ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2010.
Вип. 72. С. 149–157

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2010.
Is. 72. P. 149–157

УДК 517.95

ОБЕРНЕНА ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОВИМІРНОГО ПАРАБОЛІЧНОГО РІВНЯННЯ ЗАГАЛЬНОГО ВИГЛЯДУ

Микола ІВАНЧОВ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ivanchov@franko.lviv.ua

Розглянуто обернену задачу визначення залежного від часу невідомого множника старшого коефіцієнта лінійного параболічного рівняння загального вигляду. Знайдено умови існування та єдиності класичного розв'язку. В доведенні використано знайдені в праці оцінки функції Гріна, що залежать від невідомого коефіцієнта.

Ключові слова: обернена задача, параболічне рівняння загального вигляду, функція Гріна.

Розглянуто задачу визначення невідомої функції $a_0 = a_0(t)$ у параболічному рівнянні

$$u_t = a_0(t)a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + f(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{1}$$

де $Q_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < h,\ 0 < t < T\}$. У випадку $a(x,t) \equiv 1$ аналогічна обернена задача достатньо повно вивчена як для локальних, так і нелокальних крайових умов [1], [2]. Метод, застосований у цих працях, ґрунтувався на побудові в явному вигляді функції Гріна для рівняння теплопровідності

$$u_t = a_0(t)u_{xx} + f(x,t).$$

У дослідженні оберненої задачі в цій праці використовують функцію Гріна для рівняння (1) та її оцінки.

1. Формулювання задачі. Розглянемо обернену задачу визначення коефіцієнта $a_0(t) > 0, t \in [0,T]$ в рівнянні (1), коли задані початкова умова

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad x \in [0,h], \tag{2}$$

крайові умови

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(h,t) = \mu_2(t), \quad t \in [0,T] \tag{3}$$

та додаткова умова
$$a_0(t)u_x(0,t)=\mu_3(t), \quad t\in[0,T]. \tag{4}$$
Розв'язок задачі (1)-(4) розумітимемо у класичному сенсі, вважаючи, що функції $(a_0(t),u(x,t))$ належать до класу $C([0,T])\times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$, $a_0(t)>0$, $t\in[0,T]$.

Надалі вважатимемо, що справджуються такі припущення:

(A1): $\varphi\in C^2([0,h])$, $\mu_i\in C^1([0,T])$, $i=1,2$, $\mu_3\in C([0,T])$, *функції* b, c, f *належать до класу* $C(\overline{Q}_T)$ *і за змінною* x *задовольняють умову Гельдера з показником* β, $0<\beta<1$, $a\in H^{\beta,\beta/2}(\overline{Q}_T)$*;*

(A2): $a(x,t)>0$, $(x,t)\in\overline{Q}_T$, $\varphi'(0)>0$, $\mu_3(t)>0$, $t\in[0,T]$;

(A3): $\varphi(0)=\mu_1(0)$, $\varphi(h)=\mu_2(0)$, $\mu_1'(0)=\dfrac{\mu_3(0)}{\varphi'(0)}a(0,0)\varphi''(0)+b(0,0)\varphi'(0)+$
$+c(0,0)\varphi(0)$, $\mu_2'(0)=\dfrac{\mu_3(0)}{\varphi'(0)}a(h,0)\varphi''(h)+b(h,0)\varphi'(h)+c(h,0)\varphi(h)$.

2. Зведення задачі (1)-(4) до еквівалентного рівняння. Для побудови розв'язку прямої задачі (1)-(3) зробимо заміну невідомої функції
$$u(x,t)=v(x,t)+\varphi(x)+\mu_1(t)-\mu_1(0)+\frac{x}{h}(\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0)).$$
Для функції $v=v(x,t)$ отримаємо задачу
$$v_t=a_0(t)a(x,t)v_{xx}+b(x,t)v_x+c(x,t)v+f(x,t)-\mu_1'(t)-\frac{x}{h}(\mu_2'(t)-\mu_1'(t))+$$
$$+a_0(t)a(x,t)\varphi''(x)+b(x,t)\left(\varphi'(x)+\frac{1}{h}(\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0))\right)+$$
$$+c(x,t)\left(\varphi(x)+\mu_1(t)-\mu_1(0)+\frac{x}{h}(\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0))\right),\ (x,t)\in Q_T, \tag{5}$$
$$v(x,0)=0, \quad x\in[0,h], \tag{6}$$
$$v(0,t)=v(h,t)=0, \quad t\in[0,T]. \tag{7}$$
Вважаючи тимчасово функцію $a_0(t)>0, t\in[0,T]$ відомою, позначимо через $G(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна задачі (5)-(7) [1]. Розв'язуючи задачу (5)-(7) за допомогою функції Гріна і повертаючись до функції $u(x,t)$, отримуємо розв'язок задачі (1)-(3)
$$u(x,t)=\varphi(x)+\mu_1(t)-\mu_1(0)+\frac{x}{h}(\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0))+$$
$$+\int_0^t\int_0^h G(x,t,\xi,\tau)\Big(f(\xi,\tau)-\mu_1'(\tau)-\frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))+a_0(\tau)a(\xi,\tau)\varphi''(\xi)+$$
$$+b(\xi,\tau)\left(\varphi'(\xi)+\frac{1}{h}(\mu_2(\tau)-\mu_2(0)-\mu_1(\tau)+\mu_1(0))\right)+c(\xi,\tau)\Big(\varphi(\xi)+\mu_1(\tau)-$$
$$-\mu_1(0)+\frac{\xi}{h}(\mu_2(\tau)-\mu_2(0)-\mu_1(\tau)+\mu_1(0))\Big)\Big)d\xi d\tau, \quad (x,t)\in\overline{Q}_T. \tag{8}$$
Звідси знаходимо
$$u_x(0,t)=\varphi'(0)+\frac{1}{h}(\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0))+$$

$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_x(0,t,\xi,\tau)\Bigg(f(\xi,\tau)-\mu_1'(\tau)-\frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))+a_0(\tau)a(\xi,\tau)\varphi''(\xi)+$$
$$+b(\xi,\tau)\left(\varphi'(\xi)+\frac{1}{h}(\mu_2(\tau)-\mu_2(0)-\mu_1(\tau)+\mu_1(0))\right)+c(\xi,\tau)\Bigg(\varphi(\xi)+\mu_1(\tau)-$$
$$-\mu_1(0)+\frac{\xi}{h}(\mu_2(\tau)-\mu_2(0)-\mu_1(\tau)+\mu_1(0))\Bigg)\Bigg)d\xi d\tau,\quad (x,t)\in\overline{Q}_T. \tag{9}$$

З (9) випливає існування деякого числа t_0, $0<t_0<T$, такого, що на проміжку $[0,t_0]$ будемо мати

$$u_x(0,t)\geq\frac{1}{2}\,\varphi'(0). \tag{10}$$

Тоді задача (1)-(4) зводиться до рівняння

$$a_0(t)=\mu_3(t)\Bigg(\varphi'(0)+\frac{1}{h}(\mu_2(t)-\mu_2(0)-\mu_1(t)+\mu_1(0))+$$
$$+\int\limits_0^t\int\limits_0^h G_x(0,t,\xi,\tau)\Bigg(f(\xi,\tau)-\mu_1'(\tau)-\frac{\xi}{h}(\mu_2'(\tau)-\mu_1'(\tau))+a_0(\tau)a(\xi,\tau)\varphi''(\xi)+$$
$$+\,b(\xi,\tau)\left(\varphi'(\xi)+\frac{1}{h}(\mu_2(\tau)-\mu_2(0)-\mu_1(\tau)+\mu_1(0))\right)+c(\xi,\tau)\Bigg(\varphi(\xi)+\mu_1(\tau)-$$
$$-\mu_1(0)+\frac{\xi}{h}(\mu_2(\tau)-\mu_2(0)-\mu_1(\tau)+\mu_1(0))\Bigg)\Bigg)d\xi d\tau\Bigg)^{-1},\quad t\in[0,t_0]. \tag{11}$$

Для дослідження існування розв'язку рівняння (11) використаємо теорему Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора, застосування якої передбачає наявність апріорних оцінок розв'язків рівняння (11). Їх отримання пов'язане з оцінками функції Гріна.

3. Побудова й оцінки функції Гріна задачі (1)-(3) та її похідної. Відомо [1], що при зроблених припущеннях і відомій функції $a_0\in C[0,T], a(t)>0, t\in[0,T]$, функція Гріна задачі (1)-(3) існує і може бути побудована методом параметрикса. Проте для отримання оцінок функції Гріна, які б містили залежність від невідомого коефіцієнта $a_0(t)$, проведемо її побудову у два етапи.

Позначимо через $G_0(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна для рівняння

$$u_t=a_0(t)a(x,t)u_{xx},\quad (x,t)\in Q_T, \tag{12}$$

з умовами (2), (3). Після заміни часової змінної $\sigma=\theta(t)$, де $\theta(t)\equiv\int_0^t a_0(\tau)d\tau$, рівняння (12) набуде вигляду

$$v_\sigma=\widetilde{a}(x,\sigma)v_{xx}, \tag{13}$$

в якому $v=v(x,\sigma)$ – нова невідома функція, а $\widetilde{a}(x,\theta(t))\equiv a(x,t)$. Для першої похідної функції Гріна $\widetilde{G}_0(x,\sigma,\xi,s)$ першої крайової задачі для рівняння (13) справджується оцінка [3, с. 469]

$$\left|\widetilde{G}_{0x}(x,\sigma,\xi,s)\right|\leq\frac{C_1}{\sigma-s}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_2(\sigma-s)}\right).$$

Звідси, повертаючись до старих змінних, отримуємо

$$|G_{0x}(x,t,\xi,\tau)| \le \frac{C_1}{\theta(t)-\theta(\tau)} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_2(\theta(t)-\theta(\tau))}\right), \tag{14}$$

де $\theta(t) = \int_0^t a_0(y)dy$.

Функцію Гріна $G(x,t,\xi,\tau)$ першої крайової задачі для рівняння (1) будемо шукати у вигляді

$$G(x,t,\xi,\tau) = G_0(x,t,\xi,\tau) + \int\limits_\tau^t \int\limits_0^h G_0(x,t,\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta d\sigma, \tag{15}$$

де $\Phi(x,t,\xi,\tau)$ – невідома функція, для знаходження якої отримуємо рівняння [1]

$$\Phi(x,t,\xi,\tau) = -LG_0(x,t,\xi,\tau) - \int\limits_\tau^t \int\limits_0^h LG_0(x,t,\eta,\sigma)\Phi(\eta,\sigma,\xi,\tau)d\eta d\sigma, \tag{16}$$

в якому

$$L \equiv \frac{\partial}{\partial t} - a_0(t)a(x,t)\frac{\partial^2}{\partial x^2} - b(x,t)\frac{\partial}{\partial x} - c(x,t).$$

З означення функції $G_0(x,t,\xi,\tau)$ випливає, що

$$LG_0(x,t,\xi,\tau) = -b(x,t)G_{0x}(x,t,\xi,\tau) - c(x,t)G_0(x,t,\xi,\tau).$$

Вважаючи відомою оцінку

$$a_0(t) \le A_1 < \infty, \quad t \in [0,T],$$

з (14) отримуємо

$$|LG_0(x,t,\xi,\tau)| \le \frac{C_3}{\theta(t)-\theta(\tau)} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_2(\theta(t)-\theta(\tau))}\right). \tag{17}$$

Введемо позначення

$$a_{\min}(t) \equiv \min_{0\le\tau\le t} a_0(\tau).$$

Тоді оцінка (17) набуде вигляду

$$|LG_0(x,t,\xi,\tau)| \le \frac{C_3}{a_{\min}(t)(t-\tau)} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_4(t-\tau)}\right). \tag{18}$$

Застосуємо до рівняння (16) метод послідовних наближень. Тоді його розв'язок набуде вигляду

$$\Phi(x,t,\xi,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}(LG_0(x,t,\xi,\tau))_n, \tag{19}$$

де повторні ядра визначаються так:

$$(LG_0(x,t,\xi,\tau))_0 = -LG_0(x,t,\xi,\tau),$$

$$(LG_0(x,t,\xi,\tau))_n = -\int\limits_\tau^t \int\limits_0^h LG_0(x,t,\eta,\sigma)(LG_0(\eta,\sigma,\xi,\tau))_{n-1}d\eta d\sigma, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Для оцінки повторних ядер застосуємо таку лему.

Лема 3 [4, с. 69]. Якщо $-\infty < \alpha < \dfrac{n}{2}, -\infty < \beta < \dfrac{n}{2}$, то

$$\int\limits_{\sigma}^{t}\int\limits_{\mathbb{R}^n}(t-\tau)^{-\alpha}\exp\left[-\frac{h|x-\xi|^2}{4(t-\tau)}\right](\tau-\sigma)^{-\beta}\exp\left[-\frac{h|\xi-y|^2}{4(\tau-\sigma)}\right]d\xi d\tau =$$

$$= \left(\frac{4\pi}{h}\right)^{\frac{n}{2}} B\left(\frac{n}{2}-\alpha+1, \frac{n}{2}-\beta+1\right)(t-\sigma)^{\frac{n}{2}+1-\alpha-\beta}\exp\left[-\frac{h|x-y|^2}{4(t-\sigma)}\right].$$

Використовуючи лему 3, отримуємо

$$|(LG_0(x,t,\xi,\tau))_1| \le \frac{C_3^2C_5}{a^2_{\min}(t)\sqrt{t-\tau}}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{C_4(t-\tau)}\right),$$

$$|(LG_0(x,t,\xi,\tau))_2| \le \frac{C_3^3C_5^2}{a^3_{\min}(t)\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^3\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{C_4(t-\tau)}\right),$$

$$|(LG_0(x,t,\xi,\tau))_n| \le \frac{C_3^{n+1}C_5^n(t-\tau)^{n/2-1}}{a^{n+1}_{\min}(t)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^{n+1}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{C_4(t-\tau)}\right),\ n\in\mathbb{N}.$$

Звідси випливає оцінка

$$|\Phi(x,t,\xi,\tau)| \le$$

$$\le \frac{C_3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{a_{\min}(t)(t-\tau)}\exp\left(-\frac{|x-\xi|^2}{C_4(t-\tau)}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{C_3C_5\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{t-\tau}}{a_{\min}(t)}\right)^n\frac{1}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \qquad (20)$$

Зважаючи на те, що при $n=2k$ одержуємо

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma\left(k+\frac{1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^k}(2k-1)!!,$$

а при $n=2k+1$

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) = \Gamma(k+1) = k!,$$

знаходимо

$$|\Phi(x,t,\xi,\tau)| \le \frac{C_6}{a^2_{\min}(t)(t-\tau)}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_4(t-\tau)}+\frac{C_7}{a^2_{\min}(t)}\right). \qquad (21)$$

Використовуючи оцінку (21) та застосовуючи наведену лему 3 [4], з (16) отримуємо оцінку функції Гріна першої крайової задачі для рівняння (1)

$$G(x,t,\xi,\tau) \le \left(\frac{C_8}{\sqrt{a_{\min}(t)(t-\tau)}}+\frac{C_9}{a^{5/2}_{\min}(t)}\exp\left(\frac{C_7}{a^2_{\min}(t)}\right)\right)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_4(t-\tau)}\right). \qquad (22)$$

Аналогічно оцінюємо похідну функції Гріна

$$|G_x(x,t,\xi,\tau)| \le$$

$$\le \left(\frac{C_{10}}{a_{\min}(t)(t-\tau)}+\frac{C_{11}}{a^3_{\min}(t)\sqrt{t-\tau}}\exp\left(\frac{C_7}{a^2_{\min}(t)}\right)\right)\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_4(t-\tau)}\right). \qquad (23)$$

4. Існування розв'язку задачі (1)-(4). Знайдемо апріорні оцінки розв'язків рівняння (11). Враховуючи (10), з рівняння (11) отримуємо

$$a_0(t) \leq A_1 < \infty, \quad t \in [0, t_0], \tag{24}$$

де число A_1 визначається заданими величинами.

Використовуючи оцінку похідної функції Гріна (23), з рівняння (11) знаходимо

$$a_{\min}(t) \geq C_{12} \left(C_{13} + \int_0^t \int_0^h \left(\frac{C_{14}}{a_{\min}(t)(t-\tau)} + \frac{C_{15}}{a_{\min}^2(t)\sqrt{t-\tau}} \exp\left(\frac{C_7}{a_{\min}^2(t)}\right)\right) \times \right.$$
$$\left. \times \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_4(t-\tau)}\right) d\xi d\tau \right)^{-1}, \quad t \in [0, t_0].$$

Звідси з врахуванням оцінки

$$\frac{1}{\sqrt{t-\tau}} \int_0^h \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{C_4(t-\tau)}\right) d\xi \leq C_{16}$$

випливає нерівність

$$C_{13} a_{\min}(t) + C_{17}\sqrt{t} + \frac{C_{18} t}{a_{\min}(t)} \exp\left(\frac{C_7}{a_{\min}^2(t)}\right) - C_{12} \geq 0, \quad t \in [0, t_0]. \tag{25}$$

Нехай число t_1, $0 < t_1 \leq T$, таке, що виконується нерівність

$$C_{17}\sqrt{t} + \frac{C_{18} t}{a_{\min}(t)} \exp\left(\frac{C_7}{a_{\min}^2(t)}\right) \leq \frac{1}{2} C_{12}, \quad t \in [0, t_1]. \tag{26}$$

Тоді з (25) отримуємо оцінку

$$a_{\min}(t) \geq A_0 > 0, \quad t \in [0, t_1],$$

або

$$a(t) \geq A_0 > 0, \quad t \in [0, t_1], \tag{27}$$

де число A_0 визначається відомими величинами.

Для застосування теореми Шаудера про нерухому точку цілком неперервного оператора до рівняння (11) розглянемо множину $\mathcal{N} \equiv \{a \in C[0, T_0] : A_0 \leq a(t) \leq A_1\}$, де $T_0 = \min\{t_0, t_1\}$, і подамо рівняння (11) у вигляді

$$a(t) = Pa(t). \tag{28}$$

Внаслідок оцінок (24), (27) оператор P переводить опуклу й замкнену множину $\mathcal{N}$ в себе. Те, що оператор P є цілком неперервним на множині $\mathcal{N}$, доведено в [5]. Тому існує принаймні одна нерухома точка оператора P, що належить множині $\mathcal{N}$. Це означає, що існує розв'язок $(a(t), u(x,t))$ задачі (1)-(4), визначений при $x \in [0, h]$, $t \in [0, T_0]$. Отже, доведено таку теорему.

Теорема 1. *Припустимо, що виконуються умови **(A1)-(A3)**. Тоді існує розв'язок $(a(t), u(x,t))$ задачі (1)-(4), що належить до класу $C([0, T_0]) \times C^{2,1}(\overline{Q}_{T_0})$.*

Теорема 1 доводить існування розв'язку задачі (1)-(4), локального за часом. Умови існування глобального за часом розв'язку задачі (1)-(4) дає така теорема.

Теорема 2. *Припустимо, що, крім умов **(A1)**, **(A3)**, виконується умова* ***(A4):*** $\varphi''(x) \geq 0$, $x \in [0, h]$; $\mu_3(t) > 0$, $b(0, t) < 0$, $b(h, t) > 0$, $\varphi'(0) + \dfrac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0)) > 0$, $\mu_1'(t) - c(0, t)\mu_1(t) - f(0, t) < 0$, $\mu_2'(t) - c(h, t)\mu_2(t) - f(h, t) > 0$, $t \in [0, T]$; $a(x, t) > 0$, $f(x, t) - \mu_1'(t) - \dfrac{x}{h}(\mu_2'(t) - \mu_1'(t)) + b(x, t)(\varphi'(x) + \dfrac{1}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0))) + c(x, t)(\varphi(x) + \mu_1(t) - \mu_1(0) + \dfrac{x}{h}(\mu_2(t) - \mu_2(0) - \mu_1(t) + \mu_1(0))) \geq 0$, $(x, t) \in \overline{Q}_T$.
Тоді існує розв'язок $(a(t), u(x, t))$ *задачі (1)-(4), що належить до класу* $C([0, T]) \times C^{2,1}(\overline{Q}_T)$.

Доведення. З того, що $G(0, t, \xi, \tau) = 0$ та $G(x, t, \xi, \tau) > 0$, $x \in (0, h)$, $\xi \in (0, h)$, $0 < \tau < t < T$, отримуємо $G_x(0, t, \xi, \tau) \geq 0, \xi \in (0, h), 0 < \tau < t < T$. Тому з припущень **(A4)** та рівності (9) випливає оцінка

$$u_x(0, t) \geq M_1 > 0, \quad t \in [0, T], \tag{29}$$

де стала M_1 визначається вихідними даними.

Для того, щоб оцінити $u_x(x, t)$ зверху, утворимо задачу стосовно функції $v(x, t) \equiv u_x(x, t)$. Для цього продиференціюємо за змінною x рівняння (1) та початкову умову (2). Крайові умови для функції $v(x, t)$ знайдемо з рівняння (1) та крайових умов (3). Внаслідок цього отримуємо таку задачу стосовно $v(x, t)$:

$$v_t = a_0(t)a(x, t)v_{xx} + (b(x, t) + a_0(t)a_x(x, t))v_x + (c(x, t) + b_x(x, t))v + \\ + c_x(x, t)u + f_x(x, t), \quad (x, t) \in Q_T, \tag{30}$$

$$v(x, 0) = \varphi'(x), \quad x \in [0, h], \tag{31}$$

$$a_0(t)a(0, t)v_x(0, t) + b(0, t)v(0, t) = \mu_1'(t) - c(0, t)\mu_1(t) - f(0, t), \quad t \in [0, T], \tag{32}$$

$$a_0(t)a(h, t)v_x(h, t) + b(h, t)v(h, t) = \mu_2'(t) - c(h, t)\mu_2(t) - f(h, t), \quad t \in [0, T]. \tag{33}$$

Застосовуючи принцип максимуму [4] спочатку до задачі (1)-(3), а потім до (30)-(33), доводимо оцінку

$$u_x(0, t) \leq M_2 < \infty, \quad t \in [0, T], \tag{34}$$

в якій стала M_2 визначається вихідними даними. Після отримання оцінок (29), (34) для доведення теореми 2 достатньо повторити міркування, наведені в доведенні теореми 1. □

5. Єдиність розв'язку задачі (1)-(4).

Теорема 3. *Припустимо, що виконується умова* $\mu_3(t) \neq 0$, $t \in [0, T]$. *Тоді задача (1)-(4) не може мати більше одного розв'язку* $(a_0(t), u(x, t))$ *з класу* $C([0, T]) \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$ *такого, що* $a_0(t) > 0$, $t \in [0, T]$.

Доведення. Припустимо, що задача (1)-(4) має два розв'язки $(a_{0,k}(t), u_k(x, t))$, $k = 1, 2$, з класу $C([0, T]) \times C^{2,1}(Q_T) \cap C^{1,0}(\overline{Q}_T)$. Позначимо $a_0(t) \equiv a_{0,1}(t) - a_{0,2}(t)$, $u(x, t) \equiv u_1(x, t) - u_2(x, t)$. З (1)-(4) випливає, що пара функцій $(a_0(t), u(x, t))$ є розв'язком такої задачі:

$$u_t = a_{0,1}(t)a(x,t)u_{xx} + b(x,t)u_x + c(x,t)u + a_0(t)u_{2_{xx}}(x,t), \quad (x,t) \in Q_T, \tag{35}$$

$$u(x,0) = 0, \quad x \in [0,h], \tag{36}$$

$$u(0,t) = u(h,t) = 0, \quad t \in [0,T], \tag{37}$$

$$a_{0,1}(t)u_x(0,t) = -a_0(t)u_{2_x}(0,t), \quad t \in [0,T]. \tag{38}$$

Позначимо через $G^\star(x,t,\xi,\tau)$ функцію Гріна задачі (35)-(37). Тоді розв'язок задачі (35)-(37) набуде вигляду

$$u(x,t) = \int\limits_0^t \int\limits_0^h G^\star(x,t,\xi,\tau)a_0(\tau)a(\xi,\tau)u_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{39}$$

Підставимо його в умову (38)

$$a_0(t)u_{2_x}(0,t) = -a_{0,1}(t)\int\limits_0^t \int\limits_0^h G_x^\star(0,t,\xi,\tau)a_0(\tau)a(\xi,\tau)u_{2_{\xi\xi}}(\xi,\tau)d\xi d\tau, \quad (x,t) \in \overline{Q}_T. \tag{40}$$

З умови теореми випливає, що $u_{2_x}(0,t) \neq 0,\ t \in [0,T]$. Тому (40) є однорідним інтегральним рівнянням Вольтерра другого роду, яке має єдиний тривіальний розв'язок $a_0(t) \equiv 0,\ t \in [0,T]$. Підставляючи його в рівняння (35), отримуємо однорідне рівняння з однорідними умовами (36), (37). Отже, $u(x,t) \equiv 0,\ (x,t) \in \overline{Q}_T$. Теорему доведено. $\square$

1. *Ivanchov M.* Inverse problems for equations of parabolic type / *Ivanchov M.* – Lviv, 2003.
2. *Березницька І.Б.* Обернена задача для параболічного рівняння з нелокальною умовою перевизначення / *Березницька І.Б.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, №1. – С. 54-62.
3. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа / *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н., Солонников В.А.* – М., 1967.
4. *Фридман А.* Уравнения с частными производными параболического типа / *Фридман А.* – М., 1968.
5. *Снітко Г.А.* Обернена задача для параболічного рівняння в області з вільною межею / *Снітко Г.А.* // Мат. методи та фіз.-мех. поля. – 2007. – Т. 50, №4. – С. 7-18.

AN INVERSE PROBLEM FOR A GENERAL ONE-DIMENSIONAL PARABOLIC EQUATION

Mykola IVANCHOV

Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ivanchov@franko.lviv.ua

In the paper we consider an inverse problem for determining a time-dependent unknown multiplier of the major coefficient of a general linear parabolic equation. The conditions for existence and uniqueness of the classical solution are found. In the proof the estimates of the Green function which depend on the unknown coefficient and which are established in this work, are applied.

Key words: inverse problem, general parabolic equation, Green function.

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ОДНОМЕРНОГО ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ОБЩЕГО ВИДА

Николай ИВАНЧОВ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ivanchov@franko.lviv.ua

Рассмотрено обратную задачу определения зависящего от времени неизвестного множителя старшего коэффициента линейного параболического уравнения общего вида. Найдено условия существования и единственности классического решения. В доказательстве использованы установленные в работе оценки функции Грина, зависящие от неизвестного коэффициента.

Ключевые слова: обратная задача, параболическое уравнение общего вида, функция Грина.

Стаття надійшла до редколегії 13.04.2010

Прийнята до друку 22.12.2010