ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2010.
Вип. 72. С. 168–188

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2010.
Is. 72. P. 168–188

УДК 517.4

ДИФЕРЕНЦІАЛЬНІ ОПЕРАТОРИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКУ З УЗАГАЛЬНЕНИМИ ФУНКЦІЯМИ В КОЕФІЦІЄНТАХ

Степан МАНЬКО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: s_manko@franko.lviv.ua

В [1] автори дали відповідь на питання про трактування оператора Шредінґера з $\alpha\delta'(x)$-потенціалом, де $\delta(x)$ – функція Дірака. У цій праці результати [1] перенесено на випадок диференціального оператора четвертого порядку з коефіцієнтом $\alpha\delta'''(x)$. Досліджено асимптотичну поведінку сім'ї операторів з гладкими коефіцієнтами, що апроксимують сингулярний доданок. Отримано граничний оператор. Його вибір обумовлений асимптотикою спектра та власних просторів операторів, які регуляризують диференціальний оператор з коефіцієнтом-розподілом. Проблема трактування оператора з узагальненими функціями в коефіцієнтах має приховані параметри, тому її розв'язок залежить від способу апроксимації похідної функції Дірака та числового множника α при цій похідній.

Ключові слова: диференціальний оператор, асимптотика, спектр, резонансна множина.

1. Вступ та формулювання задачі. У багатьох галузях природознавства, зокрема в атомній фізиці, акустиці, фізиці твердих станів, аеродинаміці, механіці рідин, аероакустиці [2]-[6], виникають диференціальні оператори з негладкими коефіцієнтами. Важливе завдання теорії диференціальних рівнянь – визначити мінімальну гладкість коефіцієнтів рівняння, при якій існують розв'язки. Часто можна натрапити на моделі, де з'являються рівняння з узагальненими функціями в коефіцієнтах. Проте немає лінійної теорії диференціальних рівнянь з коефіцієнтами-розподілами, позаяк простір узагальнених функцій $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$ не є алгеброю: у цьому просторі не можна ввести множення, яке б успадковувало основні властивості поточкового множення неперервних функцій.

Хоча деякі диференціальні рівняння з узагальненими функціями в коефіцієнтах можна розв'язати в просторі узагальнених функцій, проте більшість з них не мають розв'язків у жодному сенсі. Щоб надати зміст таким моделям, можна регуляризувати коефіцієнти диференціального оператора, отримавши у цьому разі сім'ю диференціальних рівнянь з гладкими коефіцієнтами та сім'ю відповідних гладких розв'язків. Далі вивчають граничну поведінку цих сімей при різних регуляризаціях, коли параметр регуляризації прямує до нуля. Залежно від порядку сингулярності коефіцієнтів оператора можливі, наприклад, такі ситуації: послідовності розв'язків збігаються в просторі розподілів до однієї границі при всіх регуляризаціях; послідовності розв'язків збігаються в $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^n)$, проте границя залежить від способу регуляризації коефіцієнтів. Саме така ситуація, в якій гранична модель залежить від способу регуляризації, виникає в цій роботі.

Багато моделей природознавства передбачають "самоспряженість": оператори, що їх описують, повинні бути самоспряженими в деяких гільбертових просторах. Нехай диференціальний оператор S, який відповідає такій моделі, містить узагальнені функції в коефіцієнтах із носіями, зосередженими в одній точці $x = 0$. Для надання змісту формальному оператору S можна застосувати метод регуляризації, проте можливий інший спосіб. Спочатку отримують симетричний оператор S_0 шляхом звуження оператора S на множину функцій, що занулюються в початку координат разом зі своїми похідними. Далі розглядають всі самоспряжені розширення оператора S_0 й одне з них приймають за означення оператора S. Цей підхід вперше застосували Ф. Березін та Л. Фадеєв [7] для моделей квантової механіки. Якщо оператор S_0 має індекси дефекту (k, k), то сім'я всіх самоспряжених розширень цього оператора є k^2-параметричною. Виникає питання про вибір одного з розширень, яке адекватно описує модель. В таких випадках треба застосовувати метод регуляризації та асимптотичні методи.

1.1. Формулювання задачі. Ми розглянемо проблему надання строгого змісту диференціальному оператору четвертого порядку, що містить третю похідну від функції Дірака та перенесемо на цей випадок результати праць [1], [8]. У цих працях досліджено питання про надання строгого сенсу формальному оператору $H_\alpha = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\delta'(x)$, де $\delta(x)$ – функція Дірака, $\alpha \in \mathbb{R}$, та показано, що на нього немає однозначної відповіді. Причиною є прихований параметр моделі – профіль потенціалу локальної дії. Проте можна відповісти на запитання, яка з точних моделей адекватно описує рух квантово-механічної частинки в регуляризованому потенціалі $\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, який апроксимує потенціал $\alpha\delta'(x)$. Для сім'ї самоспряжених операторів $\mathcal{H}_\varepsilon(\alpha, \Psi) = -\frac{d^2}{dx^2} + \alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$ доведено, що майже для всіх *сталих зв'язку* $\alpha \in \mathbb{R}$ граничний оператор $\mathcal{H}(\alpha, \Psi)$ є прямою сумою операторів другого диференціювання з умовами Діріхле в нулі. Коли ж α належить до дискретної *резонансної множини* Σ_Ψ, яка є спектром задачі зі знакозмінною ваговою функцією Ψ, то $\mathcal{H}(\alpha, \Psi)$ є оператором другого диференціювання на всій числовій осі з нетривіальними умовами спряження в початку координат, і ці умови визначають за допомогою профіля збурення. Вперше ефект резонансу для різних кусково-сталих профілів Ψ виявили в працях О. В. Золотарюка та ін. [9], [10].

Ми розглядаємо питання про трактування формального оператора

$$S_\alpha = \frac{d^4}{dx^4} + V(x) + \alpha\delta'''(x),$$

де $V \in C^\infty(a,b)$, a, b – числа різних знаків. Нехай функція g гладка, тоді добуток $g(x)\delta'''(x)$ можна визначити за формулою

$$g(x)\delta'''(x) = \sum_{i=0}^{3}(-1)^i C_3^i g^{(i)}(0)\delta^{(3-i)}(x),$$

де C_3^i – біноміальні коефіцієнти. Справді, для фінітних φ матимемо

$$\Big\langle g(x)\delta'''(x), \varphi(x)\Big\rangle = -\Big\langle \delta(x), \big(g(x)\varphi(x)\big)'''\Big\rangle = -\Big\langle \delta(x), \sum_{i=0}^{3} C_3^i g^{(i)}(x)\varphi^{(3-i)}(x)\Big\rangle =$$

$$= -\sum_{i=0}^{3} C_3^i g^{(i)}(0)\varphi^{(3-i)}(0) = \Big\langle \sum_{i=0}^{3}(-1)^i C_3^i g^{(i)}(0)\delta^{(3-i)}(x), \varphi(x)\Big\rangle.$$

Звідси видно, що добуток $g(x)\delta'''(x)$ коректно визначений у просторі розподілів для функцій, які є тричі неперервно диференційовані в нулі. Тому розв'язок рівняння $S_\alpha u = \lambda u$ шукатимемо в $C^3(a,b)$. Перепишемо рівняння у вигляді

$$u'''' - \lambda u = -u(0)\delta'''(x) + 3u'(0)\delta''(x) - 3u''(0)\delta'(x) + u'''(0)\delta(x).$$

Зважаючи на те, що ліва частина цієї рівності є регулярною узагальненою функцією, отримуємо $u(0) = u'(0) = u''(0) = u'''(0) = 0$. Отже, рівняння $S_\alpha u = \lambda u$ має лише нульовий розв'язок у просторі розподілів при $\alpha \neq 0$.

Спершу введемо сім'ю операторів з гладкими коефіцієнтами, які апроксимують сингулярний доданок $\alpha\delta'''(x)$, далі вивчатимемо асимптотичну поведінку спектра та власних функцій цієї сім'ї. Введемо множину $\mathcal{M} = \{f \in C_0^\infty(\mathbb{R})\colon \operatorname{supp} f = [-1,1]\}$ та розглянемо сім'ю операторів

$$\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi) = \frac{d^4}{dx^4} + V(x) + \alpha\varepsilon^{-4}\Psi(\varepsilon^{-1}x),$$
$$\mathcal{D}(\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)) = \{f \in W_2^4(a,b) \ : \ f(a) = f'(a) = 0, \ \ f(b) = f'(b) = 0\}.$$

Тут ε – малий додатний параметр, та Ψ – нетривіальна функція з множини $\mathcal{M}$. Функцію Ψ називатимемо *профілем* локального збурення. Для деяких профілів з $\mathcal{M}$ послідовність $\varepsilon^{-4}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$ збігається до $\delta'''(x)$ в топології розподілів.

Ми кожній парі $(\alpha,\Psi) \in \mathbb{R}\times\mathcal{M}$ поставили у відповідність граничний оператор $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$, що залежить від профіля локального збурення Ψ та *сталої зв'язку* α. Вибір $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$ ґрунтуємо на близькості його власних значень та власних функцій до власних значень і власних функцій операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$ при малих значеннях параметра ε. Крім того, ми доводимо збіжність власних значень і власних функцій операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$ до власних значень і власних функцій граничного оператора $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$.

1.2. Структура статті. У розділі 2 досліджено поведінку спектра сім'ї збурених операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$. Доведено, що всі власні значення є неперервними та обмеженими зверху функціями малого параметра ε. Спектр цієї сім'ї операторів, загалом, необмежений знизу. Для багатьох профілів Ψ та достатньо великих $|\alpha|$ існує скінченна кількість власних значень, які прямують до $-\infty$ при $\varepsilon \to 0$. Множину власних значень $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$, які при $\varepsilon \to 0$ залишаються обмеженими знизу, ми називатимемо *скінченним спектром* сім'ї операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$.

У розділі 3 побудовано головні члени асимптотичних розвинень власних значень скінченного спектра та відповідних власних функцій. На формальному рівні отримано граничні оператори $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$. Введено спектральну характеристику профіля Ψ, а саме, резонансну множину Σ_Ψ, яка є спектром задачі

$$w^{(4)}+\alpha\Psi w=0,\quad \xi\in(-1,1),\qquad w''(-1)=w'''(-1)=0,\quad w''(1)=w'''(1)=0$$

стосовно спектрального параметра α. Якщо α не належить до резонансної множини, то називатимемо α нерезонансною сталою зв'язку (*випадок відсутності резонансу*), в протилежному випадку – резонансною (*випадок резонансу*). Якщо стала зв'язку α є простим власним значенням цієї задачі, а відповідна власна функція задовольняє умови $w'_\alpha(-1)\neq 0$ та $w'_\alpha(1)\neq 0$, то таку ситуацію називатимемо *випадком невиродженого резонансу.* У випадку невиродженого резонансу вводять відношення $\theta_\Psi(\alpha)=w'_\alpha(1)/w'_\alpha(-1)$. Якщо стала зв'язку α – нерезонансна, то $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$ є прямою сумою операторів Діріхле на інтервалах $(a,0)$ та $(0,b)$, відповідно. У випадку невиродженого резонансу $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$ є оператором $\frac{d^4}{dx^4}+V(x)$ з областю визначення

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(\mathcal{S}(\alpha,\Psi))=\{f\in W_2^4((a,b)\setminus 0)\ :\ f(a)=f'(a)=f(b)=f'(b)=0,\ \ f(0)=0,\\ f'(+0)-\theta_\Psi(\alpha)f'(-0)=0,\quad \theta_\Psi(\alpha)f''(+0)-f''(-0)=0\}.\end{aligned}$$

У розділі 4 побудовано коректори асимптотичних розвинень власних значень і власних функцій операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$, бо головних членів недостатньо, щоб обґрунтувати формальні асимптотики. Тут розглянуто лише два випадки: $\alpha\notin\Sigma_\Psi$ та випадок загального положення. Саме для цих випадків будуть доведені апроксимаційні теореми.

Розділ 5 містить головний результат статті. Тут доведено збіжність власних значень скінченного спектра операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$ до власних значень оператора $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$, а також збіжність в $L_2(a,b)$ відповідних власних підпросторів.

У розділі 6 виписано граничний оператор у випадку виродженого резонансу.

2. Спектральні властивості операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$. Елемент Ψ множини $\mathcal{M}$ називатимемо $\delta^{(n)}$*-подібним профілем*, якщо

$$\varepsilon^{-(n+1)}\Psi(\varepsilon^{-1}x)\to\delta^{(n)}(x)\quad\text{при}\quad\varepsilon\to 0$$

в топології $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Введемо моменти функції $\langle f\rangle_k=(k!)^{-1}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^k f(\xi)\,d\xi$.

Лема 1. *Послідовність $\varepsilon^{-(n+1)}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$, де $\Psi\in\mathcal{M}$, збігається при $\varepsilon\to 0$ до $\delta^{(n)}(x)$ в топології $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ тоді й лише тоді, коли $\langle\Psi\rangle_j=0$ при $j=0,\dots,n-1$ та $\langle\Psi\rangle_n=(-1)^n$.*

Доведення. Для всіх $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$ при $\varepsilon\to 0$ матимемо

$$\big(\varepsilon^{-(n+1)}\Psi(\varepsilon^{-1}x),\varphi\big)=\varepsilon^{-(n+1)}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\Psi(\varepsilon^{-1}x)\varphi(x)\,dx=\varepsilon^{-n}\int_{-1}^{1}\Psi(\xi)\varphi(\varepsilon\xi)\,d\xi=$$

$$=\varepsilon^{-n}\int_{-1}^{1}\Psi(\xi)\big(\varphi(0)+\varepsilon\xi\varphi'(0)+\ldots+(n!)^{-1}\varepsilon^n\xi^n\varphi^{(n)}(0)+O(\varepsilon^{n+1})\big)\,d\xi=$$

$$=\varepsilon^{-n}\langle\Psi\rangle_0\varphi(0)+\varepsilon^{-n+1}\langle\Psi\rangle_1\varphi'(0)+\ldots+\langle\Psi\rangle_n\varphi^{(n)}(0)+O(\varepsilon).$$

Отже, послідовність функціоналів $\big(\varepsilon^{-(n+1)}\Psi(\varepsilon^{-1}x),\cdot\big)$ має скінченну границю $\big(\Psi_0,\cdot\big)$ тоді й лише тоді, коли $\langle\Psi\rangle_j=0$ для $j=0,\dots,n-1$. Зауважимо, що в цьому випадку граничний функціонал $\Psi_0=(-1)^n\langle\Psi\rangle_n\delta^{(n)}(x)$ є нетривіальним при $\langle\Psi\rangle_n\neq 0$. $\square$

Як наслідок цієї леми, одержимо опис множини всіх δ'''-подібних профілів локального збурення

$$\mathcal{M}_0=\{\Psi\in\mathcal{M}\ :\ \langle\Psi\rangle_j=0,\ \ j=0,1,2,\ \ \langle\Psi\rangle_3=-1\}.$$

Умова $\langle\Psi\rangle_0=0$ вимагає знакозмінності потенціалу Ψ. Зауважимо, що жоден профіль з $\mathcal{M}_0$ не може бути парним, бо тоді $\xi^3\Psi$ є непарною функцією, отже, $\langle\Psi\rangle_3=0$.

Перейдемо до опису спектральних властивостей сім'ї збурених операторів. Для кожного $\varepsilon>0$ спектр оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$ є дійсним і дискретним. Це є наслідком самоспряженості оператора та компактності його резольвенти. Нехай $\{\lambda_k^\varepsilon(\alpha,\Psi)\}_{k=1}^\infty$ – власні значення $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$, перенумеровані за зростанням із врахуванням кратності, а $\{u_\varepsilon^k(x;\alpha,\Psi)\}_{k=1}^\infty$ – ортонормована в $L_2(a,b)$ система власних функцій.

Теорема 1. *Для кожного набору* $(\alpha,\Psi)\in\mathbb{R}\times\mathcal{M}$ *власні значення* $\lambda_k^\varepsilon=\lambda_k^\varepsilon(\alpha,\Psi)$ *є неперервними функціями параметра* $\varepsilon\in(0,1)$, *обмеженими зверху при* $\varepsilon\to 0$. *Якщо* Ψ *– знакозмінна функція, а величина* $|\alpha|$ *достатньо велика, то спектр* $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$ *є необмеженим знизу, зокрема,* $\lambda_1^\varepsilon\leqslant -c\varepsilon^{-4}$ *для деякої додатної сталої* c. *Існує не більше, ніж скінченна кількість* $N(\alpha,\Psi)$ *власних значень, які збігаються до* $-\infty$ *при* $\varepsilon\to 0$.

Доведення. Зафіксуємо пару $(\alpha,\Psi)\in\mathbb{R}\times\mathcal{M}$ і приймемо $\Psi_\varepsilon(x)=\varepsilon^{-4}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$. Тоді квадратична форма

$$a_\varepsilon[u]=\int_a^b\big(|u''|^2+V(x)|u|^2+\alpha\Psi_\varepsilon(x)|u|^2\big)\,dx,\qquad u\in C_0^\infty(a,b),$$

утворює сім'ю одностайно неперервних стосовно $u\in\{v\in L_2(a,b)\colon\ \|v\|=1\}$ функцій змінної ε на $(0,1)$. За принципом мінімаксу [11, с. 343]

$$\lambda_k^\varepsilon=\inf_{E_k}\sup_{u\in E_k,\,\|u\|=1}a_\varepsilon[u],$$

де E_k – лінійний підпростір $C_0^\infty(a,b)$ вимірності k, а $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(a,b)$. Отже, всі λ_k^ε теж неперервно залежать від ε.

Виберемо k-вимірний підпростір E_k^* такий, що носії всіх його елементів не містять початку координат. Тоді

$$\lambda_k^\varepsilon\leqslant\sup_{u\in E_k^*,\,\|u\|=1}a_\varepsilon[u].$$

При достатньо малих ε звуження a_ε на E_k^* не залежатиме від ε, бо носії функцій Ψ_ε та $u\in E_k^*$ не перетинаються. Звідси отримуємо обмеженість власних значень зверху при $\varepsilon\to 0$.

Якщо функція Ψ є знакозмінною, то виберемо нормовану в $L_2(a,b)$ функцію $u\in C_0^\infty(a,b)$ таку, що $\operatorname{supp}u=[c,d]$ зосереджений в зоні, де Ψ від'ємна. Розглянемо послідовність $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-1/2}u(\varepsilon^{-1}x)$, $\|u_\varepsilon\| = 1$, а також припустимо, що $\alpha > 0$. Тоді

$$\lambda_1(\varepsilon,\alpha) = \inf_{u\in C_0^\infty(a,b),\,\|u\|=1} a_\varepsilon[u] \leqslant a_\varepsilon[u_\varepsilon] = \int\limits_{c\varepsilon}^{d\varepsilon} \Big(|u_\varepsilon''|^2 + V(x)|u_\varepsilon|^2 + \alpha\Psi_\varepsilon(x)|u_\varepsilon|^2\Big)\,dx =$$

$$=\varepsilon^{-4}\int\limits_c^d \Big(|u''(\xi)|^2 - \alpha|\Psi(\xi)||u(\xi)|^2\Big)\,d\xi + \int\limits_c^d V(\varepsilon\xi)|u(\xi)|^2\,d\xi.$$

Зрозуміло, що інтеграл, який містить V, обмежений. Приймемо

$$r = \int\limits_c^d |u''(\xi)|^2\,d\xi \cdot \Bigg(\int\limits_c^d |\Psi(\xi)||u(\xi)|^2\,d\xi\Bigg)^{-1}.$$

Тоді для $\alpha > r$ і деякого $c > 0$ виконується нерівність $\lambda_1(\varepsilon,\alpha) \leqslant -c\varepsilon^{-4}$. У випадку, коли $\alpha < 0$, у доведенні треба взяти функцію u з носієм, зосередженим на зоні, де функція Ψ є додатною.

Нехай $N_\varepsilon^-(\alpha,\Psi)$ – число від'ємних власних значень оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$ для фіксованого ε. Очевидно, що $N(\alpha,\Psi) \leqslant \limsup_{\varepsilon\to 0} N_\varepsilon^-(\alpha,\Psi)$. У випадку неперервного потенціалу виконується нерівність [12]

$$N_\varepsilon^-(\alpha,\Psi) \leqslant m + C|\alpha| \int\limits_a^b |x|^3\,|\Psi_\varepsilon(x)|\,dx, \tag{1}$$

де m та C – деякі сталі. Носій $\Psi_\varepsilon(\cdot)$ міститься в інтервалі $[-\varepsilon,\varepsilon]$, тому

$$\int\limits_a^b |x|^3\,|\Psi_\varepsilon(x)|\,dx = \varepsilon^{-4}\int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} |x|^3\,|\Psi(\varepsilon^{-1}x)|\,dx = \int\limits_{-1}^{1} |\xi|^3\,|\Psi(\xi)|\,d\xi \leqslant c(\Psi).$$

Отже, число $N(\alpha,\Psi)$ є скінченним $N(\alpha,\Psi) \leqslant m + c(\Psi)|\alpha|$. □

Отже, спектр $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$ розпадається на дві частини: множини власних значень, які прямують до $-\infty$, та множини обмежених при $\varepsilon\to 0$ власних значень.

3. Асимптотика скінченного спектра: головні члени. Диференціальний вираз $\frac{d^4}{dx^4} + V(x)$ надалі позначатимемо через L. Розглянемо спектральну задачу

$$\begin{cases} Lu_\varepsilon + \alpha\varepsilon^{-4}\Psi(\varepsilon^{-1}x)u_\varepsilon = \lambda^\varepsilon u_\varepsilon, & x\in(a,b),\\ u_\varepsilon(a) = u_\varepsilon'(a) = 0, \quad u_\varepsilon(b) = u_\varepsilon'(b) = 0. \end{cases} \tag{2}$$

Нехай $\lambda_k^\varepsilon(\alpha,\Psi)$ – обмежене при $\varepsilon\to 0$ власне значення задачі (2), яке ми позначатимемо через λ^ε, а відповідну йому власну функцію – через u_ε. Асимптотику будуватимемо у вигляді

$$\lambda^\varepsilon \sim \lambda + \varepsilon\lambda_1 + \varepsilon^2\lambda_2 + \cdots, \tag{3}$$

$$u_\varepsilon(x) \sim v(x) + \varepsilon\, v_1(x) + \varepsilon^2 v_2(x) + \ldots \quad \text{при} \quad x\in(a,-\varepsilon)\cup(\varepsilon,b), \tag{4}$$

$$u_\varepsilon(x) \sim \varepsilon w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2\, w_1(\varepsilon^{-1}x) + \cdots \quad \text{при} \quad x\in(-\varepsilon,\varepsilon). \tag{5}$$

Тут всі функції v, v_i визначені на $(a,b)\backslash\{0\}$, а функції w, w_i – на $(-1,1)$. Припускатимемо також, що v є відмінною від нуля. У точках $x=\pm\varepsilon$ ряди (4), (5) задовольняють умови спряження

$$\left[u_\varepsilon^{(j)}\right]_{x=-\varepsilon}=0,\quad \left[u_\varepsilon^{(j)}\right]_{x=\varepsilon}=0,\qquad j=0,\dots,3. \tag{6}$$

Тут $[g]_{x=c}=g(c+0)-g(c-0)$ – стрибок функції g в точці c.

Підставимо ряди (3)-(4) в рівняння (2). Звідси, зокрема, отримаємо

$$Lv=\lambda v,\qquad x\in(a,b)\setminus\{0\}, \tag{7}$$

$$Lv_1=\lambda v_1+\lambda_1 v,\qquad x\in(a,b)\setminus\{0\}. \tag{8}$$

Проведемо заміну $\xi=\varepsilon^{-1}x$ в рівнянні (2). Тоді воно набуде вигляду

$$\frac{1}{\varepsilon^4}\frac{d^4u_\varepsilon}{d\xi^4}(\varepsilon\xi)+V(\varepsilon\xi)u_\varepsilon(\varepsilon\xi)+\frac{\alpha}{\varepsilon^4}\Psi(\xi)u_\varepsilon(\varepsilon\xi)=\lambda^\varepsilon u_\varepsilon(\varepsilon\xi).$$

Підставляючи ряди (3), (5) в нових змінних у рівняння (2), отримуємо, що перші три функції в розвиненні (5), тобто w, w_1 та w_2, є розв'язками однорідного рівняння

$$y^{(4)}+\alpha\Psi(\xi)y=0,\qquad \xi\in(-1,1). \tag{9}$$

Після підстановки асимптотичних розвинень для власної функції в умови спряження (6), одержимо

$$\begin{aligned}
v(\pm\varepsilon)+\varepsilon\, v_1(\pm\varepsilon)+\cdots &\sim \varepsilon\, w(\pm1)+\varepsilon^2\, w_1(\pm1)+\cdots,\\
v'(\pm\varepsilon)+\varepsilon\, v_1'(\pm\varepsilon)+\cdots &\sim w'(\pm1)+\varepsilon\, w_1'(\pm1)+\varepsilon^2\, w_2'(\pm1)+\cdots,\\
v''(\pm\varepsilon)+\varepsilon\, v_1''(\pm\varepsilon)+\cdots &\sim \varepsilon^{-1}\, w''(\pm1)+w_1''(\pm1)+\varepsilon\, w_2''(\pm1)+\cdots,\\
v'''(\pm\varepsilon)+\varepsilon\, v_1'''(\pm\varepsilon)+\cdots &\sim \varepsilon^{-2}\, w'''(\pm1)+\varepsilon^{-1}\, w_1'''(\pm1)+w_2'''(\pm1)+\cdots.
\end{aligned}$$

Розвиваючи величини вигляду $v_j^{(k)}(\pm\varepsilon)$ в асимптотичні ряди Маклорена, отримаємо

$$v(-0)=0,\qquad v(+0)=0, \tag{10}$$

$$w''(\pm1)=0,\qquad w'''(\pm1)=0, \tag{11}$$

$$v'(-0)=w'(-1),\qquad v'(+0)=w'(1), \tag{12}$$

$$v_1(\pm0)\pm v'(\pm0)=w(\pm1),\qquad v_1'(\pm0)\pm v''(\pm0)=w_1'(\pm1), \tag{13}$$

$$w_1''(\pm1)=v''(\pm0),\qquad w_1'''(\pm1)=0, \tag{14}$$

$$w_2''(\pm1)=v_1''(\pm0)\pm v'''(\pm0),\qquad w_2'''(\pm1)=v'''(\pm0). \tag{15}$$

Отже, функція v на кожному з інтервалів $(a,0)$ та $(0,b)$ є розв'язком рівняння (7) та задовольняє умову $v(0)=0$, що випливає з (10). Функція ж w є розв'язком крайової задачі

$$w^{(4)}+\alpha\Psi w=0,\quad \xi\in(-1,1),\qquad w''(\pm1)=0,\quad w'''(\pm1)=0. \tag{16}$$

Крім того, обидві функції пов'язані умовами спряження (12). Побудова асимптотики залежатиме від того, чи має задача (16) нетривіальні розв'язки.

3.1. Резонансна множина. Задачу (16) можна трактувати як спектральну задачу з вагою Ψ стосовно спектрального параметра α. Загалом функція Ψ знакозмінна.

У цьому розділі вивчатимемо спектр цієї задачі та введемо дві спектральні характеристики профіля Ψ.

Теорема 2. *Для кожної функції $\Psi \in \mathcal{M}$ спектр задачі* (16) *є дійсним і дискретним, і, загалом, необмеженим в обидва боки.*

Доведення. Зважаючи на знакозмінність Ψ, спектр задачі (16) зручно досліджувати в просторах Крейна. Нехай $L^2_{|\Psi|}(-1,1)$ – ваговий простір зі скалярним добутком $(f,g) = \int_{-1}^{1} |\Psi| f \overline{g}\, d\xi$. Розглянемо в цьому просторі індефінітне множення $[f,g] = \int_{-1}^{1} \Psi f \overline{g}\, d\xi$. Пара $\mathcal{K} = \{L^2_{|\Psi|}(-1,1), [\cdot,\cdot]\}$ утворює простір Крейна [13, розд. 1].

У просторі $\mathcal{K}$ введемо оператор $\mathcal{T}_\Psi = \frac{1}{\Psi(\xi)} \frac{d^4}{d\xi^4}$ з областю визначення

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi) = \{f \in \mathcal{K}\colon \quad \Psi^{-1} f^{(4)} \in L^2_{|\Psi|}(-1,1), \quad f''(\pm 1) = 0, \quad f'''(\pm 1) = 0\}.$$

Задача (16) еквівалентна спектральному рівнянню $\mathcal{T}_\Psi w = -\alpha w$.

Кожен простір Крейна має канонічну симетрію, зокрема, простір $\mathcal{K}$ має канонічну симетрію $Jf = \operatorname{sgn}\Psi \cdot f$. З цією симетрією пов'язані означення J-самоспряжених і J-невід'ємних операторів. Оператор T називається J-самоспряженим, якщо оператор JT самоспряжений в $L^2_{|\Psi|}(-1,1)$, та J-невід'ємний, коли $[Tf,f] \geqslant 0$ для всіх f з області визначення T.

Доведемо, що для кожної функції $\Psi \in \mathcal{M}$ оператор $\mathcal{T}_\Psi$ є J-самоспряженим та J-невід'ємним. Справді,

$$(J\mathcal{T}_\Psi f, g) = \int_{-1}^{1} f^{(4)} \overline{g}\, d\xi = f'(1)\, \overline{g''(1)} - f'(-1)\, \overline{g''(-1)} - \\ - f(1)\, \overline{g'''(1)} + f(-1)\, \overline{g'''(-1)} + \int_{-1}^{1} f\, \overline{g^{(4)}}\, d\xi.$$

для кожного $f \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi)$. Рівність $(J\mathcal{T}_\Psi f, g) = (f, J\mathcal{T}_\Psi g)$ виконується тоді й лише тоді, коли $g \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi)$, що й означає самоспряженість оператора $J\mathcal{T}_\Psi$. Тому оператор $\mathcal{T}_\Psi$ є J-самоспряженим. З іншого боку, для всіх $f \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi)$ правильна нерівність

$$[\mathcal{T}_\Psi f, f] = \int_{-1}^{1} f^{(4)} \overline{f}\, d\xi = \int_{-1}^{1} |f''|^2\, d\xi \geqslant 0.$$

Отже, оператор $\mathcal{T}_\Psi$ J-невід'ємний. Якщо функція Ψ знакостала, то оператор $\mathcal{T}_\Psi$ самоспряжений в $L^2_{|\Psi|}(-1,1)$, тому його спектр дійсний. Нехай Ψ знакозмінна. Відомо, що кожен J-самоспряжений J-невід'ємний оператор з непорожньою резольвентною множиною має дійсний спектр [13, с. 138]. Покажемо, що резольвентна множина оператора $\mathcal{T}_\Psi$ непорожня. Однорідна задача

$$g^{(4)} + i\Psi g = 0, \quad \xi \in (-1,1), \qquad g''(\pm 1) = 0, \quad g'''(\pm 1) = 0 \tag{17}$$

має лише тривіальний розв'язок. Справді, кожен її розв'язок задовольняє рівність

$$\int_{-1}^{1} |g''|^2\, d\xi + i \int_{-1}^{1} \Psi\, |g|^2\, d\xi = 0.$$

Очевидно, що g є лінійною, бо Ψ дійсна. Проте з усіх лінійних функцій лише нульова є розв'язком рівняння (17). Тоді неоднорідна задача $g^{(4)} + i\Psi g = \Psi f$, $g''(\pm 1) = 0$, $g'''(\pm 1) = 0$ має єдиний розв'язок для кожної $f \in \mathcal{K}$ [14, с. 39], тобто число $-i$ належить до резольвентної множини оператора $\mathcal{T}_\Psi$. Тому $\sigma(\mathcal{T}_\Psi) \subset \mathbb{R}$.

Доведемо, що резольвента $\mathcal{R}(\mu)$ оператора $\mathcal{T}_\Psi$ компактна. Оператор $\mathcal{R}(\mu)$ діє з простору $\mathcal{K}$ в $\mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi)$ й кожному $f \in \mathcal{K}$ ставить у відповідність розв'язок рівняння $\mathcal{T}_\Psi g - \mu g = f$, яке можна переписати у вигляді

$$g^{(4)} - \mu \Psi g = \Psi f, \qquad g \in \mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi).$$

Права частина Ψf належить до $L_2(-1,1)$, бо $\|\Psi f\|_{L_2(-1,1)} \leqslant \max_{\mathbb{R}} |\Psi|^{1/2} \cdot \|f\|_{\mathcal{K}}$. Отже, розв'язок g є елементом простору $W_2^4(-1,1)$, що випливає з теорем про регулярність розв'язків еліптичної задачі. Компактність резольвенти випливає з ланцюжка вкладень

$$\mathcal{D}(\mathcal{T}_\Psi) \subset W_2^4(-1,1) \hookrightarrow L_2(-1,1) \subset \mathcal{K},$$

середнє з яких компактне. Отож, $\sigma(\mathcal{T}_\Psi) = \sigma_p(\mathcal{T}_\Psi)$. Необмеженість спектра в обидва боки є наслідком знакозмінності профіля [15]. $\square$

Спектр задачі (16) називатимемо *резонансною множиною* профіля Ψ та позначатимемо через Σ_Ψ. Очевидно, що $\Sigma_\Psi = \{\alpha \in \mathbb{R}\colon -\alpha \in \sigma(\mathcal{T}_\Psi)\}$. Розглянемо підмножину резонансної множини, що складається з тих власних значень α задачі (16), для яких виконуються умови

$$\alpha \text{ – \textit{просте власне значення задачі} } (16), \quad w'_\alpha(-1) w'_\alpha(1) \neq 0, \tag{18}$$

де w_α – власна функція, що відповідає α. Надалі ситуацію, коли $\alpha \in \Sigma_\Psi$ і задовольняє умови (18), називатимемо випадком *невиродженого резонансу.* Якщо ж $\alpha \in \Sigma_\Psi$ й не задовольняє хоча б одну з умов (18), то цей випадок називатимемо *виродженим резонансом.*

3.2. Граничний оператор $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$. Спочатку припустимо, що α не належить до резонансної множини. Тоді задача (16) має лише тривіальний розв'язок $w = 0$. З умов спряження (12) отримуємо $v'(0) = 0$. Отже, задача для головних членів рядів (3), (4) набуває вигляду

$$\begin{cases} Lv = \lambda v, \qquad x \in (a,0) \cup (0,b), \\ v(a) = v'(a) = 0, \qquad v(0) = v'(0) = 0, \qquad v(b) = v'(b) = 0. \end{cases} \tag{19}$$

Надалі цю задачу називатимемо граничною. Асоційований з нею оператор є прямою сумою $S_- \oplus S_+$, де S_- та S_+ задані рівностями $S_\pm u = Lu$ на

$$\mathcal{D}(S_-) = \{f \in W_2^4(a,0)\colon f(a) = f'(a) = 0, \quad f(0) = f'(0) = 0\},$$
$$\mathcal{D}(S_+) = \{f \in W_2^4(0,b)\colon f(0) = f'(0) = 0, \quad f(b) = f'(b) = 0\}.$$

Отже, у випадку $\alpha \notin \Sigma_\Psi$ приймемо $\mathcal{S}(\alpha,\Psi) = S_- \oplus S_+$.

Нехай тепер $\alpha \in \Sigma_\Psi$ та виконуються умови (18). Введемо величину

$$\theta_\Psi(\alpha) = \frac{w'_\alpha(1)}{w'_\alpha(-1)}. \tag{20}$$

У випадку невиродженого резонансу це відношення визначене коректно й не залежить від вибору власної функції. Зрозуміло, що $w = cw_\alpha(\xi)$ для деякої сталої c, тоді умови (12) набувають вигляду $v'(-0) = cw'_\alpha(-1)$, $v'(+0) = cw'_\alpha(1)$, звідки

$$w'_\alpha(-1)v'(+0) = w'_\alpha(1)v'(-0). \tag{21}$$

Скориставшись (9) та (14), отримаємо неоднорідну задачу на спектрі

$$w_1^{(4)} + \alpha\Psi w_1 = 0, \quad \xi \in (-1,1), \qquad w_1''(\pm 1) = v''(\pm 0), \quad w_1'''(1) = 0. \tag{22}$$

для коректора w_1. Згідно з альтернативою Фредгольма ця задача має розв'язок тоді й лише тоді, коли

$$w'_\alpha(1)v''(+0) - w'_\alpha(-1)v''(-0) = 0. \tag{23}$$

Врахувавши (20), (21), (23), одержимо граничну задачу

$$Lv = \lambda v, \qquad x \in (a,0) \cup (0,b), \qquad v(a) = v'(a) = 0, \quad v(b) = v'(b) = 0, \tag{24}$$

$$v(0) = 0, \quad v'(+0) - \theta_\Psi(\alpha)v'(-0) = 0, \quad \theta_\Psi(\alpha)v''(+0) - v''(-0) = 0 \tag{25}$$

та асоційований з нею оператор, що заданий рівністю $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)u = Lu$ на області

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}(\alpha,\Psi)) = \{f \in W_2^4((a,b)\setminus\{0\})\colon \ f(a) = f'(a) = 0, \quad f(b) = f'(b) = 0,$$
$$f(0) = 0, \quad f'(+0) - \theta_\Psi(\alpha)f'(-0) = 0, \quad \theta_\Psi(\alpha)f''(+0) - f''(-0) = 0\}.$$

Нехай λ та v – власне значення й власна функція оператора $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$. Тоді сталу c у зображенні w знаходять за формулою $c = \frac{v'(-0)}{w'_\alpha(-1)} = \frac{v'(+0)}{w'_\alpha(1)}$.

4. Асимптотика скінченного спектра: поправки. Далі ми знайдемо декілька інших коефіцієнтів рядів (3)-(5) за відсутності резонансу ($\alpha \notin \Sigma_\Psi$), а також для невиродженого резонансу ($\alpha \in \Sigma_\Psi$). Зважаючи на обмежений обсяг статті, асимптотика буде побудована у припущенні, що λ просте власне значення граничного оператора $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$.

4.1. Асимптотика за відсутності резонансу. Нагадаємо таке: коли α не належить до резонансної множини, то $w = 0$. З (9), (14) отримуємо задачу

$$w_1^{(4)} + \alpha\Psi w_1 = 0, \quad \xi \in (-1,1), \qquad w_1''(\pm 1) = v''(\pm 0), \quad w_1'''(\pm 1) = 0,$$

яка має єдиний розв'язок, позаяк α не є власним значенням задачі (16). Нехай λ та v – власне значення та власна функція оператора $S_- \oplus S_+$, нормована в $L_2(a,b)$. Тобто, λ є власним значенням одного з операторів S_- або S_+, й не обмежуючи загальності, припускатимемо, що S_+. Зрозуміло, що тоді v дорівнює нулю на $(a,0)$. Згідно з (8), (13) функцію v_1 можна знайти, розв'язавши задачі на $(a,0)$ та $(0,b)$, відповідно

$$\begin{cases} Lv_1 = \lambda v_1, \quad x \in (a,0), \\ v(a) = v'(a) = 0, \\ v_1(-0) = 0, \quad v_1'(-0) = w_1'(-1), \end{cases}$$
$$\begin{cases} Lv_1 = \lambda v_1 + \lambda_1 v, \quad x \in (0,b), \\ v_1(+0) = -v'(+0), \quad v_1'(+0) = w_1'(+1) - v''(+0), \\ v(b) = v'(b) = 0. \end{cases} \tag{26}$$

Перша з них має єдиний розв'язок, бо $\lambda \notin \sigma(S_-)$, а друга – це неоднорідна задача на спектрі. Згідно з альтернативою Фредгольма її розв'язок існує тоді й лише тоді, коли

$$\lambda_1 = v''(+0)(v''(+0) - w_1'(1)) - v'(+0)v'''(+0).$$

Остання умова є одночасно формулою для знаходження поправки λ_1 в асимптотиці власного значення. Зважаючи на те, що розв'язок визначений з точністю до ядра однорідної задачі, підпорядкуємо його додатковій умові $\int_0^b vv_1\,dx = 0$. З рівностей (9), (15) отримуємо задачу

$$\begin{aligned} &w_2^{(4)} + \alpha\Psi w_2 = 0, \qquad \xi \in (-1,1),\\ &w_2''(\pm 1) = v_1''(\pm 0) \pm v'''(\pm 0), \quad w_2'''(\pm 1) = v'''(\pm 0), \end{aligned} \tag{27}$$

з якої знаходимо функцію w_2.

Отже, ми побудували такі наближення власного значення та власної функції:

$$\Lambda_\varepsilon = \lambda + \varepsilon\lambda_1, \quad U_\varepsilon(x) = \begin{cases} v(x) + \varepsilon v_1(x), & |x| > \varepsilon,\\ \varepsilon^2 w_1(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^3 w_2(\varepsilon^{-1}x), & |x| < \varepsilon. \end{cases} \tag{28}$$

Таку ж асимптотику можна побудувати й у випадку, коли $\lambda \in \sigma(S_-) \setminus \sigma(S_+)$.

4.2. Асимптотика у випадку резонансу. Нехай $\alpha \in \Sigma_\Psi$. Число λ тепер є простим власним значенням задачі (24), а v – відповідною нормованою в $L_2(a,b)$ власною функцією. У випадку невиродженого резонансу з умови (12) матимемо $w = \frac{v'(-0)}{w_\alpha'(-1)}w_\alpha$, де w_α – власна функція задачі (16). Друга умова (12) теж правильна, бо $w'(1) = v'(-0)\theta_\Psi(\alpha) = v'(+0)$.

Розв'язок w_1 задачі (22) існує, що гарантує умова (23). Він має зображення $w_1 = w_1^* + c_1 w_\alpha$, де w_1^* – частковий розв'язок задачі такий, що $\frac{dw_1^*}{d\xi}(-1) = 0$, а c_1 – довільна стала. Функція v_1 задовольняє (8) поза нулем, причому з (14) маємо

$$v_1'(+0) - \theta_\Psi(\alpha)v_1'(-0) = G_1,$$

де $G_1 = w_1'(1) - \theta_\Psi(\alpha)w_1'(-1) - v''(+0) - \theta_\Psi(\alpha)v''(-0)$. Варто зауважити, що G_1 не залежить від вибору розв'язку w_1, позаяк

$$\begin{aligned} w_1'(1) - \theta_\Psi(\alpha)w_1'(-1) = \left(\frac{dw_1^*}{d\xi}(1) - \theta_\Psi(\alpha)\frac{dw_1^*}{d\xi}(-1)\right) +\\ + c_1\big(w_\alpha'(1) - \theta_\Psi(\alpha)w_\alpha'(-1)\big) = \frac{dw_1^*}{d\xi}(1). \end{aligned}$$

З умов (13) отримаємо $v_1(\pm 0) = w(\pm 1) \mp v'(\pm 0)$. З (9) та (15) знаходимо

$$\begin{cases} w_2^{(4)} + \alpha\Psi w_2 = 0, & \xi \in (-1,1),\\ w_2''(\pm 1) = v_1''(\pm 0) \pm v'''(\pm 0),\\ w_2'''(\pm 1) = v'''(\pm 0). \end{cases} \tag{29}$$

Умову існування розв'язку цієї задачі можна записати у вигляді

$$\theta_\Psi(\alpha)v_1''(+0) - v_1''(-0) = H_1, \tag{30}$$

де $H_1 = v'''(-0) - \theta_\Psi(\alpha)v'''(+0) + w_\alpha(1)v'''(+0) - w_\alpha(-1)v'''(-0)$. Отже, функція v_1 є розв'язком задачі

$$\begin{cases} v_1^{(4)} = \lambda v_1 + \lambda_1 v, & x \in (a,b)\setminus\{0\},\\ v_1(a) = v_1'(a) = 0, \quad v_1(b) = v_1'(b) = 0, \\ v_1(\pm 0) = w(\pm 1) \mp v'(\pm 0), \\ v_1'(+0) - \theta_\Psi(\alpha)v_1'(-0) = G_1, \\ \theta_\Psi(\alpha)v_1''(+0) - v_1''(-0) = H_1. \end{cases} \tag{31}$$

Першу поправку λ_1 в асимптотиці власного значення знаходимо з умови існування розв'язку цієї задачі. Згідно з альтернативою Фредгольма матимемо

$$\lambda_1 = v'(-0)H_1 - v''(+0)G_1 - (w(-1) + v'(-0))v'''(-0) + (w(1) - v'(+0))v'''(+0).$$

Розв'язок v_1 підпорядкуємо додатковій умові $\int_a^b vv_1\,dx = 0$. З першої умови (13) матимемо $c_1 = \big(v_1'(-0) - v''(-0) - \frac{dw_1^*}{d\xi}(-1)\big)$. Безпосередньо переконуємося, що друга умова (13) теж виконується.

Отже, в цьому випадку маємо таке наближення власного значення та власної функції збуреної задачі

$$\Lambda_\varepsilon = \lambda + \varepsilon\lambda_1, \quad U_\varepsilon(x) = \begin{cases} v(x) + \varepsilon v_1(x), & |x| > \varepsilon, \\ \varepsilon w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^2 w_1(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon^3 w_2(\varepsilon^{-1}x), & |x| < \varepsilon. \end{cases} \tag{32}$$

Тут w_2 – деякий розв'язок задачі (29). Вибір сталої c_2 у зображенні $w_2 = w_2^* + c_2 w_\alpha$ не є принциповим, бо ми не шукаємо поправку v_2.

5. Обґрунтування асимптотик.

5.1. Теорема про збіжність. Нехай λ_ε – обмежене власне значення оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$, а u_ε – відповідна нормована в $L_2(a,b)$ власна функція. Тоді існують такі підпослідовності $\lambda_{\varepsilon'}$ та $u_{\varepsilon'}$, що $\lambda_{\varepsilon'} \to \lambda$ та $u_{\varepsilon'} \to u$ слабко в $L_2(a,b)$ при $\varepsilon' \to 0$. Надалі такі збіжні підпослідовності позначатимемо через λ_ε та u_ε, вважаючи, що ε належить до множини $\mathcal{I} \subset (0,1)$, у якої нуль є точкою скупчення.

Теорема 3. *Якщо $\lambda_\varepsilon \to \lambda$ та $u_\varepsilon \to u$ слабко в $L_2(a,b)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$, то λ є власним значенням оператора $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$, а u – відповідна йому власна функція. Крім того, u_ε збігається до u в нормі $L_2(a,b)$.*

Розіб'ємо доведення цієї теореми на кілька лем. Спершу дослідимо поведінку власної функції поза ε–околом початку координат.

Лема 2. *Нехай $\lambda_\varepsilon \to \lambda$ та $u_\varepsilon \to u$ слабко в $L_2(a,b)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$. Тоді для кожного $\gamma > 0$ послідовність u_ε збігається до u слабко в $W_2^4((a,b)\setminus(-\gamma,\gamma))$ та в нормі простору $C^3([a,b]\setminus(-\gamma,\gamma))$. Крім того, u є розв'язком рівняння*

$$Lu = \lambda u, \qquad x \in (a,b)\setminus 0. \tag{33}$$

Доведення. Нехай $\mathcal{M}_\gamma$ – множина пробних функцій $\varphi \in C_0^\infty(a,b)$ таких, що $\varphi(x) = 0$ при $x \in (-\gamma,\gamma)$. Тоді з рівняння (2) для всіх $\varphi \in \mathcal{M}_\gamma$ та $\varepsilon < \gamma$ отримуємо

$$\int_a^b Lu_\varepsilon\,\varphi\,dx = \lambda_\varepsilon \int_a^b u_\varepsilon \varphi\,dx, \tag{34}$$

бо $\mathrm{supp}\Psi_\varepsilon \subset (-\gamma,\gamma)$. Права частина (34) має границю при $\varepsilon\to 0$, тому інтеграл зліва теж збігається для всіх $\varphi\in\mathcal{M}_\gamma$. Отже, $u_\varepsilon \to u$ слабко в $W_2^4((a,b)\setminus(-\gamma,\gamma))$ і

$$\int_a^b Lu\,\varphi\,dx=\lambda\int_a^b u\varphi\,dx,\qquad \varphi\in\mathcal{M}_\gamma.$$

З цієї тотожності випливає, що u є розв'язком рівняння (33) на множині $(a,b)\setminus(-\gamma,\gamma)$, а на підставі довільності γ – на кожному з інтервалів $(a,0)$ та $(0,b)$. Збіжність u_ε в просторі $C^3((a,b)\setminus(-\gamma,\gamma))$ є наслідком теореми вкладення. □

Тепер досліджуватимемо поведінку власної функції u_ε та її похідних у точках $-\varepsilon$ та ε.

Лема 3. *Нехай $\lambda_\varepsilon\to\lambda$ та $u_\varepsilon\to u$ слабко в $L_2(a,b)$ при $\mathcal{I}\ni\varepsilon\to 0$. Тоді $u_\varepsilon^{(j)}(\pm\varepsilon)\to u^{(j)}(\pm 0)$, $j=0,\dots,3$ при $\mathcal{I}\ni\varepsilon\to 0$.*

Доведення. Нехай ζ_k гладкі поза нулем функції з носієм на $[a,b]$ такі, що $\zeta_k(x)=0$ при $x<0$, а також $\zeta_k(x)=\frac{x^k}{k!}$ при $x\in(0,\frac{b}{2})$. Нехай χ_K – характеристична функція множини K. Введемо послідовності $\zeta_k^\varepsilon(x)=\chi_{(\varepsilon,b)}(x)\zeta_k(x)$. Зауважимо, що $\frac{d^{k+1}}{dx^{k+1}}\zeta_k^\varepsilon(x)=0$ при $x\in(\varepsilon,\frac{b}{2})$.

З попередньої леми отримуємо, що u є розв'язком рівняння (33) та задовольняє умови Діріхле в точках a і b. Домножимо кожне з рівнянь (2), (33) на ζ_0^ε та зінтегруємо один раз частинами. Врахувавши крайові умови, отримаємо

$$u_\varepsilon'''(\varepsilon)=-\int_{\frac{b}{2}}^b u_\varepsilon'''\zeta_0'\,dx+\int_\varepsilon^b u_\varepsilon\zeta_0(V-\lambda_\varepsilon)\,dx,$$

$$u'''(\varepsilon)=-\int_{\frac{b}{2}}^b u'''\zeta_0'\,dx+\int_\varepsilon^b u\zeta_0(V-\lambda)\,dx.$$

За лемою 2 праві частини рівностей мають ту саму границю при $\varepsilon\to 0$, тобто $u_\varepsilon'''(\varepsilon)\to u'''(+0)$. Аналогічно можна довести, що $u_\varepsilon'''(-\varepsilon)\to u'''(-0)$.

Тепер домножимо (2), (33) на ζ_1^ε та зінтегруємо двічі частинами

$$u_\varepsilon''(\varepsilon)=u_\varepsilon'''(\varepsilon)\varepsilon-\int_{\frac{b}{2}}^b u_\varepsilon''\zeta_1''\,dx+\int_\varepsilon^b u_\varepsilon\zeta_1(\lambda_\varepsilon-V)\,dx,$$

$$u''(\varepsilon)=u'''(\varepsilon)\varepsilon-\int_{\frac{b}{2}}^b u''\zeta_1''\,dx+\int_\varepsilon^b u\zeta_1(\lambda-V)\,dx.$$

З леми 2 та доведеного вище отримуємо, що $u_\varepsilon''(\varepsilon)\to u''(+0)$ при $\varepsilon\to 0$. Аналогічно показуємо збіжність для u_ε та u_ε' в точках $\pm\varepsilon$. □

Вивчатимемо збіжність власної функції в ε–околі початку координат. Нехай функції g_k, де $k = 1, 2, 3$, є розв'язками задач Коші на відрізку $[-1, 1]$

$$\begin{aligned} &g_k^{(4)} + \alpha\Psi(\xi)g_k = 0, \qquad \xi \in (-1, 1), \\ &g_k(-1) = \delta_{1,k}, \qquad g_k'(-1) = \delta_{2,k}, \qquad g_k''(-1) = \delta_{3,k}, \qquad g_k'''(-1) = 0. \end{aligned} \tag{35}$$

Тут $\delta_{i,j}$ – символ Кронекера.

Лема 4. *Якщо $\lambda_\varepsilon \to \lambda$ та $u_\varepsilon \to u$ слабко в $L_2(a, b)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$, то*

$$\left\|\varepsilon^{-2}u_\varepsilon(\varepsilon\xi) - \varepsilon^{-2}u_\varepsilon(-\varepsilon)g_1(\xi) - \varepsilon^{-1}u_\varepsilon'(-\varepsilon)g_2(\xi) - u''(-0)g_3(\xi)\right\|_{C^3([-1,1])} \to 0. \tag{36}$$

Доведення. Введемо позначення

$$w_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^{-2}u_\varepsilon(\varepsilon\xi) - \varepsilon^{-2}u_\varepsilon(-\varepsilon)g_1(\xi) - \varepsilon^{-1}u_\varepsilon'(-\varepsilon)g_2(\xi) - u''(-0)g_3(\xi).$$

За побудовою з урахуванням (35) функція w_ε на відрізку $[-1, 1]$ є розв'язком задачі

$$\begin{cases} w_\varepsilon^{(4)} + \alpha\Psi(\xi)w_\varepsilon = f_\varepsilon(\xi), \qquad \xi \in (-1, 1), \\ w_\varepsilon(-1) = 0, \quad w_\varepsilon'(-1) = 0, \quad w_\varepsilon'' = u_\varepsilon''(-\varepsilon) - u''(-0), \quad w_\varepsilon'''(-1) = \varepsilon u_\varepsilon'''(-\varepsilon) \end{cases} \tag{37}$$

де $f_\varepsilon(\xi) = \varepsilon^2\lambda_\varepsilon u_\varepsilon(\varepsilon\xi)$. Для кожної функції $f_\varepsilon \in L_2(-1, 1)$ існує єдиний розв'язок w_ε з класу $W_2^4(-1, 1)$ і виконується оцінка

$$\|w_\varepsilon\|_{W_2^4(-1,1)} \leqslant C\left(\|f_\varepsilon\|_{L_2(-1,1)} + |u_\varepsilon''(-\varepsilon) - u''(-0)|\right) \tag{38}$$

з незалежною від ε сталою C. Зрозуміло, що

$$\int_{-1}^{1} f_\varepsilon^2(\xi)\,d\xi = \varepsilon^4\lambda_\varepsilon^2\int_{-1}^{1} u_\varepsilon^2(\varepsilon\xi)\,d\xi = \varepsilon^3\lambda_\varepsilon^2\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} u_\varepsilon^2(x)\,dx \leqslant \varepsilon^3\lambda_\varepsilon^2\,\|u_\varepsilon\|_{L_2(a,b)}^2 \leqslant C\varepsilon^3.$$

Отже, згідно з лемою 3 права частина нерівності (38) прямує до нуля. Теорема вкладення $W_2^4(-1, 1) \subset C^3(-1, 1)$ завершує доведення збіжності (36). $\square$

З формули (36) для $\xi = 1$ отримаємо

$$\varepsilon^{-2}\big[u_\varepsilon(\varepsilon) - u_\varepsilon(-\varepsilon)g_1(1) - \varepsilon u_\varepsilon'(-\varepsilon)g_2(1)\big] \to u''(-0)g_3(1), \tag{39}$$

$$\varepsilon^{-1}\big[u_\varepsilon'(\varepsilon) - \varepsilon^{-1}u_\varepsilon(-\varepsilon)g_1'(1) - u_\varepsilon'(-\varepsilon)g_2'(1)\big] \to u''(-0)g_3'(1), \tag{40}$$

$$u_\varepsilon''(\varepsilon) - \varepsilon^{-2}u_\varepsilon(-\varepsilon)g_1''(1) - \varepsilon^{-1}u_\varepsilon'(-\varepsilon)g_2''(1) \to u''(-0)g_3''(1), \tag{41}$$

$$\varepsilon u_\varepsilon'''(\varepsilon) - \varepsilon^{-2}u_\varepsilon(-\varepsilon)g_1'''(1) - \varepsilon^{-1}u_\varepsilon'(-\varepsilon)g_2'''(1) \to u''(-0)g_3'''(1), \tag{42}$$

коли $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$. Звідси випливає оцінка

$$|u_\varepsilon(-\varepsilon)| + |u_\varepsilon(\varepsilon)| \leqslant c\varepsilon. \tag{43}$$

Справді, з (41)–(42) відразу отримаємо

$$u_\varepsilon(-\varepsilon)g_1^{(k)}(1) = O(\varepsilon) \quad \text{при} \quad \varepsilon \to 0 \quad \text{для} \quad k = 2, 3.$$

Якщо хоча б одне з чисел $g_1''(1)$ або $g_1'''(1)$ відмінне від нуля, то $u_\varepsilon(-\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$. Якщо ж це не так, тобто $g_1''(1) = g_1'''(1) = 0$, то з (35) одержимо, що g_1 – власна функція задачі (16), що відповідає власному значенню $\alpha \in \Sigma_\Psi$. Крім того, $g_1'(-1) = 0$, що суперечить припущенням (18). Далі з (39), врахувавши поведінку u_ε в точці $-\varepsilon$, отримаємо $u_\varepsilon(\varepsilon) = O(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$.

Лема 5. *Якщо* $\lambda_\varepsilon \to \lambda$, *а* $u_\varepsilon \to u$ *слабко в* $L_2(a,b)$, *тоді* u_ε *збігається до* u *в* $L_2(a,b)$.

Доведення. Покажемо, що послідовність u_ε рівномірно обмежена на $[a,b]$. Спочатку зауважимо

$$|u_\varepsilon(\varepsilon\xi)| \leqslant c\varepsilon^2 + |u_\varepsilon(-\varepsilon)g_1(\xi)| + \varepsilon|u'_\varepsilon(-\varepsilon)g_2(\xi)| + \varepsilon^2|u''(-0)g_3(\xi)| \leqslant c_1\varepsilon. \tag{44}$$

Нехай $\Omega_\varepsilon = (a,b)\backslash(-\varepsilon,\varepsilon)$. Домножимо рівняння (2) на функцію $\chi_{\Omega_\varepsilon} u_\varepsilon$ та зінтегруємо частинами

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} u''^2_\varepsilon\,dx = \int\limits_{\Omega_\varepsilon} (\lambda_\varepsilon - V)u^2_\varepsilon\,dx - u'''_\varepsilon(-\varepsilon)u_\varepsilon(-\varepsilon) + u'''_\varepsilon(\varepsilon)u_\varepsilon(\varepsilon) + \\ + u''_\varepsilon(-\varepsilon)u'_\varepsilon(-\varepsilon) - u''_\varepsilon(\varepsilon)u'_\varepsilon(\varepsilon) \leqslant C. \tag{45}$$

Отже, послідовність $\|u_\varepsilon\|_{W_2^2(\Omega_\varepsilon)}$ обмежена. З теореми вкладення випливає обмеженість послідовності $\max\limits_{x\in(a,b)}|v_\varepsilon(x)|$. Звідси та з (44) одержуємо, що $\max\limits_{x\in(a,b)}|u_\varepsilon(x)| \leqslant c$, де c не залежить від ε.

Зафіксуємо $\gamma > 0$. Згідно з лемою 2 для достатньо малих ε норма різниці $u_\varepsilon - u$ в просторі $L_2(\Omega_\gamma)$ не перевищуватиме γ. Тоді

$$\|u_\varepsilon - u\|_{L_2(a,b)} \leqslant \|u_\varepsilon - u\|_{L_2(\Omega_\gamma)} + \|u_\varepsilon - u\|_{L_2(-\gamma,\gamma)} \leqslant \\ \leqslant \gamma(1 + 2\max_{x\in(a,b)}|u_\varepsilon(x) - u(x)|) \leqslant C\gamma$$

зі сталою C, незалежною від ε. Залишилося зауважити, що число γ можна взяти як завгодно малим. □

Доведення теореми 3. Як випливає з лем 2–5 гранична функція u є розв'язком рівняння

$$Lu = \lambda u, \qquad x \in (a,b)\setminus\{0\},$$

задовольняє умови $u(a) = u'(a) = 0$, $u(b) = u'(b) = 0$ і має одиничну норму в $L_2(a,b)$. Крім того, в початку координат вона задовольняє умову $u(0) = 0$. Залишилось перевірити, що u задовольняє умови спряження (19) у разі відсутності резонансу або умови (25) у випадку резонансу.

Згідно з (43) та лемою 3 послідовності $u'_\varepsilon(-\varepsilon)$ та $\varepsilon^{-1}u_\varepsilon(-\varepsilon)$ мають скінченні границі при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$. Відомо, що перша з цих границь дорівнює $u'(-0)$, а другу позначатимемо через s. Функція $q_\varepsilon = \varepsilon^{-1}u_\varepsilon(-\varepsilon)g_1 + u'_\varepsilon(-\varepsilon)g_2$ прямує в $C^3(-1,1)$ до $q = sg_1 + u'(-0)g_2$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$. З (41), (42) легко бачити, що послідовності $\varepsilon^{-1}q''_\varepsilon(1)$ і $\varepsilon^{-1}q'''_\varepsilon(1)$ обмежені при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$. Звідси маємо, що

$$q''(1) = 0, \qquad q'''(1) = 0. \tag{46}$$

З (35), (40) одержимо

$$q'(-1) = u'(-0), \qquad q'(1) = u'(+0). \tag{47}$$

Пам'ятаючи, що функції g_1 та g_2 є розв'язками задач (35), отримаємо, що функція q є розв'язком такої задачі Коші:

$$\begin{cases} q^{(4)} + \alpha\Psi q = 0, \qquad \xi \in (-1,1), \\ q(-1) = s, \quad q'(-1) = u'(-0), \quad q''(-1) = q'''(-1) = 0. \end{cases} \tag{48}$$

Умови спряження граничної задачі залежатимуть від того, чи має задача (48) нетривіальний розв'язок. Припустимо спершу, що $q = 0$, тоді з (47) одержуємо повний набір умов спряження (19).

Тепер розглянемо випадок, коли (48) має нетривіальний розв'язок. Тоді з (46) отримуємо, що q є власною функцією задачі (16), тобто $\alpha \in \Sigma(\Psi)$. З (47), як наслідок, отримаємо рівність

$$q'(1)u'(-0) - q'(-1)u'(+0) = 0,$$

яка у випадку загального положення еквівалентна до $\theta_\Psi(\alpha)u'(-0) - u'(+0) = 0$.

Для кожного $\varepsilon > 0$ справджується рівність Лагранжа

$$q_\varepsilon'''(1)q(1) - q_\varepsilon''(1)q'(1) = 0. \tag{49}$$

Поділивши останню рівність на ε і перейшовши до границі при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$, одержимо

$$u''(-0)g_3'''(1)q(1) + \bigl(u''(+0) - u''(-0)g_3''(1)\bigr)q'(1) = 0. \tag{50}$$

Тут було враховано, що послідовності $\varepsilon^{-1}q_\varepsilon''(1)$ і $\varepsilon^{-1}q_\varepsilon'''(1)$ при $\mathcal{I} \ni \varepsilon \to 0$ збігаються до $u''(+0) - u''(-0)g_3''(1)$ та $-u''(-0)g_3'''(1)$, відповідно. Це випливає з (41), (42).

Функція $z = u''(-0)g_3$ є розв'язком крайової задачі

$$\begin{cases} z^{(4)} + \alpha\Psi z = 0, \qquad \xi \in (-1,1), \\ z''(-1) = u''(-0),\ z'''(-1) = 0,\ z''(1) = u''(-0)g_3''(1),\ z'''(1) = u''(-0)g_3'''(1). \end{cases}$$

Запишемо умову існування розв'язку цієї задачі

$$u''(-0)g_3'''(1)q(1) - u''(-0)g_3''(1)q'(1) + u''(-0)q'(-1) = 0.$$

Врахувавши (50), перепишемо її так:

$$\bigl\{u''(-0)g_3'''(1)q(1) + \bigl(u''(+0) - u''(-0)g_3''(1)\bigr)q'(1)\bigr\} + u''(-0)q'(-1) - \\ - u''(+0)q'(1) = u''(-0)q'(-1) - u''(+0)q'(1) = 0.$$

У випадку загального положення останню умову можна подати у вигляді: $u''(-0) - \theta_\Psi(\alpha)u''(+0) = 0$. Ми отримали умови спряження (25). Отже, гранична функція u є власною функцією оператора $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$, що відповідає власному значенню λ. □

Наслідок 1. *Кожне власне значення $\lambda_k^\varepsilon(\alpha,\Psi)$ оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$, обмежене знизу при $\varepsilon \to 0$, має границю, що є точкою спектра оператора $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$.*

Доведення. Нагадаємо, що $\lambda_k^\varepsilon(\alpha,\Psi)$ є неперервною функцією параметра $\varepsilon \in (0,1)$. Нехай власне значення не має границі, тоді виконується нерівність

$$\mu_* = \underline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\lambda^\varepsilon < \overline{\lim}_{\varepsilon\to 0}\lambda^\varepsilon = \mu^*.$$

Числа μ_*, μ^* є скінченними, бо $\lambda_k^\varepsilon(\alpha,\Psi)$ – обмежена функція. Тоді для кожного $\lambda \in [\mu_*,\mu^*]$ існує збіжна до нього послідовність власних значень λ_ε. З теореми 3 випливає, що число λ буде власним значенням оператора $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$. Зважаючи на те, що λ – довільне число з $[\mu_*,\mu^*]$, отримуємо, що цей відрізок міститься в $\sigma(\mathcal{S}(\alpha,\Psi))$. Але це можливо лише тоді, коли $\mu_* = \mu^*$. □

Наслідок 2. *До простого власного значення λ оператора $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$ може збігатися не більше одного власного значення $\lambda_k^\varepsilon(\alpha,\Psi)$ оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$.*

Доведення. Припустимо, що $\lambda_k^\varepsilon(\alpha,\Psi)\to\lambda$ та $\lambda_{k+1}^\varepsilon(\alpha,\Psi)\to\lambda$. Тоді існують дві послідовності $\{y_k^\varepsilon(x;\alpha,\Psi)\}_{\varepsilon\in\mathcal{I}}$, $\{y_{k+1}^\varepsilon(x;\alpha,\Psi)\}_{\varepsilon\in\mathcal{I}}$ власних функцій, кожна з яких в $L_2(a,b)$ збігається до одного з векторів $e^{i\varphi}u$. Це неможливо, бо елементи цих послідовностей при кожному $\varepsilon\in\mathcal{I}$ ортогональні в $L_2(a,b)$. □

5.2. Апроксимаційна теорема. Покажемо, що кожна точка спектра $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$ є граничною точкою власних значень операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$.

Нехай B – самоспряжений оператор у гільбертовому просторі H з областю визначення $\mathcal{D}(B)$. Пару $(\mu,u)\in\mathbb{R}\times\mathcal{D}(B)$, де $\|u\|_H=1$, називатимемо *квазімодою* оператора B із нев'язкою $\rho>0$, якщо $\|Bu-\mu u\|_H\leqslant\rho$.

Лема 6 ([16]). *Нехай спектр оператора B дискретний. Якщо (μ,u) – квазімода оператора B із нев'язкою $\rho>0$, то інтервал $[\mu-\rho,\mu+\rho]$ містить власне значення λ оператора B. Крім того, якщо в інтервалі $[\mu-\tau,\mu+\tau]$ немає інших власних значень оператора B, окрім λ, то $\|u-v\|_H\leqslant 2\tau^{-1}\rho$, де v – нормований власний вектор, що відповідає λ.*

Побудуємо квазімоди операторів $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$. Нехай λ – просте власне значення оператора $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$ з власною функцією v, $\|v\|=1$. Тут і далі $\|\cdot\|$ – норма в $L_2(a,b)$. Для кожного λ та v ми отримали формальні асимптотики Λ_ε, U_ε, які задаються формулами (28) чи (32) залежно від α та Ψ. Під час обґрунтування два різні випадки асимптотик не розрізнятимемо. За побудовою

$$\begin{aligned}
&LU_\varepsilon-\Lambda_\varepsilon U_\varepsilon=\varepsilon^2R_1(\varepsilon,x), \qquad |x|>\varepsilon,\\
&LU_\varepsilon+(\alpha\varepsilon^{-2}\Psi(\varepsilon^{-1}x)-\Lambda_\varepsilon)U_\varepsilon=\varepsilon R_2(\varepsilon,x), \qquad |x|<\varepsilon,\\
&[U_\varepsilon]_{x=\pm\varepsilon}=\varepsilon^2r_0^\pm(\varepsilon), \qquad [U_\varepsilon']_{x=\pm\varepsilon}=\varepsilon^2r_1^\pm(\varepsilon),\\
&[U_\varepsilon'']_{x=\pm\varepsilon}=\varepsilon^2r_2^\pm(\varepsilon), \qquad [U_\varepsilon''']_{x=\pm\varepsilon}=\varepsilon r_3^\pm(\varepsilon),
\end{aligned}\tag{51}$$

де всі залишки R_j, $r_j^\pm$ рівномірно обмежені за своїми аргументами.

Функція U_ε не належить до області визначення оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$, бо має розриви в точках $x=\pm\varepsilon$. Однак конструктивно будуємо функцію-коректор ζ_ε з такими властивостями:

- ζ_ε – гладка поза точками $x=\pm\varepsilon$ та відмінна від нуля лише при $\varepsilon<|x|<1$;
- $[\zeta_\varepsilon^{(j)}]_{x=\pm\varepsilon}=-\varepsilon r_j^\pm(\varepsilon)$, $\quad j=0,1,2,\quad [\zeta_\varepsilon''']_{x=\pm\varepsilon}=-r_3^\pm(\varepsilon)$;
- існує стала c, яка не залежить від ε, що $\max\limits_{\varepsilon<|x|<1}\sum\limits_{j=0}^{4}|\zeta_\varepsilon^{(j)}(x)|\leqslant c$.

Тоді функція $U_\varepsilon+\varepsilon\zeta_\varepsilon$ вже тричі неперервно диференційовна в точках $x=\pm\varepsilon$ і належить до $\mathcal{D}(\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi))$. Нехай $\mathcal{U}_\varepsilon=\|U_\varepsilon+\varepsilon\zeta_\varepsilon\|^{-1}(U_\varepsilon+\varepsilon\zeta_\varepsilon)$. Якщо у формулах (51) замінити U_ε на $\mathcal{U}_\varepsilon$, то порядок малості залишків у правих частинах не зміниться, бо $\|U_\varepsilon\|\to 1$ при $\varepsilon\to 0$. Звідси випливає, що пара $(\Lambda_\varepsilon,\mathcal{U}_\varepsilon)$ є квазімодою оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$ з нев'язкою порядку ε.

Сформулюємо основний результат.

Теорема 4. *Нехай $(\alpha,\Psi)\in\mathbb{R}\times\mathcal{M}$ і λ – просте власне значення оператора $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$ з власною функцією v, де $\|v\|=1$. Тоді існує просте власне значення λ_ε оператора*

$\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$ з нормованою власною функцією u_ε, для яких

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda| \leqslant c_1\varepsilon, \qquad \big\|u_\varepsilon - v\big\| \leqslant c_2\varepsilon, \tag{52}$$

де сталі c_1, c_2 не залежать від ε.

Доведення. Нехай $(\Lambda_\varepsilon,\mathcal{U}_\varepsilon)$ – квазімода оператора $\mathcal{S}_\varepsilon(\alpha,\Psi)$, побудована для λ і v. Згідно з лемою 6 існує таке λ_ε, що $|\lambda_\varepsilon - \Lambda_\varepsilon| \leqslant c_1\varepsilon$, звідки випливає

$$|\lambda_\varepsilon - \lambda| \leqslant c_1\varepsilon.$$

За наслідком 2 до λ збігається лише власне значення λ_ε. Якщо τ менше, ніж відстань від λ до решти спектра оператора $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$, то відрізок $[\lambda-\tau,\lambda+\tau]$ при достатньо малих ε містить лише одне власне значення λ_ε. Тоді $\big\|u_\varepsilon - \mathcal{U}_\varepsilon\big\| \leqslant 2\tau^{-1}c_1\varepsilon$, звідки отримуємо

$$\big\|u_\varepsilon - v\big\| \leqslant c_2\varepsilon. \tag{53}$$

Тут u_ε, v – відповідні нормовані власні функції. □

6. Граничний оператор у випадку виродженого резонансу. Нагадаємо таке: коли α не належить до резонансної множини, то граничний оператор є прямою сумою операторів Діріхле. У випадку резонансного α граничний оператор $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$ був побудований лише для невиродженого резонансу. Тобто, ми розглянули лише ті прості власні значення задачі (16), для яких відповідні власні функції задовольняють умову $w'_\alpha(-1)w'_\alpha(1) \neq 0$.

Розглянемо випадок виродженого резонансу. Розрізнятимемо два випадки: A) існує власна функція w_α, що задовольняє умови $w'_\alpha(-1)w'_\alpha(1)=0$ і $w'^2_\alpha(-1)+w'^2_\alpha(1)\neq 0$; B) існує така власна функція, що $w'_\alpha(-1)=0$ та $w'_\alpha(1)=0$.

У випадку A з (23) випливає $v''(-0)v''(+0)=0$. Тому природно ввести оператори $T_\pm$, які визначені рівностями $T_\pm u = Lu$ на областях

$$\mathcal{D}(T_-) = \{f \in W_2^4(a,0) \ : \ f(a)=f'(a)=0, \ f(0)=f''(0)=0\},$$
$$\mathcal{D}(T_+) = \{f \in W_2^4(0,b) \ : \ f(0)=f''(0)=0, \ f(b)=f'(b)=0\}.$$

У випадку простого α з (21) випливає, що одне з чисел $v'(-0)$ або $v'(+0)$ є нулем. Граничним оператором буде $\mathcal{S}(\alpha,\Psi) = S_- \oplus T_+$, коли $w'_\alpha(-1)=0$ та $w'_\alpha(1)\neq 0$, і $\mathcal{S}(\alpha,\Psi) = T_-\oplus S_+$, якщо $w'_\alpha(-1)\neq 0$, $w'_\alpha(1)=0$. Для двократного власного значення замість умови (23) отримаємо систему

$$\begin{cases} w'_{\alpha,1}(1)v''(+0) - w'_{\alpha,1}(-1)v''(-0) = 0,\\ w'_{\alpha,2}(1)v''(+0) - w'_{\alpha,2}(-1)v''(-0) = 0.\end{cases}$$

Базу $w_{\alpha,1}$, $w_{\alpha,2}$ у власному підпросторі вибрано так, що $w'_{\alpha,1}(-1)w'_{\alpha,1}(1)=0$. Легко переконатися, що визначник цієї системи відмінний від нуля, звідки випливає, що обидва числа $v''(-0)$ та $v''(+0)$ дорівнюють нулю, а граничний оператор $\mathcal{S}(\alpha,\Psi) = T_-\oplus T_+$.

У випадку B асимптотичне розвинення власної функції на $(-\varepsilon,\varepsilon)$ відрізняється від (5), а саме

$$u_\varepsilon(x) \sim w(\varepsilon^{-1}x) + \varepsilon\, w_1(\varepsilon^{-1}x) + \cdots .$$

Далі всі міркування аналогічні до випадку невиродженого резонансу. Очевидно, що $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)$ на своїй області визначення заданий рівністю $\mathcal{S}(\alpha,\Psi)u = Lu$, тому випишемо лише область визначення цього оператора. Зокрема,

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}(\alpha,\Psi)) = \{f \in W_2^4((a,b)\setminus\{0\}) \ : \ f(a)=f(b)=0,\ \ f'(a)=f'(b)=0,\\ f(+0)-\vartheta_\Psi(\alpha)f(-0)=0, \quad f'(0)=0, \quad \vartheta_\Psi(\alpha)f'''(+0)-f'''(-0)=0\}$$

для простого α. Тут $\vartheta_\Psi(\alpha) = w_\alpha(1)/w_\alpha(-1)$. Для двократного α матимемо

$$\mathcal{D}(\mathcal{S}(\alpha,\Psi)) = \{f \in W_2^4((a,b)\setminus\{0\}) \ : \ f(a)=f(b)=0,\ \ f'(a)=f'(b)=0,\\ f(+0)-\vartheta_1(\alpha)f(-0)=0, \quad f'(+0)-\vartheta_2(\alpha)f'(-0)=0,\\ \vartheta_2(\alpha)f''(+0)-f''(-0)=0, \qquad \vartheta_1(\alpha)f'''(+0)-f'''(-0)=0\}.$$

Тут $\vartheta_1(\alpha) = \frac{w_{\alpha,1}(1)}{w_{\alpha,1}(-1)}$, $\vartheta_2(\alpha) = \frac{w'_{\alpha,2}(1)}{w'_{\alpha,2}(-1)}$, де база $w_{\alpha,1}$, $w_{\alpha,2}$ власного підпростору вибрана так, що $w'_{\alpha,1}(-1) = w'_{\alpha,1}(1) = 0$.

Автор висловлює подяку Ю. Д. Головатому за формулювання задачі. Автор вдячний Р. О. Гриніву за цінні поради під час написання статті, а також рецензенту за коментарі та зауваження, які допомогли вдосконалити текст статті.

---

1. *Головатий Ю.Д.* Точні моделі для операторів Шредінґера з δ'-подібними потенціалами / *Головатий Ю.Д., Манько С.С.* // Укр. матем. вісник. – 2009. – Т. 6, №2. – С. 173-207.
2. *Albeverio S.* Solvable models in quantum mechanics. With an appendix by Pavel Exner / *Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H.* – AMS Chelsea Publishing, 2005.
3. *Albeverio S.* Singular perturbations of differential operators and solvable Schrödinger type operators / *Albeverio S., Kurasov P.* – Cambridge, 2000.
4. *Демков Ю.Н.* Метод потенциалов нулевого радиуса в атомной физике / *Демков Ю.Н., Островский В.Н.* – Ленинград, 1975.
5. *Yablonski A.* Differential equations with generalized coefficients / *Yablonski A.* // Nonlinear Anal.: Theory, Methods, Appl. – 2005. – Vol. 63, №2. – P. 171-197.
6. *Zavalishchin S.T.* Dynamic impulse systems: theory and applications / *Zavalishchin S.T., Sesekin A.N.* – Dordrecht, 1997.
7. *Березин Ф.А.* Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом / *Березин Ф.А., Фаддеев Л.Д.* // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 137. – С. 1011-1015.
8. *Головатий Ю.Д.* Оператор Шредінґера з δ'-потенціалом / *Головатий Ю.Д., Манько С.С.* // Доп. НАНУ. – 2009. – №5. – С. 16-21.
9. *Christiansen P.L.* On the existence of resonances in the transmission probability for interactions arising from derivatives of Dirac's delta function / *Christiansen P.L., Arnbak H.C., Zolotaryuk A.V., Ermakov V.N., Gaididei Y.B.* // J. Phys. A. – 2003. – Vol. 36. – P. 7589-7600.
10. *Zolotaryuk A.V.* Two-parametric resonant tunneling across the $\delta'(x)$ potential / *Zolotaryuk A.V.* // Adv. Sci. Lett. – 2008. – Vol. 1. – P. 187-191.
11. *Березин Ф.А.* Уравнение Шредингера / *Березин Ф.А., Шубин М.А.* – М., 1983.
12. *Birman M.Sh.* Estimates for the number of negative eigenvalues of the Schrödinger operator and its generalization / *Birman M.Sh., Solomyak M.Z.* // Adv. Sov. Math. – 1991. – №7. – P. 1-55.
13. *Азизов Т.Я.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой / *Азизов Т.Я., Иохвидов И.С.* – М., 1986.

14. *Наймарк М.А.* Линейные дифференциальные операторы / *Наймарк М.А.* – М., 1969.
15. *Ćurgus B.* A Krein space approach to symmetric ordinary differential operators with an indefinite weigth function / *Ćurgus B., Langer H.* // J. Diff. Eq. – 1989. – Vol. 79, №1 – P. 31-61.
16. *Вишик М.И.* Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром / *Вишик М.И., Люстерник А.А.* // Успехи мат. наук. – 1957. – Т. 12, №5. – С. 3-122.

FOURTH ORDER DIFFERENTIAL OPERATORS WITH DISTRIBUTIONS IN COEFFICIENTS

Stepan MAN'KO

Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: s_manko@franko.lviv.ua

In [1] the question on interpretation of the Schrödinger operator with the $\alpha\delta'$-potential was considered. Here $\delta(x)$ is the Dirac delta-function. In the present paper the results of [1] are generalized for the case of the fourth order differential operator with a potential $\alpha\delta'''(x)$. The asymptotic behavior of the family of operators with smooth coefficients approximating the singular potential is investigated. The limit operator is constructed. In order to get the limit operator the asymptotics of spectra and eigenspaces of the regularizing operators are constructed. The limit operator depends on the type of approximation of the derivative of Dirac's function and constant factor α.

Key words: differential operator, asymptotic, spectrum, resonant set.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ОБОБЩЕННЫМИ ФУНКЦИЯМИ В КОЭФФИЦИЕНТАХ

Степан МАНЬКО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: s_manko@franko.lviv.ua

В [1] дан ответ на вопрос, как понимать оператор Шрёдингера с $\alpha\delta'$-потенциалом, где $\delta(x)$ – функция Дирака. В данной работе результаты [1] переносятся на случай дифференциального оператора четвертого порядка с потенциалом $\alpha\delta'''(x)$. Изучается асимптотическое поведение семьи операторов с гладкими коэффициентами, апроксимирующими сингулярный потенциал. Построен граничный оператор, выбор которого обусловлен асимптотикой спектра и собственных пространств регуляризирующих операторов. Проблема интерпретации дифференциального оператора четвертого порядка с обобщенным коэффициентом обладает скрытыми параметрами, поэтому ее решение зависит от способа аппроксимации третьей производной функции Дирака и числового множителя α.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, асимптотика, спектр, резонансное множество.

Стаття надійшла до редколегії 10.12.2010

Прийнята до друку 22.12.2010