |u_t^k|^p \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant \tilde{\gamma}_1 \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^p \psi_R(x)\, dx\, dt.$$

де $G_0 = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} |\gamma_{0t}(t,x)|^2$. Легко отримати таку оцінку:

$$I_9^a = \int\limits_{Q_\tau} f_1^{k,k} u_t^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |f_1^{k,k}|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$
$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Далі

$$I_1^c = \int\limits_{Q_\tau} \theta_t^k \theta^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_\tau} |\theta^k|^2 e^{-\lambda \tau} \psi_R(x)\, dx +$$
$$+ \frac{\lambda}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt - \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega_0} |\theta_0^{k,k}|^2 \psi_R(x)\, dx.$$

Відповідно до ($\mathbf{H_2}$) отримаємо

$$I_2^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t,x)|\theta_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt \geqslant c_0 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt,$$

$$I_3^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij}(t,x)\theta_{x_i}^k \theta^k \psi_R(x)_{x_i} e^{-\lambda t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{\delta_0^c}{s} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}^k|^s \psi_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt - \frac{C_0\delta_0^c}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt -$$

$$- \mu_2(\delta_0^c, s) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/s}} \right|^{\frac{2s}{s-2}} e^{-\lambda t}\,dx\,dt,$$

де $C_0 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T} \sum\limits_{i,j}^{n} |c_{ij}(t,x)|^2$, δ_0^c, $\mu_2(\delta_0^c, s)$ – додатні сталі; $q > s$. З умови ($\mathbf{H_3}$) одержимо

$$I_4^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t,x)|\theta_{x_i}^k|^s \psi_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt \geqslant \mu_0 \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}^k|^s \psi_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt,$$

$$I_5^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \mu_i(t,x)|\theta_{x_i}^k|^{s-2} \theta_{x_i}^k \theta^k \psi_R(x)_{x_i} e^{-\lambda t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{\mu_0\delta_1^c n}{q} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^k|^q \psi_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt - \frac{\mu_0\delta_1^c(s-1)}{s} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}^k|^s \psi_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt -$$

$$- \mu_3(\delta_1^c, s, q) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/q+1/s}} \right|^{\frac{qs}{q-s}} e^{-\lambda t}\,dx\,dt.$$

Тут δ_1^c, $\mu_3(\delta_1^c, s, q)$ – додатні сталі; $q > s$. З умови ($\mathbf{H_4}$) отримаємо

$$I_6^c = -\int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} b_i(t,x) u_t^k \theta^k (\psi_R(x))_{x_i} e^{-\lambda t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant -\frac{\delta_1^c n}{p} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^p \psi_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt - \frac{B_1\delta_1^c}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\,dx\,dt -$$

$$- \mu_4(\delta_1^c, p) \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^{n} \left| \frac{(\psi_R(x))_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/p}} \right|^{\frac{2p}{p-2}} e^{-\lambda t}\,dx\,dt,$$

де $B_1 = \operatorname{ess\,sup}\limits_{Q_T} \sum\limits_{i=1}^{n} |b_i(t,x)|^2$; δ_1^c, $\mu_4(\delta_1^c, p)$ – додатні сталі.

Крім того,

$$I_7^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n d_i(t,x) u_{x_i}^k \theta^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant -\frac{D_1}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt -$$

$$- \frac{n}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt, \quad D_1 = \operatorname*{ess\,sup}_{Q_T} \sum_{i=1}^n |d_i(t,x)|^2;$$

$$I_8^c = \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n e_i(t,x) \theta_{x_i}^k \theta^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant -\frac{E_1 \delta_2^c}{2} \int\limits_{Q_\tau} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt -$$

$$- \frac{n}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt;$$

зважаючи на нерівність (15) та умову ($\mathbf{H_5}$), одержимо

$$I_9^c = \int\limits_{Q_\tau} \beta_0(t,x) u^k \theta^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant -\frac{\nu_{\beta_0}}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt -$$

$$- T\nu_{\beta_0} \int\limits_{\Omega_0} |u_0^{k,k}|^2 \psi_R(x)\, dt - \frac{T^2 \nu_{\beta_0}}{2} \int\limits_{Q_\tau} |u_t^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt,$$

де $E_1 = \operatorname{ess\,sup}_{Q_T} \sum\limits_{i=1}^n |e_i(t,x)|^2$, $\delta_2^c > 0$, $\nu_{\beta_0} = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{Q_T} |\beta_0(t,x)|^2$. Також

$$I_{10}^c = \int\limits_{Q_\tau} \beta_1(t,x) |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant \nu_{\beta_1} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

З умови ($\mathbf{H_6}$) одержимо таку оцінку:

$$I_{11}^c = \int\limits_{Q_\tau} \gamma_2(t,x) |\theta^k|^q \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \geqslant \tilde{\gamma}_2 \int\limits_{Q_\tau} |\theta^k|^q \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Нескладно отримати

$$I_{12}^c = \int\limits_{Q_\tau} f_2^{k,k} \theta^k \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |f_2^{k,k}|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt +$$

$$+ \frac{1}{2} \int\limits_{Q_\tau} |\theta^k|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt.$$

Використовуючи отримані оцінки, з системи рівностей (13)-(14) одержимо

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \left[|u_t^k|^2 + a_0 \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 + \frac{2\tilde{\gamma}_0}{r} |u^k|^r + |\theta^k|^2 \right] e^{-\lambda\tau} \psi_R(x)\, dx + \int\limits_{Q_\tau} \Big[\Big(\lambda - T^2(2\nu_{\alpha_0} + \nu_{\beta_0}) -$$

$$- n - 3 \Big) |u_t^k|^2 + \left(\frac{2\tilde{\gamma}_0 \lambda}{r} - \frac{2G_0}{r} \right) |u^k|^r + (\lambda a_0 - a_1 - A_0 \delta_0^a - A_1 - D_1) \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 +$$

$$+\left(\lambda - C_0\delta_0^c - \nu_{\alpha_1} - B_1\delta_1^c - \nu_{\beta_0} - 2\nu_{\beta_1} - 2n - 1\right)|\theta^k|^2 + (2c_0 - E_1\delta_2^c)\sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}|^2 +$$

$$+\left(2\tilde{\gamma}_1 - \frac{2(\delta_0^a n^2 + \delta_1^c n)}{p}\right)|u_t^k|^p + \left(\tilde{2\gamma_2} - \frac{2\mu_0\delta_1^c n}{q}\right)|\theta^k|^q +$$

$$+\left(2\mu_0 - \frac{2\delta_0^c}{s} - \frac{2\mu_0\delta_1^c(s-1)}{s}\right)\sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^k|^s\Bigg]\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt \leqslant \int\limits_{\Omega_0}\Bigg[|u_1^{k,k}|^2 +$$

$$+a^0\sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^{k,k}|^2 + |\theta_0^{k,k}|^2 + \frac{2\tilde{\gamma}_0}{r}|u_0^{k,k}|^r + 2T(\nu_{\alpha_0} + \nu_{\beta_0})|u_0^{k,k}|^2\Bigg]\psi_R(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[|f_1^{k,k}|^2 + |f_2^{k,k}|^2\right]\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt + \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n\Bigg[(\mu_1+\mu_4)\left|\frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/p}}\right|^{\frac{2p}{p-2}} +$$

$$+\mu_2\left|\frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/s}}\right|^{\frac{2s}{s-2}} + \mu_3\left|\frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/q+1/s}}\right|^{\frac{qs}{q-s}}\Bigg]e^{-\lambda t}\,dx\,dt \tag{16}$$

для $\tau \in (0, T)$.

Приймемо $\lambda = \max\big\{2T^2\nu_{\alpha_0} + T^2\nu_{\beta_0} + n + 3,\ \frac{a_1 + A_0\delta_0^a + A_1 + D_1}{a_0},\ \frac{G_0}{\tilde{\gamma}_0},\ C_0\delta_0^c + \nu_{\alpha_1} + B_1\delta_1^c + \nu_{\beta_0} + 2\nu_{\beta_1} + 2n + 1\big\}$ і нехай $\delta_0^a, \delta_0^c, \delta_1^c, \delta_2^c$ – довільні малі додатні сталі, які задовольняють такі умови: $\delta_0^a = \frac{\delta_1^c}{n} < \frac{\tilde{\gamma}_1 p}{2n^2}$, $\delta_0^c = \delta_1^c(s-1) < \frac{s\mu_0}{(1-\mu_0)}$, $\delta_1^c < \frac{\tilde{\gamma}_2 q}{\mu_0 n}$, $\delta_2^c < \frac{2c_0}{E_1}$. Тоді підінтегральний вираз правої частини останньої нерівності додатний, а ліва частина обмежена додатною сталою.

Нехай $R_0 \in (0, R)$ довільне фіксоване число. Тоді матимемо

$$\int\limits_{\Omega_{T,R_0}}\left[|u_t^k|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 + |u^k|^r + |\theta^k|^2\right]dx + \int\limits_{Q_{T,R_0}}\Bigg[|u_t^k|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^k|^2 + |u^k|^r +$$

$$+\sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^k|^2 + |\theta^k|^2\Bigg]dx\,dt + \int\limits_{Q_{T,R_0}}\left[|u_t^k|^p + |\theta^k|^q + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^k|^s\right]dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{e^{\lambda T}}{\lambda(R-R_0)^\alpha}\times\Bigg[\int\limits_{\Omega_0}\Big[|u_1^{k,k}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^{k,k}|^2 + |\theta_0^{k,k}|^2 + |u_0^{k,k}|^r + |u_0^{k,k}|^2\Big]\psi_R(x)\,dx +$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[|f_1^{k,k}|^2 + |f_2^{k,k}|^2\right]\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt + \int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n\Bigg[(\mu_1+\mu_4)\left|\frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/p}}\right|^{\frac{2p}{p-2}} +$$

$$+\mu_2\left|\frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/s}}\right|^{\frac{2s}{s-2}} + \mu_3\left|\frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/q+1/s}}\right|^{\frac{qs}{q-s}}\Bigg]e^{-\lambda t}\,dx\,dt\Bigg], \quad \tau \in (0, T).$$

Отже,

$$\begin{aligned}
&\|u^k\|_{L^\infty(0,T;L^r(\Omega_{T,R_0})\cap H_0^1(\Omega_{T,R_0}))} \leqslant \mathrm{const},\\
&\|u_t^k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{T,R_0}))\cap L^p(0,T;L^p(\Omega_{T,R_0}))} \leqslant \mathrm{const},\\
&\|\theta^k\|_{L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{T,R_0}))\cap L^s(0,T;W_0^{1,s}(\Omega_{T,R_0}))\cap L^q(0,T;L^q(\Omega_{T,R_0}))} \leqslant \mathrm{const}.
\end{aligned} \tag{17}$$

На підставі (17), з послідовностей $\{u^k\}$, $\{\theta^k\}$ можна вибрати такі підпослідовністі $\{u^{k_l}\}$, $\{\theta^{k_l}\}$ що

$$\begin{aligned}
&u^{k_l} \to u \quad &&\text{*-слабко в } L^\infty(0,T;L^r(\Omega_{R_0})\cap H_0^1(\Omega_{R_0}));\\
&u_t^{k_l} \to u_t \quad &&\text{*-слабко в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{R_0})) \text{ і слабко в } L^p(0,T;L^p(\Omega_{R_0}));\\
&\theta^{k_l} \to \theta \quad &&\text{*-слабко в } L^\infty(0,T;L^2(\Omega_{R_0})) \text{ і слабко в}\\
& && L^s(0,T;W_0^{1,s}(\Omega_{R_0}))\cap L^q(0,T;L^q(\Omega_{R_0}))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega_{R_0}))
\end{aligned} \tag{18}$$

при $k_l \to \infty$.

З рівняння (1) випливає, що $u_{tt}^k \in L^{p'}(0,T;L^{p'}(\Omega_{R_0}))$, з (18) одержуємо, що $u_t^k \in L^2(0,T;L^2(\Omega_{R_0}))\cap L^p(0,T;L^p(\Omega_{R_0}))$, але $L^p(\Omega_{R_0}) \subset L^r(\Omega_{R_0})$ при $p > r$ причому $L^p(\Omega_{R_0}) \subset L^r(\Omega_{R_0})$ компактно, тому з послідовності $\{u^k\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{u^{k_l}\}$, що $u_t^{k_l} \to u_t$ сильно в $L^r(\Omega_{R_0})$. Аналогічно, з рівняння (2) випливає, що $\theta_t^k \in L^{s'}(0,T;W^{-1,s'}(\Omega_{R_0}))$, з (18) маємо, що $\theta^k \in L^s(0,T;W_0^{1,s}(\Omega_{R_0}))\cap \cap L^q(0,T;L^q(\Omega_{R_0}))\cap L^2(0,T;H_0^1(\Omega_{R_0}))$, але $W_0^{1,s}(\Omega_{R_0}) \subset L^s(\Omega_{R_0}) \subset W^{-1,s'}(\Omega_{R_0})$ компактно, тому з послідовності $\{\theta^k\}$ можна вибрати таку підпослідовність $\{\theta^{k_l}\}$, що $\theta^{k_l} \to \theta$ сильно в $L^s(\Omega_{R_0})$.

Розглянемо систему рівностей (8)-(10) для довільних фіксованих k, m, де $k > > m > R_0+1$; $k, m \in \mathbb{N}$ та приймемо $v = (u_t^k - u_t^m)\psi_R(x)e^{-\lambda t}$, $w = (\theta^k - \theta^m)\psi_R(x)e^{-\lambda t}$. Позначимо $u^{k,m} = u^k - u^m$, $\theta^{k,m} = \theta^k - \theta^m$. Тоді з (8)-(10) отримаємо

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{tt}^{k,m}u_t^{k,m}\psi_R(x) + \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(t,x)u_{x_i}^{k,m}(u_{tx_j}^{k,m}\psi_R(x) + u_t^{k,m}\psi_R(x)_{x_j}) +\\
&+\sum_{i=1}^n a_i(t,x)u_{x_i}^{k,m}u_t^{k,m}\psi_R(x) + \sum_{i=1}^n b_i(t,x)\theta_{x_i}^{k,m}u_t^{k,m}\psi_R(x) + \alpha_0(t,x)u^{k,m}u_t^{k,m}\psi_R(x) +\\
&\quad + \alpha_1(t,x)\theta^{k,m}u_t^{k,m}\psi_R(x) + \gamma_0(t,x)(|u^k|^{r-2}u^k - |u^m|^{r-2}u^m)(u_t^k - u_t^m)\psi_R(x) +\\
&\quad + \gamma_1(t,x)(|u_t^k|^{p-2}u_t^k - |u_t^m|^{p-2}u_t^m)(u_t^k - u_t^m)\psi_R(x)\Big]e^{-\lambda t}\,dx\,dt =\\
&\quad = \int\limits_{Q_\tau}(f_1^{k,k}(t,x) - f_1^{m,m}(t,x))u_t^{k,m}\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt,
\end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{Q_\tau}\Big[\theta_t^{k,m}\theta^{k,m}\psi_R(x) + \sum_{i,j=1}^n c_{ij}(t,x)\theta_{x_i}^{k,m}\left(\theta_{x_j}^{k,m}\psi_R(x) + \theta^{k,m}(\psi_R(x))_{x_j}\right) +\\
&\quad + \sum_{i=1}^n \mu_i(t,x)(|\theta_{x_i}^k|^{s-2}\theta_{x_i}^k - |\theta_{x_i}^m|^{s-2}\theta_{x_i}^m)\left(\theta_{x_i}^{k,m}\psi_R(x) + \theta^{k,m}\psi_R(x)_{x_i}\right) +
\end{aligned}$$

$$+\sum_{i=1}^{n} c_i(t,x)u_t^{k,m}(\theta_{x_i}^{k,m}\psi_R(x)+\theta^{k,m}\psi_R(x)_{x_i})+\sum_{i=1}^{n} d_i(t,x)u_{x_i}^{k,m}\theta^{k,m}\psi_R(x)+$$

$$+\sum_{i=1}^{n} e_i(t,x)\theta_{x_i}^{k,m}\theta^{k,m}\psi_R(x)+\beta_0(t,x)u^{k,m}\theta^{k,m}\psi_R(x)+\beta_1(t,x)|\theta^{k,m}|^2\psi_R(x)+$$

$$+\gamma_2(t,x)(|\theta^k|^{q-2}\theta^k-|\theta^m|^{q-2}\theta^m)(\theta^k-\theta^m)\psi_R(x)\Big]e^{-\lambda t}\,dx\,dt=$$

$$=\int\limits_{Q_\tau}(f_2^{k,k}(t,x)-f_2^{m,m}(t,x))\theta^{k,m}\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt,\quad \tau\in(0,T). \tag{20}$$

Оцінимо доданки системи рівностей (19)-(20). Одержимо

$$I_1^{k,m}=\int\limits_{Q_\tau}\gamma_0(t,x)(|u^k|^{r-2}u^k-|u^m|^{r-2}u^m)(u_t^k-u_t^m)\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\tilde\gamma_0\left(\int\limits_{Q_\tau}(|u^k|^{r-2}u^k-|u^m|^{r-2}u^m)^{r'}\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\right)^{1/r'}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_\tau}|u_t^{k,m}|^r\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\right)^{1/r}=I_{1,1}^{k,m}\times I_{1,2}^{k,m},\quad r<p.$$

$$I_2^{k,m}=\int\limits_{Q_\tau}\gamma_1(t,x)(|u_t^k|^{p-2}u_t^k-|u_t^m|^{p-2}u_t^m)(u_t^k-u_t^m)\psi_R(x)\Big]e^{-\lambda t}\,dx\,dt\geqslant$$

$$\geqslant 2^{2-p}\int\limits_{Q_\tau}\gamma_1(t,x)|u_t^{k,m}|^p\psi_R(x)\,dx\,dt\geqslant 2^{2-p}\tilde\gamma_1\int\limits_{Q_\tau}|u_t^{k,m}|^p\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt;$$

$$I_3^{k,m}=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t,x)(|\theta_{x_i}^k|^{s-2}\theta_{x_i}^k-|\theta_{x_i}^m|^{s-2}\theta_{x_i}^m)\theta_{x_i}^{k,m}\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\geqslant$$

$$\geqslant 2^{2-s}\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t,x)|\theta_{x_i}^{k,m}|^s\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\geqslant 2^{2-s}\mu_0\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}|\theta_{x_i}^{k,m}|^s\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt;$$

$$I_4^{k,m}=\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t,x)(|\theta_{x_i}^k|^{s-2}\theta_{x_i}^k-|\theta_{x_i}^m|^{s-2}\theta_{x_i}^m)\theta_{x_i}^{k,m}\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt\leqslant$$

$$\leqslant\mu^0\left(\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^{n}(|\theta_{x_i}^k|^{s-2}\theta_{x_i}^k-|\theta_{x_i}^m|^{s-2}\theta_{x_i}^m)\left|\frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/s}}\right|^s e^{-\lambda t}\,dx\,dt\right)^{1/s'}\times$$

$$\times\left(\int\limits_{Q_\tau}|\theta^{k,m}|^s\psi_R(x)e^{-\lambda t}\right)^{1/s}=I_{4,1}^{k,m}I_{4,2}^{k,m}.$$

$$I_5^{k,m} = \int\limits_{Q_\tau} \gamma_2(t,x)(|\theta^k|^{q-2}\theta^k - |\theta^m|^{q-2}\theta^m)(\theta^k - \theta^m)\psi_R(x)\Big] e^{-\lambda t}\,dx\,dt \geqslant$$

$$\geqslant 2^{2-q}\int\limits_{Q_\tau} \gamma_2(t,x)|\theta^{k,m}|^q\psi_R(x)\,dx\,dt \geqslant 2^{2-q}\tilde{\gamma}_2\int\limits_{Q_\tau} |\theta^{k,m}|^q\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt;$$

Підставимо отримані оцінки інтегралів $I_1^a - I_9^a$, $I_1^c - I_{12}^c$, $I_1^{k,m} - I_5^{k,m}$ в (19)-(20), отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_\tau}\left[|u_t^{k,m}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{k,m}|^2 + |\theta^{k,m}|^2\right]\psi_R(x)e^{-\lambda\tau}\,dx+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\Big[|u_t^{k,m}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{k,m}|^2 + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^{k,m}|^2 + |\theta^{k,m}|^2\Big]\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[|u_t^{k,m}|^p + |\theta^{k,m}|^q + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^{k,m}|^s\right]\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \mu_6\int\limits_{\Omega_0}\left[|u_1^{k,m}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{0x_i}^{k,m}|^2 + |\theta_0^{k,m}|^2 + |u_0^{k,m}|^2\right]\psi_R(x)\,dx + \int\limits_{Q_\tau}\Big[|f_1^{k,k} - f_1^{m,m}|^2+$$

$$+|f_2^{k,k} - f_2^{m,m}|^2\Big]\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt + I_{1,1}^{k,m}\times I_{1,2}^{k,m} + I_{4,1}^{k,m}\times I_{4,2}^{k,m}+$$

$$+\int\limits_{Q_\tau}\left[(\mu_1+\mu_4)\sum_{i=1}^n\left|\frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/p}}\right|^{\frac{2p}{p-2}} + \mu_2\sum_{i=1}^n\left|\frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/2+1/s}}\right|^{\frac{2s}{s-2}}\right]e^{-\lambda t}\,dx\,dt+$$

$$+\mu_3\int\limits_{Q_\tau}\sum_{i=1}^n\left|\frac{\psi_R(x)_{x_i}}{\psi_R(x)^{1/q+1/s}}\right|^{\frac{qs}{q-s}} e^{-\lambda t}\,dx\,dt, \tag{21}$$

де μ_6 – додатна стала.

Існує таке $R_1 > 0$, що для довільного $R_0 < R_1$, $R_0 > 0$ виконуються такі оцінки:

$$(R_1 - R_0)^\alpha \leqslant \varphi_R(x) \leqslant (2R_1)^\alpha, \qquad \left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/p}}\right|^{\frac{2p}{(p-2)}} \leqslant (2R_1)^{\alpha - \frac{2p}{p-2}},$$

$$\left|\frac{(\varphi_R(x))_{x_i}}{(\varphi_R(x))^{1/2+1/s}}\right|^{\frac{2s}{(s-2)}} \leqslant (2R_1)^{\alpha-\frac{2s}{s-2}}, \qquad \left|\frac{(\psi_R(x))_{x_i}}{(\psi_R(x))^{1/q+1/s}}\right|^{\frac{qs}{(q-s)}} \leqslant (2R_1)^{\alpha-\frac{qs}{q-s}}. \tag{22}$$

На підставі вибору послідовностей $\{f_i^k\}$ $(i=1,2)$, $\{u_0^k\}$, $\{u_1^k\}$, $\{\theta_0^k\}$, одержуємо

$$f_i^{k,k} \to f_i \text{ в } L^2(0,T;L^2_{loc}(\overline{\Omega})),\ i=1,2; \qquad u_0^{k,k} \to u_0 \text{ в } H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}),$$
$$u_1^{k,k} \to u_1 \text{ в } L^2_{loc}(\overline{\Omega}), \qquad \theta_0^{k,k} \to \theta_0 \text{ в } W^{1,s}_{0,loc}(\overline{\Omega})$$

при $k\to\infty$.

Оскільки $|f_i^{k,k} - f_i^{m,m}| \leqslant |f_i^{k,k} - f_i| + |f_i - f_i^{m,m}|$, то маємо $|f_i^{k,k} - f_i^{m,m}|^2 \leqslant 2(|f_i^{k,k} - f_i|^2 + |f_i - f_i^{m,m}|^2)$ відповідно для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$, існують такі $k_0 > k$, $m_0 > m$, що

$$J = \int\limits_{Q_{T,R_1}} |f_i^{k_0,k_0} - f_i^{m_0,m_0}|^2 \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant 2 \int\limits_{Q_{T,R_1}} \Big[|f_i^{k_0,k_0} - f_i|^2 + |f_i - f_i^{m_0,m_0}|^2 \Big] \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt < \frac{\varepsilon}{10}, \quad i = 1, 2.$$

Аналогічно,

$$\int\limits_{\Omega_{0,R_1}} (u_1^{k_0,k_0} - u_1^{m_0,m_0}) \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt < \frac{\varepsilon}{10},$$
$$\int\limits_{\Omega_{0,R_1}} (\theta_0^{k_0,k_0} - \theta_0^{m_0,m_0}) \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt < \frac{\varepsilon}{10},$$
$$\int\limits_{\Omega_{0,R_1}} (u_0^{k_0,k_0} - u_0^{m_0,m_0}) \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt < \frac{\varepsilon}{10},$$
$$\int\limits_{\Omega_{0,R_1}} (\sum_{i=1}^{n} |u_{0x_i}^{k_0,k_0}|^2 - \sum_{i=1}^{n} |u_{0x_i}^{m_0,m_0}|^2) \psi_R(x) e^{-\lambda t}\, dx\, dt < \frac{\varepsilon}{10},$$

при $k_0 > k$, $m_0 > m$, для $R_0 \in (0, R_1)$.

Тоді з (21) для $R_0 \in (0, R_1)$ існують такі $k_0 > k$, $m_0 > m$, що

$$\int\limits_{\Omega_{T,R_0}} \left[|u_t^{k_0,m_0}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{k_0,m_0}|^2 + |\theta^{k_0,m_0}|^2 \right] dx + \int\limits_{Q_{T,R_0}} \Big[|u_t^{k_0,m_0}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}^{k_0,m_0}|^2 +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}^{k_0,m_0}|^2 + |\theta^{k_0,m_0}|^2 \Big] dx\, dt + \int\limits_{Q_{T,R_0}} \Big[|u_t^{k_0,m_0}|^p + |\theta^{k_0,m_0}|^q +$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} |\theta_{x_i}^{k_0,m_0}|^s \Big] dx\, dt \mu_6 \frac{2\varepsilon}{5} + I_{1,1}^{k,m} \times I_{1,2}^{k,m} + I_{4,1}^{k,m} \times I_{4,2}^{k,m} + \mu_7 \left(\frac{R_1}{R_1 - R_0} \right)^{\alpha} \times$$
$$\times \left(R_1^{n - \frac{2p}{p-2}} + R_1^{n - \frac{2s}{s-2}} + R_1^{n - \frac{qs}{q-s}} \right), \quad \mu_7 > 0. \tag{23}$$

Для $n < \max\{\frac{2p}{p-2}, \frac{2s}{s-2}, \frac{qs}{q-s}\}$ і для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$

$$\left(\frac{R_1}{R_1 - R_0} \right)^{\alpha} \left[R_1^{n - \frac{2p}{p-2}} + R_1^{n - \frac{2s}{s-2}} + R_1^{n - \frac{qs}{q-s}} \right] < \frac{\varepsilon}{10} \quad \text{при } R_1 \to \infty.$$

Інтеграл $I_{1,1}^{k,m}$ – обмежений при фіксованому R_1; оскільки $u_t^k \to u_t$ сильно в $L^r(Q_{T,R_1})$,то $I_{1,2}^{k,m} \to 0$ при $k, m \to \infty$, тому для довільного як завгодно малого $\varepsilon > 0$ існують такі $k_0 > k$, $m_0 > m$, що $I_1^{k_0,m_0} < \frac{\varepsilon}{10}$. Інтеграл $I_{4,1}^{k,m}$ – обмежений при фіксованому R_1; оскільки $\theta^{k_l} \to \theta$ сильно в $L^s(Q_{T,R_1})$, то $I_4^{k_0,m_0} < \frac{\varepsilon}{10}$, для $k_0 > k$, $m_0 > m$.

Тоді з останньої нерівності отримаємо

$$\int\limits_{\Omega_{T,R_0}} \left[|u_t^{k_0,m_0}|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{k_0,m_0}|^2 + |\theta^{k_0,m_0}|^2\right] dx < \overline{\varepsilon}, \quad \overline{\varepsilon} = \varepsilon\left(\frac{2\mu_6}{5} + \frac{\mu_7}{10} + \frac{2}{5}\right),$$

$$\int\limits_{Q_{T,R_0}} \left[|u_t^k|^2 + \sum_{i=1}^n |u_{x_i}^{k_0,m_0}|^2 + \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^{k_0,m_0}|^2 + |\theta^{k_0,m_0}|^2\right] dx\,dt < \overline{\varepsilon},$$

$$\int\limits_{Q_{T,R_0}} |u_t^{k_0,m_0}|^p\,dx\,dt < \overline{\varepsilon}, \quad \int\limits_{Q_{T,R_0}} |\theta^{k_0,m_0}|^q\,dx\,dt < \overline{\varepsilon}, \quad \int\limits_{Q_{T,R_0}} \sum_{i=1}^n |\theta_{x_i}^{k_0,m_0}|^s\,dx\,dt < \overline{\varepsilon},$$

Враховуючи довільність ε, одержуємо, що для будь-якої обмеженої області $G \subset \Omega$ послідовності $\{u^k\}$, $\{\theta^k\}$ фундаментальні в просторах $L^2(0,T;H_0^1(G))$, та $L^2(0,T;$ $W_0^{1,s}(G))\cap$ $L^q(0,T;L^q(G))$ відповідно. В цьому сенсі розумітимемо, що $\{u^k\}$, $\{\theta^k\}$ фундаментальні відповідно в $L^2(0,T;H^1_{0,loc}(\overline{\Omega}))$, та $L^2(0,T;W^{1,s}_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^q(0,T;$ $L^q_{loc}(\overline{\Omega}))$, а отже, ці послідовності і сильно збіжні у відповідних просторах.

Ми отримали, що послідовність$\{u_t^k\}$ фундаментальна в просторі $C([0,T];L^2_{loc}(\overline{\Omega})) \cap L^p(0,T;L^p_{loc}(\overline{\Omega}))$.

Отже, $u^k \to u$ в $C([0,T];H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})) \cap L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $\theta^k \to \theta$ в $C([0,T];L^2_{loc}(\overline{\Omega})))$. Тоді $u^k(0) \to u(0)$, $u_t^k \to u_t(0)$, $\theta^k(0) \to \theta(0)$ в $L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, тобто $u(0) = u_0$, $u_t(0) = u_1$, $\theta(0) = \theta_0$.

Перейшовши до границі в системі рівностей (11)-(12) за вибраними послідовностями при $k \to \infty$, з фундаментальності послідовностей $\{u^k\}$, $\{\theta^k\}$, отримаємо систему інтегральних рівностей (5)-(6) для довільних v, $w \in C^\infty([0,T];C_0^\infty(\Omega))$. Отже, (u,θ) розв'язок задачі (1)-(4).

(Єдиність.) Нехай існують два розв'язки (u^1,θ^1), (u^2,θ^2) задачі (1)-(4) з початковими умовами u_0^i, u_1^i, θ_0^i та початковими функціями f_1^i, f_2^i, $i \in \{1,2\}$. Згідно з означенням узагальненого розв'язку існують послідовності $\{f_j^{i,k}\}$, $\{u_0^{i,k}\}$, $\{u_1^{i,k}\}$, $\{\theta_0^{i,k}\}$, $i,j = 1,2$ збіжні до функцій f_j, u_0, u_1, θ_0 відповідно у просторах $L^2(0,T;L^2_{loc}(\overline{\Omega}))$, $H^1_{0,loc}(\overline{\Omega})$, $L^2_{loc}(\overline{\Omega})$,$W^{1,s}_{0,loc}(\overline{\Omega})$. Також існують послідовності $\{u^{i,k}\}$, $\{\theta^{i,k}\}$, $i = 1,2$, які є розв'язками задач

$$\begin{aligned}
&A_1(u^i,\theta^i) = f_1^{i,k},\\
&A_2(u^i,\theta^i) = f_2^{i,k}, \quad (t,x) \in Q_T,\\
&u^{i,k}\big|_{S_T} = 0, \quad u^{i,k}(0,x) = u_0^{i,k}(x),\ u_t^{i,k}(0,x) = u_1^{i,k}(x),\\
&\theta^{i,k}\big|_{S_T} = 0, \quad \theta^k(0,x) = \theta_0^k(x), \quad x \in \Omega,
\end{aligned}$$

$i = 1,2$, $k > R_0 + 1$, $k \in \mathbb{N}$, $\{u^{i,k}\}$ збігається до u^i та $\{\theta^{i,k}\}$ збігається до θ^i в просторах V_1, V_3 відповідно, при $k \to \infty$.

Розглянемо систему рівностей (5) - (6) для $\{u^{1,k},\theta^{1,k}\}$ та $\{u^{2,m},\theta^{2,m}\}$. Позначимо $u^{k,m} = u^{1,k} - u^{2,m}$, $\theta^{k,m} = \theta^{1,k} - \theta^{2,m}$. Отримаємо подібну до (19)-(20) систему

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[u_{tt}^{k,m}u_t^{k,m}\psi_R(x)+\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}(t,x)u_{x_i}^{k,m}(u_{tx_j}^{k,m}\psi_R(x)+u_t^{k,m}\psi_R(x)_{x_j})+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}a_i(t,x)u_{x_i}^{k,m}u_t^{k,m}\psi_R(x)+\sum_{i=1}^{n}b_i(t,x)\theta_{x_i}^{k,m}u_t^{k,m}\psi_R(x)+$$
$$+\alpha_0(t,x)u^{k,m}u_t^{k,m}\psi_R(x)+\alpha_1(t,x)\theta^{k,m}u_t^{k,m}\psi_R(x)+\gamma_0(t,x)(|u^{1,k}|^{r-2}u^{1,k}-$$
$$-|u^{2,m}|^{r-2}u^{2,m})(u_t^{1,k}-u_t^{2,m})\psi_R(x)+\gamma_1(t,x)(|u_t^{1,k}|^{p-2}u_t^{1,k}-$$
$$-|u_t^{2,m}|^{p-2}u_t^{2,m})(u_t^{1,k}-u_t^{2,m})\psi_R(x)\Big]e^{-\lambda t}\,dx\,dt=$$
$$=\int\limits_{Q_\tau}(f_1^{1,k}(t,x)-f_1^{2,m}(t,x))u_t^{k,m}\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt, \tag{24}$$

$$\int\limits_{Q_\tau}\Big[\theta_t^{k,m}\theta^{k,m}\psi_R(x)+\sum_{i,j=1}^{n}c_{ij}(t,x)\theta_{x_i}^{k,m}\left(\theta_{x_j}^{k,m}\psi_R(x)+\theta^{k,m}(\psi_R(x))_{x_j}\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}\mu_i(t,x)(|\theta_{x_i}^{1,k}|^{s-2}\theta_{x_i}^{1,k}-|\theta_{x_i}^{2,m}|^{s-2}\theta_{x_i}^{2,m})\left(\theta_{x_i}^{k,m}\psi_R(x)+\theta^{k,m}\psi_R(x)_{x_i}\right)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}c_i(t,x)u_t^{k,m}(\theta_{x_i}^{k,m}\psi_R(x)+\theta^{k,m}\psi_R(x)_{x_i})+\sum_{i=1}^{n}d_i(t,x)u_{x_i}^{k,m}\theta^{k,m}\psi_R(x)+$$
$$+\sum_{i=1}^{n}e_i(t,x)\theta_{x_i}^{k,m}\theta^{k,m}\psi_R(x)+\beta_0(t,x)u^{k,m}\theta^{k,m}\psi_R(x)+\beta_1(t,x)|\theta^{k,m}|^2\psi_R(x)+$$
$$+\gamma_2(t,x)(|\theta^{1,k}|^{q-2}\theta^{1,k}-|\theta^{2,m}|^{q-2}\theta^{2,m})(\theta^{1,k}-\theta^{2,m})\psi_R(x)\Big]e^{-\lambda t}\,dx\,dt=$$
$$=\int\limits_{Q_\tau}(f_2^{1,k}(t,x)-f_2^{2,m}(t,x))\theta^{k,m}\psi_R(x)e^{-\lambda t}\,dx\,dt,\quad \tau\in(0,T). \tag{25}$$

Аналогічно, як і під час доведення існування розв'язку, існує таке $R_2>0$, що для довільного $R_1<R_2$, $R_1>0$ існують такі $k_1,m_1\in\mathbb{N}$, $k_1>k$, $m_1>m$, що

$$\int\limits_{\Omega_{T,R_1}}\left[|u_t^{k_1,m_1}|^2+|\theta^{k_1,m_1}|^2\right]dx+\int\limits_{Q_{T,R_1}}\left[|u_t^{k_1,m_1}|^2+|\theta^{k_1,m_1}|^2\right]dx\,dt\leqslant$$
$$\leqslant\mu_8\int\limits_{\Omega_{0,R_2}}\left[|u_1^{k_1,m_1}|^2+\sum_{i=1}^{n}|u_{0x_i}^{k_1,m_1}|^2+|\theta_0^{k_1,m_1}|^2+|u_0^{k_1,m_1}|^2\right]dx+$$
$$+\mu_9\left(\frac{R_2}{R_2-R_1}\right)^{\alpha}\left(R_2^{n-\frac{2p}{p-2}}+R_2^{n-\frac{2s}{s-2}}+R_2^{n-\frac{qs}{q-s}}\right), \tag{26}$$

де μ_8,μ_9 – додатні сталі, які не залежать від k_1,m_1 та R_2; $R_1\in(0,R_2)$.

Згідно з означенням узагальненого розв'язку, отримуємо

$$\mu_{11} \int\limits_{\Omega_{0,R_2}} \left[|u_1^{k_1,m_1}|^2 + \sum_{i=1}^{n} |u_{0x_i}^{k_1,m_1}|^2 + |\theta_0^{k_1,m_1}|^2 + |u_0^{k_1,m_1}|^2 \right] dx < \frac{\varepsilon_1}{2} \tag{27}$$

для довільного малого $\varepsilon_1 > 0$.

Нескладно показати, що для $n < \max\{\frac{2p}{p-2}, \frac{2s}{s-2}, \frac{qs}{q-s}\}$, для довільного як завгодно малого $\varepsilon_1 > 0$

$$\left(\frac{R_2}{R_2 - R_1}\right)^{\alpha} \left(R_2^{n-\frac{2p}{p-2}} + R_2^{n-\frac{2s}{s-2}} + R_2^{n-\frac{qs}{q-s}}\right) < \frac{\varepsilon_1}{2} \quad \text{при} \quad R_2 \to \infty.$$

Оскільки послідовності $\{u^{i,k}\}$, $i = 1, 2$, фундаментальні в просторі V_1, а послідовності $\{\theta^{i,k}\}$, $i = 1, 2$ фундаментальні в просторі V_3, то існують такі $k_2, m_2 \in \mathbb{N}$, що

$$\int\limits_{Q_{T,R_1}} |u^{2,m_2} - u^{1,k_2}|\, dx\, dt < \varepsilon, \qquad \int\limits_{Q_{T,R_1}} |\theta^{2,m_2} - \theta^{1,k_2}|\, dx\, dt < \varepsilon$$

для $k_2 > k_1 > k$, $m_2 > m_1 > m$; $R_1 \in (0, R_2)$.

Очевидно

$$\begin{aligned} \|u^2 - u^1\|_{L^2(Q_{T,R_1})} &\leqslant \|u^{2,m} - u^2\|_{L^2(Q_{T,R_1})} + \\ &+ \|u^{2,m} - u^{1,k}\|_{L^2(Q_{T,R_1})} + \|u^{1,k} - u^1\|_{L^2(Q_{T,R_1})}. \end{aligned}$$

Враховуючи те, що послідовність $\{u^{i,k}\}$ збігається до u^i в просторі V_1, існують такі $k_2, m_2 \in \mathbb{N}$, $k_2 > k_2$, $m_2 > m_2$, що

$$\|u^{1,k_2} - u^1\|_{L^2(Q_{T,R_1})} < \varepsilon_1, \quad \|u^{2,m_2} - u^2\|_{L^2(Q_{T,R_1})} < \varepsilon_1.$$

Відповідно,

$$\|u^2 - u^1\|_{L^2(Q_{T,R_1})} < 3\varepsilon_1.$$

Аналогічно, оскільки $\{\theta^{i,k}\}$ збігається до θ^i в просторі V_3, одержуємо

$$\|\theta^2 - \theta^1\|_{L^2(Q_{T,R_1})} < 3\varepsilon_1.$$

Враховуючи довільність ε_1, ми отримаємо, що $u^1(t,x) = u^2(t,x)$ та $\theta^1(t,x) = \theta^2(t,x)$ майже всюди в Q_T. Теорема доведена. $\square$

---

1. *Гаевский Х.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения / *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Д.* – М., 1978.
2. *Коддингтон Э.А.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений / *Коддингтон Э.А., Левинсон Н.* – М., 1958.
3. *Лионс Ж.Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.Л.* – М., 1972.
4. *Aassila M.* Nonlinear boundary stabilization of an inhomogeneous and anisotropic thermoelasticity system / *Aassila M.* // Applied Math Letters. – 2000. – Vol. 13. – P. 71-76.
5. *Apolaya R.F.* On a nonlinear coupled system with internal damping / *Apolaya R.F., Clark H.R., Feitosa A.J.* // Electronic Journal of Differential Equations. – 2000. – Vol. 2000, №. 64. – P. 1-17.

6. *Clark H.R.* On a mixed problem for a linear coupled system with variable coefficients / *Clark H.R., San Gil Jutuca L.P., Milla Miranda M.* // Electronic Journal of Differential Equations. – 1998. – Vol. 1998, №. 04. – P. 1-20.
7. *Clark M.R.* On a mixed problem for a coupled nonlinear system / *Clark M.R., Lima O.A.* // Electronic Journal of Differential Equations. – 1997. – Vol. 1997, №. 06. – P. 1-11.
8. *Komornik V.* A direct method for boundary stabilization of the wave equation / *Komornik V., Zuazua E.* // J. Math. Pure et Appl. – 1990. – №. 69. – P. 33-54.
9. *Medeiros L.A.* On a boundary value problem for wave equations: existence, uniqueness-asymptotic behavior / *Medeiros L.A., Milla Miranda M.* // Revista de Matematicas Aplicadas, Universidade de Chile. – 1996. – №17. – P. 47-73.
10. *Munoz Rivera J.E.* Stability in inhomogeneous and anisotropic thermoelasticity / *Munoz Rivera J.E., Oliveira M.L.* // Bellotino U. M. I. – 1997. – Vol. 7, №11-A. – P. 115-127.
11. *Nechepurenko M.O.* The mixed problem for a nonlinear coupled evolution system in a bounded domain / *Nechepurenko M.O.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 207-223.
12. *Nechepurenko M.O.* Mixed problem for a nonlinear coupled system in unbounded domains / *Nechepurenko M. O.* // Mat. studii.– 2009. – Vol. 32, №1. – P. 33-44.
13. *Нечепуренко М.О.* О существовании обобщенного решения нелинейной эволюционной системы уравнений в неограниченной по времени области / *Нечепуренко М.О., Торган Г.Р.* // Укр. мат. вісн. – 2010. – Т. 7, №1. – С. 49–72.
14. *Нечепуренко М.О.* Мішана задача для нелінійної гіперболічно-параболічної системи рівнянь в необмеженій області / *Нечепуренко М.О.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С.156-174.
15. *Nechepurenko M.O.* On a boundary value problem for nonlinear evolution system with variable coefficients in a bounded domain / *Nechepurenko M.O.* // Вісник Одеського ун-ту. – 2010 (прийнято до друку).
16. *Pohozhaev S.I.* On a class of quasilinear hyperbolic equations / *Pohozhaev S.I.* // Мат. сборник. – 1975. – Т. 96, №138. – С. 152-166.

MIXED PROBLEM FOR A STRONG NONLINEAR EVOLUTION SYSTEM IN AN UNBOUNDED DOMAIN

Maksym NECHEPURENKO, Halyna TORHAN

Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: m.nechepurenko@nasta.com.ua, torgan_g@yahoo.com

A nonlinear coupled evolutions system in an unbounded domain is considered. Sufficient conditions for the existence and uniqueness of the solution of the system were obtained without any restriction on the infinity.

Key words: nonlinear system, mixed problem.

СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНОЙ ЭВОЛЮЦИОННОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ В НЕОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

Максим НЕЧЕПУРЕНКО, Галина ТОРГАН

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: m.nechepurenko@nasta.com.ua, torgan_g@yahoo.com

Рассмотрено нелинейную связную эволюционную систему в неограниченной области. Получено достаточные условия существования и единственности решения этой системы без ограничений на бесконечности.

Ключевые слова: нелинейная система, смешанная задача.

Стаття надійшла до редколегії 16.04.2010

Прийнята до друку 22.12.2010