ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2010.
Вип. 72. С. 189–194

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2010.
Is. 72. P. 189–194

УДК 517.53

ПРО ПОВОДЖЕНЯ НУЛІВ ЧАСТКОВИХ СУМ СТЕПЕНЕВОГО РОЗВИНЕННЯ ЦІЛОЇ ФУНКЦІЇ В ТЕРМІНАХ КЛАСІВ ЗБІЖНОСТІ

Оксана МУЛЯВА[1], Мирослав ШЕРЕМЕТА[2]

[1]*Київський національний університет харчових технологій,
01004 Київ, вул. Володимирівська, 68
e-mail: info@nuft.edu.ua*
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru*

Для цілої функції $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ з нулем a кратності m нехай (z_n) – послідовність нулів часткових сум $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k z^k$, яка прямує до a. У термінах класів збіжності описано швидкість прямування $|z_n - a|$ до 0.

Ключові слова: ціла функція, часткова сума, нулі, клас збіжності.

1. Вступ. Нехай
$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k z^k \tag{1}$$
– ціла трансцендентна функція, $a \neq 0$ – її нуль кратності m, а (z_n) – збіжна до a послідовність нулів часткових сум $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k z^k$, тобто $S_n(z_n) = 0$ і $z_n \to a$ $(n \to \infty)$.

Є. Нечюшкіте і Ш. Стреліц [1] довели таке: якщо f – ціла функція скінченного порядку $\rho[f]$, то $\varlimsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{n \ln n}{-\ln|z_n - a|} = m\rho[f]$.

У термінах узагальнених порядків поводження $|z_n - a|$ вивчали Л.Я. Микитюк та М.М. Шеремета [2]. Щоб сформулювати їхній результат, через L позначимо клас додатних неперервних зростаючих до $+\infty$ на $[x_0, +\infty)$ функцій α (вважатимемо, що $\alpha(x) = \alpha(x_0)$ на $(-\infty, x_0]$) і говоритимемо, що $\alpha \in L^0$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha((1 + o(1))x) = (1 + o(1))\alpha(x)$ при $x \to +\infty$. Нарешті, $\alpha \in L_{pz}$, якщо $\alpha \in L$ і $\alpha(cx) \sim \alpha(x)$ при

$x \to +\infty$ для кожного $c \in (0, +\infty)$, тобто α – повільно зростаюча функція. Зрозуміло, що $L_{pz} \subset L^0 \subset L$. Нехай $M_f(r) = \max\{|f(z)| : |z| = r\}$, $\alpha \in L$ і $\beta \in L$. Узагальненим порядком цілої функції f називається [3] величина $\rho_{\alpha\beta}[f] = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\alpha(\ln M_f(r))}{\beta(\ln r)}$. В [2] доведено таку теорему.

Теорема 0. *Нехай $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ – неперервно диференційовні функції, $B(x; c) = \beta^{-1}(c\alpha(x))$, $0 < c < +\infty$. Припустимо, що виконується одна з умов:*

а) $\alpha \in L^0$, $\beta(\ln x) \in L^0$ і $xB'(x; c) \to \dfrac{1}{\rho}$ $(x \to +\infty)$ для кожного $c \in (0, +\infty)$;

б) $\alpha \in L_{pz}$, $\beta(\ln x) \in L_{pz}$ і $xB'(x; c) = O(1)$ $(x \to +\infty)$ для кожного $c \in (0, +\infty)$. Тоді

$$\rho_{\alpha\beta}(f) = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\alpha(n/\rho)}{\beta\left(\dfrac{1}{\rho} + \ln|a| + \dfrac{m}{n}\ln\dfrac{1}{|z_{n+m-1} - a|}\right)}.$$

Якщо $\alpha(x) \equiv \ln x$ і $\beta(x) \equiv x$ для $x \geq e$, то з теореми 0 отримаємо формулу, доведену в [1], якщо виберемо $\alpha(x) \equiv x$ $(x > 0)$, $\beta(x) = e^{\rho x}$, то для величини типу $\sigma[f]$ функції f з цієї ж теореми одержимо рівність $\sigma[f] = \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \dfrac{n}{e\rho|a|^\rho}|z_{n+m-1} - a|^{m\rho/n}$. Зрештою, в [4] поводження $|z_n - a|$ вивчено у термінах логарифмічних порядку $\rho_l[f]$ і типу $\tau_l[f]$, які означаються формулами $\rho_l[f] = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln r}$ і
$\tau_l[f] = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ln M_f(r)}{(\ln r)^{\rho_l}}$. За умови $1 < \rho_l[f] < +\infty$ доведено, що

$$\rho_l[f] = \overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{\ln n}{\ln\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{|z_n - a|}\right)} + 1$$

і $\tau_l[f] = (\rho_l - 1)^{\rho_l - 1}\rho_l^{\rho_l} m^{1-\rho_l} \overline{\lim\limits_{n\to\infty}} n^{\rho_l}(\ln(1/|z_n - a|))^{1-\rho_l}$.

Мета нашої праці – дослідити поводження $|z_n - a|$ у термінах того чи іншого класу збіжності.

2. Валіронів клас збіжності. За Ж. Валіроном [5] ціла функція порядку $\rho[f] = \rho \in (0, \infty)$ належить до класу збіжності, якщо $\int\limits_1^\infty \dfrac{\ln M_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty$. Правильна така теорема.

Теорема 1. *Якщо ціла функція f належить до валіронового класу збіжності, то*

$$\sum_{n=1}^{\infty} |z_{n+m-1} - a|^{m\rho/n} < +\infty. \tag{2}$$

Для доведення цієї теореми нам потрібні такі дві леми.

Лема 1. [5] *Якщо ціла функція (1) належить до валіронового класу збіжності, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |f_k|^{\rho/k} < +\infty$.*

Лема 2. *Нехай ціла функція f задана рядом (1), $(c_k^{(j)})_{k=1}^{\infty}$ – обмежені послідовності комплексних чисел, $1 \le j \le m$, а*

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} g_k z^k \quad (g_k = f_k + c_k^{(1)} f_{k+1} + \ldots + c_k^{(m)} f_{k+m}).$$

Тоді g – ціла функція і належить до валіронового класу збіжності, якщо і тільки якщо f належить до цього класу.

Справді, нехай $\mu_f(r) = \max\{|f_k|r^k : k \ge 0\}$ – максимальний член степеневого ряду (1). Тоді з огляду на нерівність Коші для будь-якого $\varepsilon > 0$ і всіх $r > 0$

$$\mu_f(r) \le M_f(r) \le \sum_{k=0}^{\infty} |f_k| r^k = \sum_{k=0}^{\infty} |f_k|((1+\varepsilon)r)^k (1+\varepsilon)^{-k} \le \mu_f((1+\varepsilon)r)\frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}. \quad (3)$$

Звідси випливає, що f належить до валіронового класу збіжності тоді і тільки тоді, коли $\int\limits_1^{\infty} \frac{\ln \mu_f(r)}{r^{\rho+1}} dr < +\infty$. З іншого боку, оскільки $|c_k^{(j)}| \le K < +\infty$ для всіх $k \ge 1$ і $1 \le j \le m$, то (див. [2], [4]) для всіх $r > 1$

$$\mu_f(r)\left(1 - \frac{K}{r-1}\right) \le \mu_g(r) \le \mu_f(r)\left(1 + \frac{K}{r-1}\right), \quad (4)$$

тобто $\ln \mu_g(r) = \ln \mu_f(r) + o(1)$, $r \to \infty$, і отже, функції g і f належать чи не належать до валіронового класу збіжності одночасно.

Доведення теореми 1. Оскільки f має нуль a кратності m, то $f(z) = (z-a)^m \varphi(z)$, де $\varphi(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \varphi_k z^k$ – ціла трансцендентна функція і $\varphi(a) \ne 0$. Легко побачити, що $\ln M_f(r) = \ln M_\varphi(r) + O(\ln r)$, $r \to +\infty$. Тому функції f і φ належать чи не належать до валіронового класу збіжності одночасно.

Як і в [2] та [4], неважко перевірити, що

$$S_n(z) = (z-a)^m \sum_{k=0}^{n} \varphi_k z^k - \varphi_n z^{n+m} - \varphi_{n-1} z^{n+m-1} - \ldots - \varphi_{n-m+1} z^{n+1} +$$
$$+\varphi_n C_m^1 a z^{n+m-1} + \varphi_{n-1} C_m^1 a z^{n+m-2} + \ldots + \varphi_{n-m+2} C_m^1 a z^{n+1} + \ldots +$$
$$+(-1)^m C_m^{m-1} \varphi_n z^{n+1} a^{m-1} = (z-a)^m \sum_{k=0}^{n} \varphi_k z^k - \varphi_{n-m+1} z^{n+1} +$$
$$+\varphi_{n-m+2}(C_m^1 a z^{n+1} - z^{n+2}) + \ldots + \varphi_n((-1)^m C_m^{m-1} z^{n+1} a^{m-1} + \ldots + C_m^1 a z^{n+m-1} - z^{n+m})$$

і, оскільки $S_n(z_n) = 0$, то

$$(z_n - a)^m \sum_{k=0}^{n} \varphi_k z_n^k = z_n^{n+1}(\varphi_{n-m+1} + (-C_m^1 a + z_n)\varphi_{n-m+2} +$$
$$+((-1)^{m+1} C_m^{m-1} a^{m-1} + \ldots + (-1) C_m^1 a z_n^{m-2} + z_n^{m-1})\varphi_n),$$

тобто

$$(z_{n+m-1} - a)^m \sum_{k=0}^{n+m-1} \varphi_k z_{n+m-1}^k = z_{n+m-1}^{n+m} g_n, \quad (5)$$

де

$$g_n = \varphi_n + (-C_m^1 a + z_{n+m-1})\varphi_{n+1} + \ldots +$$
$$+((-1)^{m+1}C_m^{m-1}a^{m-1} + \ldots + (-1)C_m^1 a z_{n+m-1}^{m-2} + z_{n+m-1}^{m-1})\varphi_{n+m-1}.$$

За лемою 2 з φ_n замість f_n ціла функція з коефіцієнтами g_n належить до валіронового класу збіжності тоді і тільки тоді, коли до цього класу належить функція φ і, отже, функція f. Тому за лемою 1 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |g_n|^{\rho/n} < +\infty$.

Оскільки $z_n \to a$ і $\sum\limits_{k=0}^{n} \varphi_k z_n^k \to \varphi(a) \neq 0$ при $n \to \infty$, то з (5) маємо

$$|g_n| = |z_{n+m-1}|^{-(n+m)}|z_{n+m-1} - a|^m \left|\sum_{k=0}^{n+m-1} \alpha_k z_{n+m-1}^k\right| = \frac{1+o(1)}{|a|^{n+m}}|z_{n+m-1} - a|^m,$$

$n \to \infty$, тобто $|g_n|^{1/n} = \dfrac{1+o(1)}{|a|}|z_{n+m-1} - a|^{m/n}, \quad n \to \infty$, і отже, правильне співвідношення (2). Теорему 1 доведено. $\square$

3. Узагальнений клас збіжності. Для $\alpha \in L$ і $\beta \in L$ будемо говорити, що ціла функція f належить до (узагальненого) $\alpha\beta$-класу збіжності, якщо $\int\limits_{r_0}^{\infty} \dfrac{\alpha(\ln M_f(r))}{r\beta(\ln r)}dr < +\infty$. З теореми 2 зі статті [6] випливає така лема.

Лема 3. *Нехай α – ввігнута на $[x_0, +\infty)$ функція і $\alpha(e^x) \in L^0$, а функція $\beta \in L^0$ задовольняє умови $\dfrac{x\beta'(x)}{\beta(x)} \geq h > 0$ $(x \geq x_0)$ і $\int\limits_{x_0}^{\infty} \dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}dx < +\infty$. Якщо ціла функція f належить до $\alpha\beta$-класу збіжності, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha(n) - \alpha(n-1))B\left(\dfrac{1}{n}\ln\dfrac{1}{|f_n|}\right) < +\infty$.*

Використовуючи цю лему і наведені вище міркування, неважко довести таку теорему.

Теорема 2. *Нехай функції α і β такі, як у лемі 3. Якщо ціла функція f належить до $\alpha\beta$-класу збіжності, то $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (\alpha(n) - \alpha(n-1))B(\frac{m}{n}\ln\dfrac{1}{|z_{n+m-1} - a|}) < +\infty$.*

Доведення. З (3) за умов $\alpha \in L^0$ і $\beta \in L^0$ легко випливає, що f належить до $\alpha\beta$-класу збіжності тоді і тільки тоді, коли $\int\limits_{r_0}^{\infty} \dfrac{\alpha(\ln \mu_f(r))}{r\beta(\ln r)}dr < +\infty$, тому з (4) отримуємо, що f і функція g з леми 2 належать чи не належать до $\alpha\beta$-класу збіжності одночасно. Оскільки $\ln r = o(\ln M_f(r))$ і $\ln M_f(r) = \ln M_\varphi(r) + O(\ln r)$ при $r \to +\infty$, то функції φ і f належать чи не належать до $\alpha\beta$-класу збіжності одночасно. Звідси, як у доведенні теореми 1, випливає, що функція g з коефіцієтами g_n, які визначаються рівністю (5), належить до $\alpha\beta$-класу збіжності і, отже, за лемою 3

$$\sum_{n=1}^{\infty}(\alpha(n) - \alpha(n-1))B\left(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|g_n|}\right) < +\infty. \tag{6}$$

Проте з (5), як у доведенні теореми 1, випливає, що

$$\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|g_n|} = \frac{m}{n}\ln\frac{1}{|z_{n+m-1} - a|} + \ln|a| + o(1), \quad n \to \infty. \tag{7}$$

Неважко показати, що з умови $\beta \in L^0$ випливає, що $B((1+o(1))x) = (1+o(1))B(x)$ при $x \to +\infty$. Тому з (6) і (7) отримуємо потрібне співвідношення. Теорему 2 доведено. $\square$

Для цілих функцій скінченного логарифмічного порядку $p[f] = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln\ln r}$ логарифмічний клас збіжності вводиться [6] за допомогою умови $\int\limits_e^\infty \frac{\ln M_f(r)}{r\ln^{p+1} r}dr < +\infty$, $p > 1$. Функції $\alpha(x) \equiv x$ і $\beta(x) \equiv x^{p+1}$ не задовольняють умови теореми 2, тобто застосувати цю теорему не можна. Проте правильний такий результат.

Теорема 3. *Якщо ціла функція f належить до логарифмічного класу збіжності, то* $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|z_n-a|})^{1-p} < +\infty$.

Доведення цієї теореми таке ж, як і теорем 1 та 2, і ґрунтується на такому: якщо ціла функція f належить до логарифмічного класу збіжності, то за теоремою 4 із [6] $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n}\ln\frac{1}{|f_n|})^{1-p} < +\infty$.

1. *Нечюшките Э.* О скорости стремления к пределу нулей частичных сумм ряда Тейлора целой функции / *Нечюшките Э., Стрелиц Ш.* // Литовск. матем. сб. – 1961. – Т. 1-2. – С.181-185.
2. *Микитюк Л.Я.* Про нулі часткових сум тейлорового розвинення цілої функції / *Микитюк Л.Я., Шеремета М.М.* // Доп. НАН України. – 2003. – №6. – С. 16-20.
3. *Шеремета М.М.* О связи между ростом максимума модуля целой функции и модулями коэффициентов её степенного разложения / *Шеремета М.М.* // Изв. вузов. Матем. – 1961. – №2. – С. 100-108.
4. *Микитюк Л.Я.* Про нулі часткових сум тейлорового розвинення цілої функції скінченного логарифмічного порядку / *Микитюк Л.Я.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 62. – С. 85-88.
5. *Valiron G.* General theory of integral functions / *Valiron G.* Toulouse, 1923.
6. *Мулява О.М.* Класи збіжності в теорії рядів Діріхле / *Мулява О.М.* // Доп. НАН України. – 1999. – №3. – С. 35-39.

ON THE BEHAVIOUR OF PARTIAL SUMS ZEROS OF THE POWER DEVELOPMENT OF AN ENTIRE FUNCTION IN THE TERMS OF CONVERGENCE CLASSES

Oksana MULYAVA[1], Myroslav SHEREMETA[2]

[1]*Kyiv National University of Food Texnology,*
01004 Kyiv, Volodymyrska Str., 68
e-mail: info@nuft.edu.ua
[2]*Ivan Franko National University of L'viv,*
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru

For an entire function $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ with a zero a of a multiplicity m let (z_n) be a sequence tending to a of zeros of partial sums $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k z^k$. Rate of the tendency $|z_n - a|$ to 0 is described in the terms of convergence classes.

Key words: entire function, partial sum, zeros, convergence class.

О ПОВЕДЕНИИ НУЛЕЙ ЧАСТИЧНЫХ СУММ СТЕПЕННОГО РАЗЛОЖЕНИЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ В ТЕРМИНАХ КЛАССОВ СХОДИМОСТИ

Оксана МУЛЯВА[1], Мирослав ШЕРЕМЕТА[2]

[1]*Киевский национальный университет пищевых технологий,*
01004 Киев, ул. Владимирская, 68
e-mail: info@nuft.edu.ua
[2]*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru

Для целой функции $f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} f_k z^k$ с нулем a кратности m пусть (z_n) – стремящаяся к a последовательность нулей частичных сумм $S_n(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} f_k z^k$. В терминах классов сходимости описана скорость стремления $|z_n - a|$ к 0.

Ключевые слова: целая функция, частичная сумма, нули, класс сходимости.

Стаття надійшла до редколегії 22.01.2010

Прийнята до друку 22.12.2010