ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2010.
Вип. 72. С. 158–167

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2010.
Is. 72. P. 158–167

УДК 517.53

ПРО БАГАТОЧЛЕННУ СТЕПЕНЕВУ АСИМПТОТИКУ ЛОГАРИФМА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦІЛОГО РЯДУ ДІРІХЛЕ

Любомира ЛУГОВА[1], Мирослав ШЕРЕМЕТА[2]

[1]*Інститут підприємництва та перспективних технологій,*
79044 Львів, вул. Горбачевського, 18
e-mail: Lyubomyrka@ukr.net
[2]*Львівський національний університет імені Івана Франка,*
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru

Для цілого ряду Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ $(s = \sigma + it)$ досліджено умови на a_n і λ_n, за яких логарифм його максимального члена має асимптотику $\ln \mu(\sigma) = \sum_{j=1}^{m} T_j \sigma^{p_j} + (1 + o(1))\tau\sigma^p$, $\sigma \to +\infty$, де $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $p > 2p_2 - p_1$, $T_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ і $0 < p < p_m < \dots < p_2 < p_1$.

Ключові слова: ряд Діріхле, максимальний член ряду, багаточленна асимптотика.

1. Вступ. Нехай (λ_n) – зростаюча до $+\infty$ послідовність невід'ємних чисел, ряд Діріхле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ $(s = \sigma + it)$ має абсцису абсолютної збіжності $\sigma_a = +\infty$, а $\mu(\sigma) = \max\{|a_n| \exp\{\sigma\lambda_n\} : n \geq 0\}$ – його максимальний член.

Зв'язок між зростанням функції $\mu(\sigma)$ і спаданням послідовності a_n у тій чи іншій шкалі зростання вивчали багато математиків. У термінах двочленних степеневої та показникової асимптотик такий зв'язок отримано в [1] – [2]. Тричленну степеневу асимптотику логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле досліджено в [3], де, зокрема, доведено таке твердження.

Теорема А. *Нехай* $T_1 > 0$, $T_2 \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $p_1 > 1$, $0 < p < p_2 < p_1$, *і* $p > 2p_2 - p_1$. *Тоді для того, щоб*

$$\ln \mu(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + T_2\sigma^{p_2} + (1 + o(1))\tau\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty,$$

необхідно і достатньо, щоб для кожного $\varepsilon > 0$*:*

1) існувало $n_0 = n_0(\varepsilon)$ таке, що для всіх $n \geq n_0$

$$\ln|a_n| \leq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + T_2\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p_2}{p_1-1}} + (\tau+\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p}{p_1-1}};$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \geq -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + T_2\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p_2}{p_1-1}} + (\tau-\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p}{p_1-1}}$$

і

$$\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k} = o\Big(\lambda_{n_k}^{\frac{p_1+p-2}{2(p_1-1)}}\Big), \quad k \to \infty. \tag{1}$$

Мета нашої праці – дослідити умови на a_n і λ_n, за яких

$$\ln\mu(\sigma) = \sum_{j=1}^{m} T_j\sigma^{p_j} + (1+o(1))\tau\sigma^p, \quad \sigma \to +\infty, \tag{2}$$

де, як вище, $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $p > 2p_2 - p_1$, $T_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, і $0 < p < p_m < \ldots < p_2 < p_1$. Зауважимо, що подібну задачу у термінах багаточленної показникової асимптотики розв'язано в [4].

2. Основна лема. Для дослідження умов, за яких правильне співвідношення (2), нам будуть потрібні деякі результати з праць [5]-[7].

Нехай $\Omega(+\infty)$ – клас додатних на $(-\infty,+\infty)$ функцій Φ таких, що похідні Φ' неперервно диференційовні, додатні і зростають до $+\infty$ на $(-\infty,+\infty)$. Через φ позначатимемо функцію, обернену до Φ', і нехай $\Psi(\sigma) = \sigma - \Phi(\sigma)/\Phi'(\sigma)$ – функція, асоційована з Φ за Ньютоном.

Лема 1 ([5], [6]). *Нехай $\Phi \in \Omega(+\infty)$. Для того, щоб $\ln\mu(\sigma,F) \leqslant \Phi(\sigma)$ для всіх $\sigma \geqslant \sigma_0$ необхідно і достатньо, щоб $\ln|a_n| \leqslant -\lambda_n\Psi(\varphi(\lambda_n))$ для всіх $n \geqslant n_0$.*

Для $\Phi \in \Omega(+\infty)$ і $0 < a < b < +\infty$ приймемо

$$G_1(a,b,\Phi) = \frac{ab}{b-a}\int_a^b \frac{\Phi(\varphi(t))}{t^2}dt, \quad G_2(a,b,\Phi) = \Phi\left(\frac{1}{b-a}\int_a^b \varphi(t)dt\right).$$

Лема 2 ([6], [7]). $G_1(a,b,\Phi) < G_2(a,b,\Phi)$.

Лема 3 ([6]). *Нехай $\Phi \in \Omega(+\infty)$ і $\ln|a_{n_k}| \geqslant -\lambda_{n_k}\Psi(\varphi(\lambda_{n_k}))$ для деякої зростаючої послідовності (n_k) натуральних чисел. Тоді для всіх $\sigma \in [\varphi(\lambda_{n_k}), \varphi(\lambda_{n_{k+1}})]$ і всіх $k \geqslant k_0$ правильна нерівність*

$$\ln\mu(\sigma,F) \geq \Phi(\sigma) - (G_2(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi) - G_1(\lambda_{n_k},\lambda_{n_{k+1}},\Phi)). \tag{3}$$

Лема 4 ([6]). *Нехай $\Phi_1 \in \Omega(+\infty)$, $\Phi_2 \in \Omega(+\infty)$ і для всіх $\sigma \geqslant \sigma_0$*

$$\Phi_1(\sigma) \leq \ln\mu(\sigma,F) \leqslant \Phi_2(\sigma). \tag{4}$$

Тоді

$$\ln|a_n| \leq -\lambda_n\Psi_2(\varphi_2(\lambda_n)), \quad n \geqslant n_0, \tag{5}$$

та існує зростаюча послідовність (n_k) натуральних чисел така, що

$$\ln|a_{n_k}| \geq -\lambda_{n_k}\Psi_1(\varphi_1(\lambda_{n_k})) \tag{6}$$

і

$$G_1(\lambda_{n_k}, \lambda_{n_{k+1}}, \Phi_2) \geqslant \Phi_1 \left(\frac{1}{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}} \int_{\lambda_{n_k}}^{\lambda_{n_{k+1}}} \varphi_2(t)dt \right), \tag{7}$$

де Ψ_j і φ_j побудовані відповідно для Φ_j.

Як видно з наведених вище результатів, важливою для наших досліджень є така (основна) лема.

Лема 5. *Нехай функція $\Phi \in \Omega(+\infty)$ така, що*

$$\Phi(\sigma) = T_1\sigma^{p_1} + \sum_{j=2}^{m} T_j\sigma^{p_j} + \tau\sigma^p \quad (\sigma \geqslant \sigma_0), \tag{8}$$

де $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $p > p_2 > \cdots > p_m > p > \max\{0, 2p_2 - p_1\}, T_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, для $2 \leqslant j \leqslant m$ і $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Тоді при $x \to +\infty$

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}} - \sum_{j=2}^{m} \frac{T_jp_j}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j-p_1+1}{p_1-1}} - \frac{(1+o(1))\tau p}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1+1}{p_1-1}}. \tag{9}$$

Доведення. Оскільки функція $\varphi(x)$ є оберненою до Φ', то для її знаходження треба знайти розв'язок рівняння

$$T_1p_1\sigma^{p_1-1} + \sum_{j=2}^{m} T_jp_j\sigma_j^{p_j-1} + \tau p\sigma^p = x. \tag{10}$$

Легко побачити, що розв'язок цього рівняння треба шукати у вигляді

$$\varphi(x) = \left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}} - \alpha, \tag{11}$$

де $\alpha = \alpha(x) = o\left(x^{\frac{1}{p_1-1}}\right)$, $x \to +\infty$. Підставляючи (11) у (10), отримуємо

$$\left(1 - \alpha\left(\frac{T_1p_1}{x}\right)^{\frac{1}{p_1-1}}\right)^{p_1-1} + \sum_{j=2}^{m} \frac{T_jp_j}{T_1p_1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j-p_1}{p_1-1}}\left(1 - \alpha\left(\frac{T_1p_1}{x}\right)^{\frac{1}{p_1-1}}\right)^{p_j-1} +$$

$$+ \frac{\tau p}{T_1p_1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1}{p_1-1}}\left(1 - \alpha\left(\frac{T_1p_1}{x}\right)^{\frac{1}{p_1-1}}\right)^{p-1} = 1. \tag{12}$$

Оскільки $\alpha(x) = o\left(x^{\frac{1}{p_1-1}}\right)$, $x \to +\infty$, то з (12) випливає, що

$$1 - (p_1-1)\alpha\left(\frac{T_1p_1}{x}\right)^{\frac{1}{p_1-1}}(1+o(1)) + \frac{T_2p_2}{T_1p_1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1}{p_1-1}}(1+o(1)) = 1,$$

тобто

$$\alpha(x) = \frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}} + \beta(x), \tag{13}$$

де $\beta(x) = o(x^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}})$, $x \to +\infty$. Підставляючи (13) в (12), одержуємо

$$1-(p_1-1)\frac{T_2p_2}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}-(p_1-1)\beta(x)\left(\frac{T_1p_1}{x}\right)^{\frac{1}{p_1-1}}+O\left(x^{\frac{2(p_2-p_1)}{p_1-1}}\right)+$$

$$+\frac{T_2p_2}{T_1p_1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_2-p_1+1}{p_1-1}}+O\left(x^{\frac{2(p_2-p_1)}{p_1-1}}\right)+\sum_{j=3}^{m}\frac{T_jp_j}{T_1p_1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j-p_1}{p_1-1}}+\frac{\tau p}{T_1p_1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1}{p_1-1}}=1$$

і, оскільки $2(p_2-p_1)<p-p_1$, то

$$\beta(x)=\sum_{j=3}^{m}\frac{T_jp_j}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j-p_1+1}{p_1-1}}+\frac{(1+o(1))\tau p}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1+1}{p_1-1}},\ x\to+\infty,$$

тобто з (11) і (13) випливає (9). Лему 5 доведено. □

Оскільки $(x\Psi(\varphi(x)))'=\varphi(x)$, то $x\Psi(\varphi(x))=\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt+const$. Тому з (9) маємо

$$x\Psi(\varphi(x))=T_1(p_1-1)\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-\sum_{j=2}^{m}T_j\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}}-$$

$$-(1+o(1))\tau\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}},\quad x\to+\infty. \tag{14}$$

3. Асимптотичне поводження $G_1(t_k,t_{k+1},\Phi)$ і $G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)$. Легко перевірити, що $\Phi(\varphi(x))=x\varphi(x)-x\Psi(\varphi(x))=x\varphi(x)-\int_{x_0}^{x}\varphi(t)dt+const$, і з (9) випливає, що

$$\Phi(\varphi(x))=T_1\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-\sum_{j=2}^{m}\frac{T_j(p_j-p_1+1)}{p_1-1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}}-$$

$$-(1+o(1))\frac{\tau(p-p_1+1)}{p_1-1}\left(\frac{x}{T_1p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}},\quad x\to+\infty.$$

Тому, якщо $t_k\uparrow+\infty\,(n\to\infty)$ і $t_{k+1}=(1+\theta_n)t_k$, то

$$G_1(t_k,(1+\theta_k)t_k,\Phi)=T_1(p_1-1)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left((1+\theta_k)^{\frac{1}{p_1-1}}-1\right)-$$

$$-\sum_{j=2}^{m}T_j\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left((1+\theta_k)^{\frac{p_j-p_1+1}{p_1-1}}-1\right)-$$

$$-(1+o(1)\tau\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left((1+\theta_k)^{\frac{p-p_1+1}{p_1-1}}-1\right),\quad k\to\infty. \tag{15}$$

Якщо $\overline{\lim_{k\to\infty}}\theta_k=+\infty$, то для відповідної послідовності (k_j) з (15) одержуємо

$$G_1(t_{k_j},(1+\theta_{k_j})t_{k_j},\Phi)=(1+o(1))T_1(p_1-1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_{k_j}^{\frac{1}{p_1-1}},\quad j\to\infty, \tag{16}$$

якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\theta_k=\theta\in(0,+\infty)$, то для відповідної послідовності (k_j) при $j\to\infty$

$$G_1(t_{k_j},(1+\theta_{k_j})t_{k_j},\Phi)=(1+o(1))T_1(p_1-1)\left(\frac{t_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}\frac{1+\theta}{\theta}\left((1+\theta)^{\frac{1}{p_1-1}}-1\right). \quad (17)$$

Якщо ж $\theta_k\to 0\,(k\to\infty)$, то з (15) отримуємо

$$G_1(t_k,(1+\theta_k)t_k,\Phi)=T_1(p_1-1)\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left(1+\frac{1}{p_1-1}\theta_k+\frac{2-p_1}{2(p_1-1)^2}\theta_k^2+\right.$$
$$\left.+\frac{(2-p_1)(3-2p_1)}{6(p_1-1)^3}\theta_k^3+O(\theta_k^4)-1\right)-$$
$$-\sum_{j=2}^m T_j\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left(1+\frac{p_j-p_1+1}{p_1-1}\theta_k+\frac{p_j-2p_1+2}{2(p_1-1)^2}\theta_k^2+O(\theta_k^3)-1\right)-$$
$$-(1+o(1)\tau\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}}\frac{1+\theta_k}{\theta_k}\left(1+\frac{p-p_1+1}{p_1-1}\theta_k+O(\theta_k^2)-1\right)=$$
$$=T_1\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}+\frac{T_1p_1}{2(p_1-1)}\theta_k\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}+\frac{T_1p_1(2-p_1)}{6(p_1-1)^2}\theta_k^2\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-$$
$$-\sum_{j=2}^m\frac{T_j(p_j-p_1+1)}{p_1-1}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}}-\sum_{j=2}^m\frac{T_jp_j(p_j-p_1+1)}{2(p_1-1)^2}\theta_k\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}}-$$
$$-(1+o(1))\frac{\tau(p-p_1+1)}{p_1-1}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}}+O\left(\theta_k^3t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right)+O\left(\theta_k^2t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right),\quad k\to\infty. \quad (18)$$

Перейдемо до $G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)$. Позначимо

$$\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)=\frac{1}{t_{k+1}-t_k}\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}\varphi(t)dt.$$

Тоді, використовуючи лему 1, при $k\to\infty$ одержуємо

$$\varkappa(t_k,(1+\theta_k)t_k,\Phi)=\frac{p_1-1}{p_1}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}}\frac{(1+\theta_k)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-1}{\theta_k}-\sum_{j=2}^m\frac{T_j}{T_1p_1}\times$$
$$\times\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j-p_1+1}{p_1-1}}\frac{(1+\theta_k)^{\frac{p_j}{p_1-1}}-1}{\theta_k}-\frac{(1+o(1))\tau}{T_1p_1}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1+1}{p_1-1}}\frac{(1+\theta_k)^{\frac{p}{p_1-1}}-1}{\theta_k}, \quad (19)$$

і, оскільки $G_2(t_k,t_{k+1},\Phi)=\Phi(\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi))=(1+o(1))T_1\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi)^{p_1}$, $k\to\infty$, то, якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\theta_k=+\infty$, то для відповідної послідовності (k_j) отримаємо

$$G_2(t_{k_j},(1+\theta_{k_j})t_{k_j},\Phi)=(1+o(1))\left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^{p_1}\left(\frac{t_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}\theta_{k_j}^{\frac{p_1}{p_1-1}},\quad j\to\infty, \quad (20)$$

якщо $\overline{\lim\limits_{k\to\infty}}\theta_k = \theta \in (0, +\infty)$, то для відповідної послідовності (k_j) з (19) отримуємо

$$G_2(t_{k_j}, (1+\theta_{k_j})t_{k_j}, \Phi) = (1+o(1)) \left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^{p_1} \left(\frac{t_{k_j}}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \left(\frac{(1+\theta)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-1}{\theta}\right)^{p_1}, \quad (21)$$

$j\to\infty$. Якщо ж $\theta_k \to 0\,(k\to\infty)$, то з (19), як звичайно, одержуємо

$$\varkappa(t_k, (1+\theta_k)t_k, \Phi) = \left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{1}{p_1-1}} \Bigg\{1 + \frac{\theta_k}{2(p_1-1)} + \frac{2-p_1}{6(p_1-1)^2}\theta_k^2 + 0(\theta_k^3) -$$
$$- \sum_{j=2}^{m} \frac{T_jp_j}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j-p_1}{p_1-1}} - \sum_{j=2}^{m}\frac{T_jp_j(p_j-p_1+1)}{2T_1p_1(p_1-1)^2}\theta_k\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j-p_1}{p_1-1}} +$$
$$+ O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2-p_1}{p_1-1}}\right) - \frac{(1+o(1))\tau p}{T_1p_1(p_1-1)}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1}{p_1-1}}\Bigg\}, \quad k\to\infty. \quad (22)$$

Тому з огляду на умову $2(p_2-p_1) < p-p_1$, маємо

$$T_1\varkappa(t_k,(1+\theta_k)t_k,\Phi)^{p_1} = T_1\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} \Bigg\{1 + \frac{p_1\theta_k}{2(p_1-1)} + \frac{p_1(2-p_1)}{6(p_1-1)^2}\theta_k^2 -$$
$$- \sum_{j=2}^{m}\frac{T_jp_j}{T_1(p_1-1)}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j-p_1}{p_1-1}} - \sum_{j=2}^{m}\frac{T_jp_j(p_j-p_1+1)}{2T_1(p_1-1)^2}\theta_k\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j-p_1}{p_1-1}} -$$
$$- \frac{(1+o(1))\tau p}{T_1(p_1-1)}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p-p_1}{p_1-1}} + 0(\theta_k^3) + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2-p_1}{p_1-1}}\right) +$$
$$+ \frac{p_1\theta_k^2}{8(p_1-1)} - \sum_{j=2}^{m}\frac{T_jp_j}{2T_1(p_1-1)}\theta_k\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j-p_1}{p_1-1}} + O\left(t_k^{\frac{2(p_2-p_1)}{p_1-1}}\right)\Bigg\} =$$
$$= T_1\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \frac{T_1p_1}{2(p_1-1)}\theta_k\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \frac{T_1p_1(5-p_1)}{24(p_1-1)^2}\theta_k^2\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}} -$$
$$- \sum_{j=2}^{m}\frac{T_jp_j}{p_1-1}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}} - \sum_{j=2}^{m}\frac{T_jp_j^2}{2(p_1-1)^2}\theta_k\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}} -$$
$$- \frac{(1+o(1))\tau p}{p_1-1}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}} + O\left(\theta_k^3 t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right), \quad k\to\infty. \quad (23)$$

Для $j=2,\ldots,m$ з (19) отримуємо

$$T_j\varkappa(t_k,(1+\theta_k)t_k,\Phi)^{p_j} = T_j\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}}\left\{1 + \frac{p_j\theta_k}{2(p_1-1)} + O\left(\theta_k^2\right) + O\left(t_k^{\frac{p_2-p_1}{p_1-1}}\right)\right\} =$$
$$= T_j\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}} + \frac{T_jp_j}{2(p_1-1)}\theta_k\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}} + O\left(\theta_k^2 t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right) + O\left(t_k^{\frac{2p_2-p_1}{p_1-1}}\right), \quad k\to\infty.$$

і, подібно,

$$\tau\varkappa(t_k,(1+\theta_k)t_k,\Phi)^p=\tau\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}}(1+o(1)),\quad k\to\infty. \tag{24}$$

Об'єднуючи (21)–(24), отримуємо

$$G_2(t_k,(1+\theta_k)t_k,\Phi)=T_1\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}+$$
$$+\frac{T_1p_1}{2(p_1-1)}\theta_k\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}+\frac{T_1p_1(5-p_1)}{24(p_1-1)^2}\theta_k^2\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-$$
$$-\sum_{j=2}^m\frac{T_j(p_j-p_1+1)}{p_1-1}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}}-\sum_{j=2}^m\frac{T_jp_j(p_j-p_1+1)}{2(p_1-1)^2}\theta_k\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_j}{p_1-1}}-$$
$$-(1+o(1))\frac{\tau(p-p_1+1)}{p_1-1}\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p}{p_1-1}}+O\left(\theta_k^3\right)+O\left(\theta_k^2t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right),\quad k\to\infty. \tag{25}$$

З (18) і (25) випливає, що

$$G_2(t_k,(1+\theta_k)t_k,\Phi)-G_1(t_k,(1+\theta_k)t_k,\Phi)=\frac{T_1p_1}{8(p_1-1)}\theta_k^2\left(\frac{t_k}{T_1p_1}\right)^{\frac{p_1}{p_1-1}}+o\left(t_k^{\frac{p}{p_1-1}}\right)+$$
$$+O\left(\theta_k^3t_k^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right)+O\left(\theta_k^2t_k^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right),\quad k\to\infty. \tag{26}$$

Нехай тепер $\varepsilon\in(0,|\,\tau\,|)$ і

$$\Phi_1(\sigma)=T_1\sigma^{p_1}+\sum_{j=2}^mT_j\sigma^{p_j}+(\tau-\varepsilon)\sigma^p\quad(\sigma\geqslant\sigma_0)$$
$$\Phi_2(\sigma)=T_1\sigma^{p_1}+\sum_{j=2}^mT_j\sigma^{p_j}+(\tau+\varepsilon)\sigma^p\quad(\sigma\geqslant\sigma_0). \tag{27}$$

Припустимо, що $t_{k+1}=(1+\theta_k)t_k$ і для всіх $k\geqslant1$

$$G_1(t_k,t_{k+1},\Phi_1)\geqslant\Phi_1(\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi_2)). \tag{28}$$

Тоді $\Phi_1(\sigma)=\Phi_2(\sigma)-2\varepsilon\sigma^p$, $\Phi_2(\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi_2))=G_2(t_k,t_{k+1},\Phi_2)$ і, отже,

$$G_1(t_k,t_{k+1},\Phi_1)\geqslant G_2(t_k,t_{k+1},\Phi_2)-2\varepsilon\varkappa(t_k,t_{k+1},\Phi_2)^p. \tag{29}$$

Тому, якщо $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\theta_k=+\infty$, то з (16) і (19) для відповідної послідовності (k_j) маємо

$$(p_1-1)\theta_{k_j}^{\frac{1}{p_1-1}}\geqslant(1+o(1))\left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^{p_1}\theta_{k_j}^{\frac{p}{p-1}},\quad j\to\infty,$$

що неможливо, якщо $\varlimsup\limits_{k\to\infty}\theta_k=\theta\in(0,+\infty)$, то для відповідної послідовності (k_j) з (17) і (20) отримуємо

$$(p_1-1)\frac{1+\theta}{\theta}\left((1+\theta)^{\frac{1}{p_1-1}}-1\right)\geqslant\left(\frac{p_1-1}{p_1}\right)^{p_1}\left(\frac{(1+\theta)^{\frac{p_1}{p_1-1}}-1}{\theta}\right)^{p-1},$$

і, як показано в [3], ця нерівність також неможлива.

Отже, $\theta_k \to 0$ $(k \to +\infty)$, а в цьому випадку з (29), (18), (25) і (21) отримуємо

$$\theta_k^2 \leqslant \frac{2p\varepsilon}{T_1 p_1}(1+o(1))\left(\frac{t_k}{T_1 p_1}\right)^{\frac{p-p_1}{p_1-1}}, \quad k \to \infty. \tag{30}$$

4. Узагальнення теореми А. Правильна така теорема.

Теорема. *Для того, щоб для логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле виконувалось співвідношення (2), необхідно і достатньо, щоб для кожного* $\varepsilon > 0$:

1) існувало $n = n_0(\varepsilon)$ *таке, що для всіх* $n \geqslant n_0$

$$\ln|a_n| \leqslant -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \sum_{j=2}^{m} T_j\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p_j}{p_1-1}} + (\tau+\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_n}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p}{p_1-1}}; \tag{31}$$

2) існувала зростаюча послідовність (n_k) *натуральних чисел така, що*

$$\ln|a_{n_k}| \geqslant -T_1(p_1-1)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p_1}{p_1-1}} + \sum_{j=2}^{m} T_j\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p_j}{p_1-1}} + (\tau-\varepsilon)\Big(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\Big)^{\frac{p}{p_1-1}} \tag{32}$$

і виконувалось співвідношення (1).

Доведення. Почнемо з необхідності. З (2) випливає (4), де Φ_1 і Φ_2 визначені як у (27). Тому за лемою 4 правильні співідношення (5)–(7). З (5) і (6) з огляду на (14) випливають асимптотичні нерівності (31) і (32). Нарешті, з (7), тобто з (28) з огляду на рівність $\theta_k = \dfrac{\lambda_{n_{k+1}} - \lambda_{n_k}}{\lambda_{n_k}}$ неважко отримати (1).

Доведемо достатність умов (31), (32) і (1). За лемою 1 з огляду на (4) з (31), завдяки довільної $\varepsilon > 0$ легко отримуємо асимтотичну нерівність

$$\ln\mu(\sigma) \leqslant T_1\sigma^{p_1} + \sum_{j=2}^{m} T_j\sigma^{p_j} + (\tau+o(1))\sigma^p, \quad \sigma \to \infty. \tag{33}$$

Далі, за лемою 3 з огляду на (26) і (1) для всіх $\sigma \in [\varphi_1(\lambda_{n_k}), \varphi_1(\lambda_{n_{k+1}})]$ і $k \geqslant k_0$ одержуємо

$$\ln\mu(\sigma) \geqslant \Phi_1(\sigma) - \frac{T_1p_1\theta_k^2}{8(p_1-1)}\left(\frac{\lambda_{n_k}}{T_1p_1}\right) + O\left(\theta_k^3 \lambda_{n_k}{}^{\frac{p_1}{p_1-1}}\right) + O\left(\theta_k^2 \lambda_{n_k}{}^{\frac{p_2}{p_1-1}}\right) + o\left(\lambda_{n_k}{}^{\frac{p}{p_1-1}}\right) =$$
$$= \Phi_1(\sigma) + o\left(\lambda_{n_k}{}^{\frac{p}{p_1-1}}\right), \quad k \to \infty.$$

Але $\lambda_{n_k} \leqslant \Phi_1'(\sigma) \leqslant \lambda_{n_{k+1}}$ і, отже,

$$\ln\mu(\sigma) \geqslant \Phi_1(\sigma) + o\left(\Phi_1'(\sigma)^{\frac{p}{p_1-1}}\right) = \Phi_1(\sigma) + o\left(\sigma^p\right), \quad \sigma \to +\infty.$$

Тому з огляду на довільність ε отримуємо протилежну до (33) асимптотичну нерівність. Теорему повністю доведено. □

1. *Шеремета М.Н.* Двучленная асимптотика целых рядов Дирихле / *Шеремета М.Н.* // Теория функций, функ. анал. и их прилож. – 1990. – №54. – С. 16-25.
2. *Тарасюк Р.І.* Про двочленну асимптотику цілих функцій, представлених степеневими рядами / *Тарасюк Р.І.* // Волинський мат. вісн. – 1995. – №2. – С. 162-164.

3. *Шеремета М.М.* Тричленна степенева асимптотика логарифма максимального члена цілого ряду Діріхле / *Шеремета М.М., Лугова Л.Л.* // Мат. студії. – 2006. – Т. 25, №2. – С. 149-168.
4. *Sumyk O.M.* On n-member asymptotics for logarithm of maximal term of entire Dirichlet series / *Sumyk O.M.* // Мат. студії. – 2001. – Т. 15, №2. – С. 200-208.
5. *Шеремета М.Н.* О производной ряда Дирихле / *Шеремета М.Н., Федыняк С.И.* // Сиб. мат. журн. – 1998. – Т. 39, №1. – С. 206-223.
6. *Шеремета М.М.* Зв'язок між зростанням спряжених за Юнгом функцій / *Шеремета М.М., Сумик О.М.* // Мат. студії. – 1999. – Т. 11, №1. – С. 41-47.
7. *Заболоцький М.В.* Узагальнення теореми Ліндельофа / *Заболоцький М.В., Шеремета М.М.* // Укр. мат. журн. – 1998. – Т. 50, №9. – С. 1177-1192.

ON POLYTERMED POWER ASYMPTOTIC OF THE LOGARITHM OF MAXIMAL TERM FOR ENTIRE DIRICHLET SERIES

Lyubomyra LUHOVA[1], Myroslav SHEREMETA[2]

[1] *Institute of Entrepreneurship and Technology Policy*
79044 L'viv, Horbachevsky Str., 18
e-mail: Lyubomyrka@ukr.net
[2] *Ivan Franko National University of L'viv,*
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru

For an entire Dirichlet series $F(s) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ $(s = \sigma + it)$ it is investigated condition on a_n and λ_n, under which the logarithm of its maximal term has the asymptotic $\ln \mu(\sigma) = \sum\limits_{j=1}^{m} T_j \sigma^{p_j} + (1 + o(1))\tau\sigma^p$, $\sigma \to +\infty$, where $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $p > 2p_2 - p_1$, $T_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ and $0 < p < p_m < \dots < p_2 < p_1$.

Key words: Dirichlet series, maximal term, polytermed asymptotic.

О МНОГОЧЛЕННОЙ СТЕПЕННОЙ АСИМПТОТИКЕ ЛОГАРИФМА МАКСИМАЛЬНОГО ЧЛЕНА ЦЕЛОГО РЯДА ДИРИХЛЕ

Любомира ЛУГОВАЯ[1], Мирослав ШЕРЕМЕТА[2]

[1] *Институт предпринимательства и перспективных технологий,*
79044 Львов, ул. Горбачевского, 18
e-mail: Lyubomyrka@ukr.net

[2] *Львовский национальный университет имени Ивана Франко,*
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: M_M_Sheremeta@list.ru

Для целого ряда Дирихле $F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \exp\{s\lambda_n\}$ $(s = \sigma + it)$ исследованы условия на a_n и λ_n, при выполнении которых его максимальный член обладал асимптотикой $\ln\mu(\sigma) = \sum_{j=1}^{m} T_j\sigma^{p_j} + (1+o(1))\tau\sigma^p$, $\sigma \to +\infty$, где $T_1 > 0$, $p_1 > 1$, $p > 2p_2 - p_1$, $T_j \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, $\tau \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ и $0 < p < p_m < \cdots < p_2 < p_1$.

Ключевые слова: ряд Дирихле, максимальный член, многочленная асимптотика.

Стаття надійшла до редколегії 22.01.2010

Прийнята до друку 22.12.2010