ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2010.
Вип. 72. С. 134–148

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2010.
Is. 72. P. 134–148

УДК 519.21

ОПТИМІЗАЦІЯ СЕРЕДНЬОГО ЧАСУ ОЧІКУВАННЯ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПУ M/M/1/m З БЛОКУВАННЯМ ВХІДНОГО ПОТОКУ ТА ПЕРЕМИКАННЯМ РЕЖИМІВ ОБСЛУГОВУВАННЯ

Костянтин ЖЕРНОВИЙ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com*

Вивчено системи обслуговування M/M/1/m з пороговим блокуванням вхідного потоку та з відновлюючим рівнем потоку замовлень, в яких на час блокування змінюється інтенсивність обслуговування. Для кожної з систем розв'язано задачі оптимізації середнього часу очікування за параметрами $\gamma = \mu_1/\mu_2$, h і m, де μ_1, μ_2 – інтенсивності обслуговування в звичайному режимі та в режимі блокування, відповідно, h – поріг блокування.

Ключові слова: система M/M/1/m, блокування вхідного потоку, перемикання режимів обслуговування, оптимізація середнього часу очікування.

1. Вступ. У [1] вивчено систему обслуговування M/M/1/m, в якій у момент початку обслуговування чергового замовлення за умови перевищення кількості замовлень у системі заданого порогового рівня h починається блокування потоку замовлень, що триває аж до зменшення кількості замовлень до числа $n \leqslant h$ і припиняється в момент початку обслуговування чергового замовлення. В момент початку блокування вхідного потоку змінюється інтенсивність обслуговування. Якщо інтенсивність збільшується, то кажуть, що система переходить на "швидке" обслуговування. З припиненням блокування вхідного потоку відбувається перехід на звичну інтенсивність обслуговування.

Для описаної системи обслуговування в [1] розв'язано задачі мінімізації вартісних функціоналів, які характеризують ефективність функціонування системи. Далі ми розглянемо оптимізаційні задачі для однієї з найважливіших стаціонарних характеристик систем обслуговування з чергою – середнього часу очікування $\overline{t}_r$, які належать до класу задач оптимального синтезу систем з заданими характеристиками [2].

Сформулюємо одну з таких задач, яку назвемо **задачею "h"**: *зафіксувавши всі інші параметри, від яких залежить середній час очікування, вибрати значення параметра h таким, щоб у стаціонарному режимі середній час очікування $\overline{t}_r$ не перевищував задане число τ.*

Якщо зможемо з'ясувати, що функція $\overline{t}_r(h)$ є, наприклад, зростаючою, то алгоритм для визначення найбільшого значення параметра h, яке б гарантувало потрібне значення середнього часу очікування, виглядатиме так:

$$h_{\max} = \max\{\, h \in \mathbb{N} : \ \overline{t}_r(h) \leq \tau \,\}.$$

Отже, з'ясування умов монотонності $\overline{t}_r$ як функції шуканого параметра системи відкриває шлях до розв'язання задачі оптимізації. Тому далі ми дослідимо на монотонність функції $\overline{t}_r(h)$ та $\overline{t}_r(m)$, де m – максимальна дозволена довжина черги.

У [3, 4] вивчали системи типу M/G/1/m та M/M/n/m з відновлювальним рівнем вхідного потоку. Якщо довжина черги досягає числа m, то надходження замовлень у таку систему блокується і відновлюється в момент початку обслуговування того замовлення, для якого кількість замовлень у системі не перевищує заданий пороговий рівень $h \in [1;\, m-1]$.

Далі ми розглянемо систему M/M/1/m з відновлювальним рівнем вхідного потоку, в якій на час блокування потоку замовлень змінюється інтенсивність обслуговування. Для такої системи дослідимо задачі оптимізації середнього часу очікування.

2. Середній час очікування для системи з пороговим блокуванням вхідного потоку. Розглянемо одноканальну систему обслуговування, для якої довжина черги не може перевищувати число m. Замовлення в систему надходять по одному, а проміжки часу між моментами надходження замовлень – незалежні випадкові величини, розподілені за показниковим законом з параметром λ.

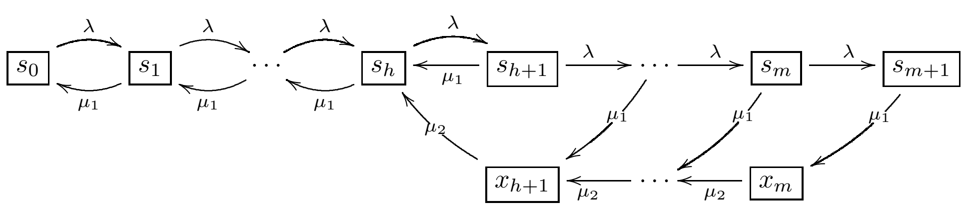

Рис. 1

Обслуговування замовлень може відбуватись у двох режимах. Час обслуговування в кожному з них розподілений за показниковим законом з параметрами μ_1 і μ_2, відповідно. Якщо $\mu_1 < \mu_2$, то перший режим "повільний", а другий "швидкий". Обслуговування з інтенсивністю μ_2 відбувається за умови, що в момент t початку обслуговування чергового замовлення $n(t) > h$, де $n(t)$ – кількість замовлень у системі, $h = \overline{1, m-1}$. Під час роботи системи у режимі з інтенсивністю μ_2 відбувається блокування вхідного потоку замовлень, тобто жодне замовлення не допускається в чергу. Якщо в момент t початку обслуговування чергового замовлення $n(t) \leq h$, то блокування вхідного потоку припиняється і відновлюється режим обслуговування з інтенсивністю μ_1.

Введемо нумерацію станів системи (див. рис. 1): s_0 – система вільна; s_k ($k = \overline{1,\, m+1}$) – в системі є k замовлень, використовується режим обслуговування з інтенсивністю μ_1; x_k ($k = \overline{h+1,\, m}$) – в системі є k замовлень, обслуговування відбувається з інтенсивністю μ_2, вхідний потік заблокований.

Нехай $p_k(t)$ ($q_k(t)$) – імовірність того, що система в момент часу t перебуває у стані s_k (x_k). Очевидно [1], що існують границі $p_k = \lim\limits_{t\to\infty} p_k(t)$, $\quad q_k = \lim\limits_{t\to\infty} q_k(t)$. Стаціонарні ймовірності p_k, q_k і стаціонарні характеристики системи знайдено в [1]. Введемо позначення: $\beta = 1/\alpha$, $\gamma = \mu_1/\mu_2$, $\widetilde{\beta} = 1+\beta$, $\widetilde{\alpha} = 1-\alpha$, де $\alpha = \lambda/\mu_1$ – коефіцієнт завантаження системи у режимі обслуговування з інтенсивністю μ_1.

Запишемо формули для середнього часу очікування в черзі [1]

$$\overline{t}_r = T(m,h,\beta,\gamma,\lambda) = \frac{T_1(m,h,\beta,\gamma)}{\lambda\beta^2(\beta-1)\big((\beta^{h+2}-1)\widetilde{\beta}^{m-h}+1-\beta\big)}, \quad \beta \neq 1; \tag{1}$$

$$\begin{aligned}\overline{t}_r = T(m,h,1,\gamma,\lambda) = \frac{m}{2\lambda}+ \\ + \frac{\big(h^2+h+2-mh-2m+2\gamma(h+1)\big)2^m + \big(m-2-2\gamma(m+1)\big)2^h}{2\lambda\big((h+2)2^m-2^h\big)}, \quad \beta = 1;\end{aligned} \tag{2}$$

де $T_1(m,h,\beta,\gamma) = \beta(\beta^{h+2} - h\beta^2 + h\beta - 2\beta + 1)\widetilde{\beta}^{m-h} - \beta(\beta-1)^2 + \gamma(\beta-1)^2\big((h\beta+ +1)\widetilde{\beta}^{m-h} - m\beta - 1\big)$.

Перехід у співвідношеннях (1) і (2) до границі при $m\to\infty$ дає відповідні формули для системи без обмежень на довжину черги

$$\begin{aligned}\overline{t}_r = T(\infty,h,\beta,\gamma,\lambda) = \\ = \frac{\beta\big(\beta^{h+2} - \beta(\beta-1)h - 2\beta + 1\big) + \gamma(\beta-1)^2(h\beta+1)}{\lambda\beta^2(\beta-1)(\beta^{h+2}-1)}, \quad \beta \neq 1;\end{aligned} \tag{3}$$

$$\overline{t}_r = T(\infty,h,1,\gamma,\lambda) = \frac{h^2+h+2+2\gamma(h+1)}{2\lambda(h+2)}, \quad \beta = 1. \tag{4}$$

З формул (1)–(4) одержуємо такі граничні співвідношення:

$$\lim_{h\to\infty} T(\infty,h,\beta,\gamma,\lambda) = \infty, \quad \beta \le 1; \quad \lim_{h\to\infty} T(\infty,h,\beta,\gamma,\lambda) = \frac{1}{\lambda\beta(\beta-1)}, \quad \beta > 1; \tag{5}$$

$$\lim_{h\to m} T(m,h,\beta,\gamma,\lambda) = \frac{\beta^{m+1}-\beta-m(\beta-1)}{\lambda\beta(\beta-1)(\beta^{m+1}-1)}, \ \beta\neq 1; \ \lim_{h\to m} T(m,h,1,\gamma,\lambda) = \frac{m}{2\lambda}. \tag{6}$$

Якщо $h = m$, то маємо класичну систему обслуговування з обмеженою чергою.

3. Задача оптимізації за параметром $\boldsymbol{\gamma}$. Для систем обслуговування з обмеженою ($m < \infty$) та необмеженою чергою ($m = \infty$) розглянемо задачу оптимізації, яку називатимемо **задачею “$\boldsymbol{\gamma}$”**: *зафіксувавши всі інші параметри, вибрати параметр γ так, щоб середній час очікування $\overline{t}_r$ не перевищував задане число τ.*

Розв’язок задачі “γ” визначає така теорема.

Теорема 1. *1. Якщо $m < \infty$, $\beta \neq 1$ і виконується умова*

$$\tau > \frac{a_1}{c_1}, \tag{7}$$

то розв'язок задачі "γ" визначається нерівністю

$$\gamma \leq \frac{c_1\tau - a_1}{b_1}, \tag{8}$$

де $a_1 = \beta\big(\beta^{h+2} + \beta(h-2) - h\beta^2 + 1\big)\widetilde{\beta}^{m-h} - \beta(\beta-1)^2$*;*
$b_1 = (\beta-1)^2\big((h\beta+1)\widetilde{\beta}^{m-h} - m\beta - 1\big)$; $c_1 = \lambda\beta^2(\beta-1)\big((\beta^{h+2}-1)\widetilde{\beta}^{m-h} - \beta + 1\big)$.

2. Якщо $m < \infty$, $\beta = 1$ і виконується умова

$$\tau > \frac{a_2}{c_2}, \tag{9}$$

то розв'язок задачі "γ" визначається нерівністю

$$\gamma \leq \frac{c_2\tau - a_2}{b_2}, \tag{10}$$

де $a_2 = (h^2+h+2)2^{m-h-1} - 1$*;* $b_2 = (h+1)2^{m-h} - m - 1$*;* $c_2 = \lambda\big((h+2)2^{m-h} - 1\big)$.

3. Якщо $m = \infty$, $\beta \neq 1$ і виконується умова

$$\tau > \frac{a_3}{c_3}, \tag{11}$$

то розв'язок задачі "γ" визначається нерівністю

$$\gamma \leq \frac{c_3\tau - a_3}{b_3}, \tag{12}$$

де $a_3 = \beta^{h+2} - \beta(\beta-1)h - 2\beta + 1$*;* $b_3 = (\beta-1)^2(h\beta+1)$*;* $c_3 = \lambda\beta(\beta-1)(\beta^{h+2}-1)$.

4. Якщо $m = \infty$, $\beta = 1$ і виконується умова

$$\tau > \frac{a_4}{c_4}, \tag{13}$$

то розв'язок задачі "γ" визначається нерівністю

$$\gamma \leq \frac{c_4\tau - a_4}{b_4}, \tag{14}$$

де $a_4 = h^2 + h + 2$*;* $b_4 = 2(h+1)$*;* $c_4 = 2\lambda(h+2)$.

Доведення. Для одержання співвідношень (8), (10), (12) і (14) у кожному з чотирьох випадків розв'язуємо щодо γ нерівність $\overline{t}_r \leq \tau$, яка набуває вигляду

$$\frac{a_i + b_i\gamma}{c_i} \leq \tau.$$

Треба лише довести, що $b_i > 0$ і $c_i > 0$. Для $i = 3; 4$ ці нерівності очевидні. Доведемо їх для $i = 1; 2$. Оскільки

$$(h\beta+1)(1+\beta)^{m-h} - m\beta - 1 > (h\beta+1)(1+m\beta-h\beta) - m\beta - 1 = h\beta^2(m-h) > 0,$$

то $b_1 > 0$.

Для $\beta > 1$ очевидно, що $c_1 > 0$. Якщо ж $\beta < 1$, то одержуємо

$$(\beta^{h+2}-1)(1+\beta)^{m-h} + 1 - \beta < (\beta^{h+2}-1)(1+m\beta-h\beta) + 1 - \beta =$$
$$= (\beta^{h+2}-\beta) + (m-h)(\beta^{h+3}-\beta) < 0,$$

тому $c_1 > 0$.

Нерівність $c_2 > 0$ очевидна. Для b_2 одержуємо

$$b_2 = (h+1)2^{m-h} - m - 1 > (h+1)(1+m-h) - m - 1 = h(m-h) > 0.$$

Умови (7), (9), (11) і (13) одержуємо, вимагаючи, щоб праві частини нерівностей (8), (10), (12) і (14) були додатними, інакше з них отримаємо, що $\gamma \le 0$. Теорему доведено. □

4. Задача оптимізації за параметром *h*. Розглянемо задачу "h", сформульовану в п. 1. Якщо $m = \infty$ і $\beta = 1$, то розв'язок задачі "h" можна знайти в явному вигляді.

Теорема 2. *Якщо $m = \infty$, $\beta = 1$ і виконується умова*

$$\tau \ge \frac{2(1+\gamma)}{3\lambda}, \tag{15}$$

то розв'язок задачі "h" визначається нерівністю

$$h \le \frac{1}{2}\big(2\lambda\tau - 1 - 2\gamma + \sqrt{(2\lambda\tau - 1 - 2\gamma)^2 + 8(2\lambda\tau - 1 - \gamma)}\,\big). \tag{16}$$

Доведення. Нерівність $\bar{t}_r \le \tau$ еквівалентна такій

$$h^2 - (2\lambda\tau - 1 - 2\gamma)h - 2(2\lambda\tau - 1 - \gamma) \le 0. \tag{17}$$

Оскільки

$$\frac{\partial T(\infty, h, 1, \gamma, \lambda)}{\partial h} = \frac{h^2 + 4h + 2\gamma}{2\lambda(h+2)^2} > 0,$$

то функція $T(\infty, h, 1, \gamma, \lambda)$ зростаюча за змінною h, тому

$$\bar{t}_r \ge T(\infty, 1, 1, \gamma, \lambda) = \frac{2(1+\gamma)}{3\lambda}.$$

Отже, нерівність $\bar{t}_r \le \tau$ має розв'язок лише для таких τ, які задовольняють умову (15). Якщо ця умова виконується, то нерівність (17) має розв'язки, які визначаються формулою (16). Теорему доведено. □

Якщо $m = \infty$, $\beta \ne 1$, то найбільший розв'язок задачі "h" за деяких умов можна знайти за алгоритмом

$$h_{\max} = \max\{\, h \in \mathbb{N} :\ T(\infty, h, \beta, \gamma, \lambda) \le \tau \,\}. \tag{18}$$

Теорема 3. *Якщо $m = \infty$, $\beta \ne 1$ і виконуються умови*

$$\frac{\widetilde{\beta}(\beta+\gamma)}{\lambda\beta^2(\beta^2+\beta+1)} \le \tau < \frac{1}{\lambda\beta(\beta-1)}; \qquad 0 < \gamma \le 1; \tag{19}$$

для $\beta > 1$, і

$$\tau \ge \frac{\widetilde{\beta}(\beta+\gamma)}{\lambda\beta^2(\beta^2+\widetilde{\beta})}; \qquad \gamma > 0; \tag{20}$$

для $\beta < 1$, то найбільший розв'язок задачі "h" можна знайти за допомогою рівності (18).

Доведення. За допомогою (3) для $\beta \neq 1$ і натуральних h одержимо

$$T(\infty, h+1, \beta, \gamma, \lambda) - T(\infty, h, \beta, \gamma, \lambda) = \frac{(\beta-1)^2 F(h, \beta, \gamma)}{\lambda\beta(\beta^{h+2}-1)(\beta^{h+3}-1)},$$

де

$$F(h, \beta, \gamma) = (1-\gamma)h\beta^{h+2} + (h+1)\beta^{h+1} + \sum_{k=0}^{h}(\gamma+k)\beta^k =$$

$$= h\beta^{h+2} + (h+1)\beta^{h+1} + \sum_{k=1}^{h} k\beta^k + \gamma - \gamma\beta(\beta-1)\biggl(h\beta^h + \sum_{k=0}^{h-1}(k+1)\beta^k\biggr).$$

Отже, якщо $0 < \gamma \leq 1$ і $\beta \in (1; \infty)$ або $\gamma > 0$ і $\beta \in (0; 1)$, то $T(\infty, h+1, \beta, \gamma, \lambda) - T(\infty, h, \beta, \gamma, \lambda) > 0$, тобто середній час очікування $\overline{t}_r$ є монотонно зростаючою функцією від h, тому найбільший розв'язок задачі "h" визначається з (18). Перша з нерівностей (19) і перша умова (20) випливають з того, що задача "h" не має розв'язку, якщо $\tau < T(\infty, 1, \beta, \gamma, \lambda)$. Друга з нерівностей (19) еквівалентна умові $\tau < T(\infty, \infty, \beta, \gamma, \lambda)$ і є необхідною для забезпечення єдиності розв'язку $h_{\max}$ задачі "h" за алгоритмом (18). Адже згідно з (5) $T(\infty, \infty, \beta, \gamma, \lambda) = 1/\bigl(\lambda\beta(\beta-1)\bigr)$ для $\beta > 1$, і якщо $\tau \geq T(\infty, \infty, \beta, \gamma, \lambda)$, то з (18) одержимо, що $h_{\max} = \infty$. Теорему доведено. $\square$

Таблиця 1. Розв'язування задачі "h" для різних τ

τ	h^*	$h_{\max}$	$\overline{t}_r(h_{\max})$	$\overline{t}_r(h_{\max})$ (GPSS World)
2	1,542	1	1,714	1,712
3	3,145	3	2,903	2,904
4	4,583	4	3,587	3,601
5	5,963	5	4,299	4,305
6	7,317	7	5,765	5,774
7	8,659	8	6,508	6,510
8	9,997	9	7,255	7,262
9	11,332	11	8,751	8,759
10	12,666	12	9,501	9,504

Зауваження 1. Якщо умови теореми 3 виконуються, то для реалізації алгоритму (18) достатньо знайти єдиний додатний розв'язок $h = h^*$ рівняння $T(\infty, h, \beta, \gamma, \lambda) = \tau$ (для фіксованих β, γ і λ). Тоді $h_{\max} = \max\limits_{h \in \mathbb{N}}\{h \leq h^*\}$. Результати реалізації цього алгоритму наведено в табл. 1 для $\lambda = 2$; $\mu_1 = 1$; $\mu_2 = 2$; $\beta = \gamma = 0,5$. Для таких значень параметрів з (20) отримуємо обмеження на τ: $\tau \geq 1,714$. В останньому стовпці таблиці для порівняння записано значення середнього часу очікування $\overline{t}_r(h_{\max})$, отримані для значення часу моделювання $t = 10^6$ за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World [5, 6].

Якщо $m < \infty$, $\beta = 1$, то найбільший розв'язок задачі "h" за деяких умов можна знайти за алгоритмом

$$h_{\max} = \max\{\, h \in \mathbb{N} : \ T(m, h, 1, \gamma, \lambda) \leq \tau \,\}. \tag{21}$$

Теорема 4. *Якщо* $3 \le m < \infty$, $\beta = 1$ *і виконуються умови*

$$0 < \gamma < \frac{5m^2 - 3m - 8}{2(m^2 - m - 3)}\,; \tag{22}$$

$$\tau \ge \frac{m}{2\lambda} - \frac{(3m - 4\gamma - 4)2^{m-1} - m + 2 + 2\gamma(m+1)}{2\lambda(3 \cdot 2^{m-1} - 1)}, \tag{23}$$

то найбільший розв'язок задачі "h" можна знайти за допомогою алгоритму (21).

Доведення. За допомогою (2) для натуральних $h < m - 1$ $(h + 1 \le m - 1)$ одержимо

$$T(m, h+1, 1, \gamma, \lambda) - T(m, h, 1, \gamma, \lambda) = \frac{2^{m-1} f_h(m, h, \gamma)}{\lambda\big((h+2)2^m - 2^h\big)\big((h+3)2^m - 2^{h+1}\big)},$$

де $f_h(m, h, \gamma) = 2^h\big((h^2 + 5h + 2\gamma + 2)2^{m-h} + h^2 - 3h - 2\gamma m h - 2\gamma(m+1) - 2\big)$. З'ясуємо, для яких значень γ виконується нерівність $f_h(m, h, \gamma) > 0$ для всіх $h \ge 1$, $m \ge 3$. Нерівність $f_h(m, h, \gamma) > 0$ еквівалентна такій

$$(mh + m + 1 - 2^{m-h})\gamma < (h^2 + 5h + 2)2^{m-h} + h^2 - 3h - 2. \tag{24}$$

Нерівність (24) виконується для всіх $\gamma > 0$, якщо $mh + m + 1 - 2^{m-h} \le 0$. Якщо ж m і h такі, що $mh + m + 1 - 2^{m-h} > 0$, то з (24) одержимо обмеження на γ

$$\gamma < \frac{(h^2 + 5h + 2)2^{m-h} + h^2 - 3h - 2}{2(mh + m + 1 - 2^{m-h})}.$$

Прийнявши в цій нерівності $m - h = k \ge 2$, одержимо нерівність $\gamma < \Phi(m, k)$, де $\Phi(m, k) = \Phi_1(m, k)/\Phi_2(m, k)$,

$$\Phi_1(m, k) = (2^k + 1)(m - k)^2 + (5 \cdot 2^k - 3)(m - k) + 2(2^k - 1);$$
$$\Phi_2(m, k) = 2\big(m^2 - (k-1)m - 2^k + 1\big).$$

Оскільки

$$\frac{\partial \Phi_1(m, k)}{\partial k} = 2^k \ln 2 \cdot (m - k)^2 + \big((5\ln 2 - 2)2^k - 2\big)(m - k) + (2\ln 2 - 5)2^k + 3 > 0$$

для $k \ge 2$, $m - k = h \ge 2$, а $\Phi_2(m, k)$ – спадна функція від k, то функція $\Phi(m, k)$ зростає за змінною k для $k \ge 2$, $m - k \ge 2$. Отже, якщо

$$\gamma < \Phi(m, 2) = \frac{5m^2 - 3m - 8}{2(m^2 - m - 3)}, \qquad m \ge 4,$$

то нерівність $\gamma < \Phi(m, k)$ виконується для $m - k = h \ge 2$, $m \ge 4$, $k \ge 2$.

Якщо $h = 1$, то $mh + m + 1 - 2^{m-h} > 0$ для $m = 3$ і $m = 4$, а для $m \ge 5$ маємо $mh + m + 1 - 2^{m-h} < 0$. Для $h = 1$, $m = 3$ множини розв'язків γ нерівностей (24) і $\gamma < \Phi(m, 2)$ збігаються, а для $h = 1$, $m = 4$ множина розв'язків нерівності $\gamma < \Phi(m, 2)$ є підмножиною множини розв'язків нерівності (24). Отже, умова (22) забезпечує виконання нерівності $f_h(m, h, \gamma) > 0$ для всіх $h \ge 1$, $m \ge 3$, а це означає, що $T(m, h+1, 1, \gamma, \lambda) - T(m, h, 1, \gamma, \lambda) > 0$, тобто середній час очікування $\overline{t}_r$ є монотонно зростаючою функцією від h, тому найбільший розв'язок задачі "h" визначається з (21). Задача "h" не має розв'язку, якщо $\tau < T(m, 1, 1, \gamma, \lambda)$, тому ставиться умова $\tau \ge T(m, 1, 1, \gamma, \lambda)$, яка має вигляд (23). Теорему доведено. $\square$

Зауваження 2. Згідно з (6) $T(m,m,1,\gamma,\lambda)=m/(2\lambda)$, тому при $\tau\ge m/(2\lambda)$ задача "h" має тривіальний розв'язок $h_{\max}=m-1$.

5. Задача оптимізації за параметром m. Для системи обслуговування з обмеженою чергою ($m<\infty$) розглянемо задачу "m": *зафіксувавши всі інші параметри, вибрати параметр m так, щоб середній час очікування $\overline{t}_r$ не перевищував задане число τ.* Визначимо умови, за яких найбільший розв'язок задачі "m" можна знайти за алгоритмом

$$m_{\max}=\max\{\,m\in\mathbb{N}:\ T(m,h,\beta,\gamma,\lambda)\le\tau\,\}. \tag{25}$$

Теорема 5. *Якщо $2\le m<\infty$ і виконуються умови*

$$\gamma>\max\left\{0;\ \frac{h^2-h-2}{2h^2+4h+3}\right\}; \tag{26}$$

$$\frac{h^2+h+1+\gamma h}{\lambda(2h+3)}\le\tau<\frac{h^2+h+2+2\gamma(h+1)}{2\lambda(h+2)} \tag{27}$$

для $\beta=1$ і умови

$$\gamma>\max\left\{0;\ \frac{\beta^2\widetilde{\beta}\big(2\beta^{h+1}-\beta^{h+2}-h(\beta-1)-1\big)}{(\beta-1)\Big(\big((h+1)\beta^{h+3}-2\beta-h\beta^2+1\big)\widetilde{\beta}+\beta-1\Big)}\right\}; \tag{28}$$

$$\begin{aligned}\frac{(\beta^{h+2}-h\beta^2+h\beta-2\beta+1)\widetilde{\beta}-\beta(\beta-1)+\gamma h\beta(\beta-1)^2}{\lambda\beta^2(\beta-1)\big(\beta^{h+1}\widetilde{\beta}-2\big)}\le\tau<\\ <\frac{\beta\big(\beta^{h+2}-\beta(\beta-1)h-2\beta+1\big)+\gamma(\beta-1)^2(h\beta+1)}{\lambda\beta^2(\beta-1)(\beta^{h+2}-1)}\end{aligned} \tag{29}$$

для $\beta\ne1$, то найбільший розв'язок задачі "m" можна знайти за допомогою рівності (25).

Доведення. За допомогою (2) для натуральних $m>h$ ($m\ge2$) одержимо

$$T(m+1,h,1,\gamma,\lambda)-T(m,h,1,\gamma,\lambda)=\frac{2^{-(m+1-h)}f_m(m,h,\gamma)}{2\lambda\big(h+2-2^{-(m-h)}\big)\big(h+2-2^{-(m+1-h)}\big)},$$

де $f_m(m,h,\gamma)=h+2-h^2+2\gamma f(m,h)$, $f(m,h)=(m-1)(h+2)+1+2^{-(m-h)}$. Функція $f(m,h)$ додатна і зростає за змінною m для $m\ge h+1$. Для $h=1$ і $h=2$ $f_m(m,h,\gamma)>0$ для всіх $\gamma>0$. Для $h>2$ $f_m(m,h,\gamma)>0$, якщо

$$\gamma>\frac{h^2-h-2}{2f(h+1,h)}>\frac{h^2-h-2}{2f(m,h)}.$$

Оскільки $2f(h+1,h)=2h^2+4h+3$, то умова (26) забезпечує виконання нерівності $T(m+1,h,1,\gamma,\lambda)-T(m,h,1,\gamma,\lambda)>0$, яка означає, що середній час очікування $\overline{t}_r$ є монотонно зростаючою функцією від m. Нерівності (27) одержані з умов

$$T(h+1,h,1,\gamma,\lambda)\le\tau<T(\infty,h,1,\gamma,\lambda)$$

і забезпечують існування єдиного розв'язку $m_{\max}$ задачі "m" при $\beta=1$, який можна знайти за алгоритмом (25).

У випадку $\beta \neq 1$ за допомогою (1) для натуральних $m > h$ $(m \geq 2)$ одержуємо

$$T(m+1,h,\beta,\gamma,\lambda) - T(m,h,\beta,\gamma,\lambda) =$$
$$= \frac{\widetilde{\beta}^{m+h}\varphi_m(m,h,\beta,\gamma)}{\lambda\beta\big((\beta^{h+2}-1)\widetilde{\beta}^m - (\beta-1)\widetilde{\beta}^h\big)\big((\beta^{h+2}-1)\widetilde{\beta}^{m+1} - (\beta-1)\widetilde{\beta}^h\big)},$$

де $\varphi_m(m,h,\beta,\gamma) = \beta^2\big(\beta^{h+2} - 2\beta^{h+1} + h(\beta-1)+1\big) + \gamma f_{h\beta}(m)$,
$$f_{h\beta}(m) = (\beta-1)\big(m\beta(\beta^{h+2}-1) - (\beta-1)(h\beta+1-\widetilde{\beta}^{-(m-h)})\big).$$
Оскільки $\ln(1+\beta) < \beta$, то для $m \geq h$ і $\beta \neq 1$ похідна

$$f'_{h\beta}(m) = \beta(\beta-1)(\beta^{h+2}-1) - (\beta-1)^2\widetilde{\beta}^{-(m-h)}\ln(1+\beta) > 0,$$

тому

$$f_{h\beta}(m) \geq f_{h\beta}(h) = h\beta^2(\beta-1)(\beta^{h+1}-1) > 0.$$

Якщо $\beta^{h+2} - 2\beta^{h+1} + h(\beta-1)+1 \geq 0$, то $\varphi_m(m,h,\beta,\gamma) > 0$ для всіх $\gamma > 0$. У протилежному випадку $\varphi_m(m,h,\beta,\gamma) > 0$ лише за умови, що

$$\gamma > \frac{\beta^2\big(2\beta^{h+1} - \beta^{h+2} - h(\beta-1) - 1\big)}{f_{h\beta}(h+1)} \geq \frac{\beta^2\big(2\beta^{h+1} - \beta^{h+2} - h(\beta-1) - 1\big)}{f_{h\beta}(m)},$$

де $f_{h\beta}(h+1) = \frac{\beta-1}{\beta+1}\big(\big((h+1)\beta^{h+3} - 2\beta - h\beta^2 + 1\big)\widetilde{\beta} + \beta - 1\big)$.

Отже, умова (28) забезпечує виконання нерівності

$$T(m+1,h,\beta,\gamma,\lambda) - T(m,h,\beta,\gamma,\lambda) > 0.$$

Нерівності (29) одержані з умов $T(h+1,h,\beta,\gamma,\lambda) \leq \tau < T(\infty,h,\beta,\gamma,\lambda)$ і забезпечують існування єдиного розв'язку $m_{\max}$ задачі "m" при $\beta \neq 1$, який можна знайти за алгоритмом (25). Теорему доведено. □

6. Система з відновлювальним рівнем вхідного потоку. Розглянемо систему обслуговування з відновлювальним рівнем вхідного потоку, описану в п. 1, обслуговування в якій може відбуватись у двох режимах. Час обслуговування в кожному з них розподілений за показниковим законом з параметрами μ_1 і μ_2, відповідно. Перемикання на обслуговування з інтенсивністю μ_2 відбувається в момент початку обслуговування першого замовлення після того, як розпочалося блокування вхідного потоку.

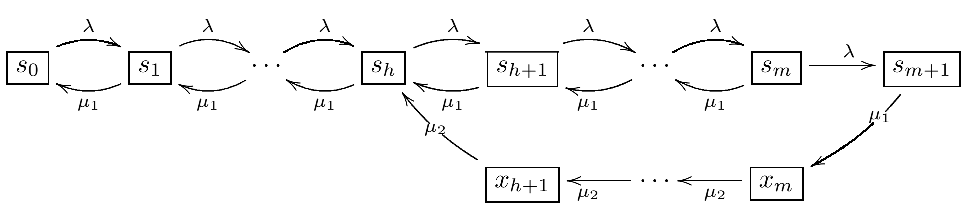

Рис. 2

Зберігши позначення, введені в п. 2, користуючись графом станів системи (рис. 2), запишемо рівняння для визначення стаціонарних імовірностей p_k і q_k

$$
\begin{aligned}
&\mu_1 p_1 - \lambda p_0 = 0; \qquad \lambda p_{m-1} - (\lambda+\mu_1)p_m = 0;\\
&\lambda p_{k-1} + \mu_1 p_{k+1} - (\lambda+\mu_1)p_k = 0 \quad \left(k=\overline{1,\, h-1};\ k=\overline{h+1,\, m-1}\right);\\
&\lambda p_{h-1} + \mu_1 p_{h+1} + \mu_2 q_{h+1} - (\lambda+\mu_1)p_h = 0; \qquad \lambda p_m - \mu_1 p_{m+1} = 0;\\
&\mu_1 p_{m+1} - \mu_2 q_m = 0; \quad q_m = q_k \quad \left(k=\overline{h+1,\, m-1}\right);\\
&\sum_{k=0}^{m+1} p_k + \sum_{k=h+1}^{m} q_k = 1.
\end{aligned}
\tag{30}
$$

Розв'язки системи рівнянь (30) зручно шукати, виражаючи всі невідомі через p_0. Припускаючи, що $\alpha \neq 1$, отримаємо такий результат:

$$
\begin{aligned}
&p_k = \alpha^k p_0 \quad \left(k=\overline{1,\, h}\right); \quad p_k = \left(\alpha^k - \frac{\alpha^{m+1}(1-\alpha^{k-h})}{1-\alpha^{m-h+1}}\right)p_0 \quad \left(k=\overline{h+1,\, m}\right);\\
&p_{m+1} = \frac{\alpha^{m+1}\widetilde{\alpha} p_0}{1-\alpha^{m-h+1}}; \qquad q_k = \gamma p_{m+1} \quad \left(k=\overline{h+1,\, m}\right);\\
&p_0 = \frac{\widetilde{\alpha}(1-\alpha^{m-h+1})}{1-\alpha^{m-h+1}-\alpha^{m+1}\widetilde{\alpha}\big(\alpha-(m-h)(\widetilde{\alpha}\gamma-1)\big)}.
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Окремо запишемо формули для стаціонарних імовірностей у випадку, коли $\alpha = 1$,

$$
\begin{aligned}
&p_k = p_0 \quad \left(k=\overline{1,\, h}\right); \qquad p_k = \frac{(m+1-k)p_0}{m+1+h-k} \quad \left(k=\overline{h+1,\, m}\right);\\
&p_{m+1} = \frac{p_0}{m+1+h-k}; \qquad q_k = \frac{\gamma p_0}{m+1+h-k} \quad \left(k=\overline{h+1,\, m}\right);\\
&p_0 = \frac{2(m-h+1)}{(m-h+1)(m+h+2)+2\gamma(m-h)+2}.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

Використовуючи співвідношення (31) і (32), за формулами Літтла одержимо формули для середнього часу очікування в черзі

$$
\begin{aligned}
&\overline{t}_r = \widetilde{T}(m,h,\alpha,\gamma,\lambda) = \frac{T_1(m,h,\alpha,\gamma)}{2\lambda T_2(m,h,\alpha)}, \qquad \alpha \neq 1;\\
&\overline{t}_r = \widetilde{T}(m,h,1,\gamma,\lambda) = \frac{T_{11}(m,h,\gamma)}{3\lambda(m-h+1)(m+h+2)}, \qquad \alpha = 1,
\end{aligned}
\tag{33}
$$

де

$$
T_1(m,h,\alpha,\gamma) = \alpha^2\Bigg(2\Bigg(\sum_{k=0}^{m-h}\alpha^k - m\alpha^{m-1} + (h-1)\alpha^m\Bigg) +
$$
$$
+\widetilde{\alpha}\alpha^{m-1}\big((m-h)(m+h-1)(\gamma\widetilde{\alpha}-1)+2m\widetilde{\alpha}\big)\Bigg);
$$

$$
T_2(m,h,\alpha) = (1-\alpha^{m+1})(1-\alpha^{m-h+1}) - \alpha^{m+1}\big((m-h)\widetilde{\alpha} - \alpha(1-\alpha^{m-h})\big);
$$
$$
T_{11}(m,h,\gamma) = 3h(h-1)(m-h+1) + 3(m+\gamma)(m+h-1)(m-h) +
$$
$$
+6m + h(h-1)(2h-1) - m(m-1)(2m-1).
$$

Якщо $h = m$, то матимемо класичну систему обслуговування з обмеженою чергою, для якої з (33) отримаємо

$$\begin{aligned} \overline{t}_r &= \widetilde{T}(m, m, \alpha, \gamma, \lambda) = \frac{\alpha^2\bigl(1-(m+1)\alpha^m + m\alpha^{m+1}\bigr)}{\lambda\widetilde{\alpha}(1-\alpha^{m+1})}, \quad \alpha \neq 1; \\ \overline{t}_r &= \widetilde{T}(m, m, 1, \gamma, \lambda) = \frac{m}{2\lambda}, \qquad \alpha = 1. \end{aligned} \tag{34}$$

Зауважимо, що праві частини співвідношень (34) і (6) збігаються.

7. Задача "γ" для системи з відновлювальним рівнем вхідного потоку.

Теорема 6. *1. Якщо $\alpha \neq 1$ і виконується умова*

$$\tau > \frac{T_1(m, h, \alpha, 0)}{2\lambda T_2(m, h, \alpha)}, \tag{35}$$

то розв'язок задачі "γ" визначається нерівністю

$$\gamma \leq \frac{2\lambda\tau T_2(m, h, \alpha) - T_1(m, h, \alpha, 0)}{(m-h)(m+h-1)\widetilde{\alpha}^2\alpha^{m+1}}. \tag{36}$$

2. Якщо $\alpha = 1$ і виконується умова

$$\tau > \frac{T_{11}(m, h, 0)}{3\lambda(m-h+1)(m+h+2)}, \tag{37}$$

то розв'язок задачі "γ" визначається нерівністю

$$\gamma \leq \frac{3\lambda\tau(m-h+1)(m+h+2) - T_{11}(m, h, 0)}{3(m-h)(m+h-1)}. \tag{38}$$

Доведення. Співвідношення (36) і (38) одержані як розв'язки нерівностей $\overline{t}_r \leq \tau$ щодо γ. Умови (35) і (37) забезпечують додатність правих частин нерівностей (36) і (38). Теорему доведено. □

8. Задача "h" для системи з відновлювальним рівнем вхідного потоку.

Теорема 7. *Якщо $\alpha = 1,\ 0 < \gamma < 2,5$ і для фіксованого $m \geq 2$ виконується умова*

$$\tau \geq \frac{(m-1)(m+1+3\gamma)+6}{3\lambda(m+3)}, \tag{39}$$

то найбільший розв'язок задачі "h" можна знайти за алгоритмом

$$h_{\max} = \max\{\, h \in \mathbb{N} :\ \widetilde{T}(m, h, 1, \gamma, \lambda) \leq \tau \,\}. \tag{40}$$

Доведення. За допомогою другого співвідношення (33) для натуральних $h \leq m-2$ одержимо

$$\widetilde{T}(m, h+1, 1, \gamma, \lambda) - \widetilde{T}(m, h, 1, \gamma, \lambda) = \frac{g(m, h, \gamma)}{3\lambda(m-h+1)(m+h+2)(m-h)(m+h+3)},$$

де

$$\begin{aligned} g(m, h, \gamma) = 6\gamma\bigl((m-h)^2 - 2mh - m - h\bigr) + h(h-1)(h^2+5h-2) - \\ -3mh(h-1)(m+3) + 2m(m^2+5)(h+1). \end{aligned}$$

Доведемо методом математичної індукції, що $g(m,h,\gamma)>0$ для $1\le h\le m-2$, де $m\ge 2$. Якщо $h=m-2$, то

$$g(m,m-2,\gamma)=6\big(5m^2-3m-8-2\gamma(m^2-m-3)\big).$$

Для $m=2$ нерівність $g(m,m-2,\gamma)>0$ виконується для всіх $\gamma>0$. Розв'язуючи нерівність $g(m,m-2,\gamma)>0$ для $m\ge 3$, одержимо обмеження на γ

$$\gamma<\frac{5m^2-3m-8}{2(m^2-m-3)}.$$

Для всіх $m\ge 3$ виконується нерівність

$$\frac{5m^2-3m-8}{2(m^2-m-3)}\ge\frac{5}{2},$$

тому для $\gamma\in(0;\,2,5)\quad g(m,m-2,\gamma)>0$.

Припустимо, що $g(m,\widetilde{h},\gamma)>0$, де $1<\widetilde{h}\le m-2$. Доведемо, що $g(m,h,\gamma)>0$ для $h=\widetilde{h}-1$.

Одержуємо

$$g(m,\widetilde{h}-1,\gamma)=g(m,\widetilde{h},\gamma)+12\gamma(2m-\widetilde{h}+1)+$$
$$+2(m^3+5m-\widetilde{h}^3-\widetilde{h}^2+2\widetilde{h})+2(\widetilde{h}-1)(3m^2+9m-\widetilde{h}^2-3\widetilde{h}+6)>0,$$

тому що для всіх $m\ge 2,\ \ 1<\widetilde{h}\le m-2$

$$m^3+5m-\widetilde{h}^3-\widetilde{h}^2+2\widetilde{h}\ge m^3+5m-(m-1)^3-(m-1)^2+2(m-1)=$$
$$=2(m^2+3m-1)>0.$$

Отже, $g(m,h,\gamma)>0$ для $1\le h\le m-2$, $m\ge 2$, тому

$$\widetilde{T}(m,h+1,1,\gamma,\lambda)-\widetilde{T}(m,h,1,\gamma,\lambda)>0.$$

Це означає, що середній час очікування $\overline{t}_r$ є монотонно зростаючою функцією від h, тому розв'язок $h_{\max}$ задачі "h" визначається за алгоритмом (40). Задача "h" не має розв'язку, якщо $\tau<\widetilde{T}(m,1,1,\gamma,\lambda)$, тому ставиться умова $\tau\ge\widetilde{T}(m,1,1,\gamma,\lambda)$, яка має вигляд (39). Теорему доведено. □

9. Задача "m" для системи з відновлювальним рівнем вхідного потоку.

Теорема 8. *Якщо $\alpha=1$ і для фіксованого $h\ge 1$ виконується умова*

$$\tau\ge\frac{h(h-1)(2h+5)+6h(\gamma+h+1)-(h+1)(2h^2+h-6)}{6\lambda(2h+3)},\tag{41}$$

то найбільший розв'язок задачі "m" можна знайти за алгоритмом

$$m_{\max}=\max\{\,m\in\mathbb{N}:\ \widetilde{T}(m,h,1,\gamma,\lambda)\le\tau\,\}.\tag{42}$$

Доведення. За допомогою другого співвідношення (33) для натуральних $m\ge h+1$ одержимо

$$\widetilde{T}(m+1,h,1,\gamma,\lambda)-\widetilde{T}(m,h,1,\gamma,\lambda)= \\ =\frac{G(m,h)+6\gamma\big((m-h)^2+m^2+h^2+2(2m-h)\big)}{3\lambda(m-h+1)(m+h+2)(m-h+2)(m+h+3)},$$

де

$$G(m,h)=3(m-h+1)(m+h+2)(m^2+m+2)+2(m+2)h(h-1)(h-2)- \\ -2m(m+2)(m^2+5).$$

Доведемо методом математичної індукції, що $G(m,h)>0$ для $1\le h\le m-1$, де $m\ge 2$. Якщо $h=m-1$, то $G(m,m-1)=6(m^2+7m-2)>0$ для всіх $m\ge 2$. Припустимо, що $G(m,\widetilde{h})>0$, де $1<\widetilde{h}\le m-1$. Доведемо, що $G(m,h)>0$ для $h=\widetilde{h}-1$.

Одержуємо

$$G(m,\widetilde{h}-1)=G(m,\widetilde{h})+6h(m^2+m+2)-6(h-1)(h-2)(m+2)> \\ >G(m,\widetilde{h})+6h\big(m^2+m+2-(m-3)(m+2)\big)=G(m,\widetilde{h})+12h(m+4)>0.$$

Отже, $G(m,h)>0$ для $1\le h\le m-1$, $m\ge 2$, тому

$$\widetilde{T}(m+1,h,1,\gamma,\lambda)-\widetilde{T}(m,h,1,\gamma,\lambda)>0.$$

Це означає, що середній час очікування $\overline{t}_r$ є монотонно зростаючою функцією від m, тому розв'язок $m_{\max}$ задачі "m" визначається за алгоритмом (42). Задача "m" не має розв'язку, якщо $\tau<\widetilde{T}(h+1,h,\gamma,\lambda)$, тому накладається умова $\tau\ge\widetilde{T}(h+1,h,\gamma,\lambda)$, яка має вигляд (41). Теорему доведено. □

Таблиця 2. Розв'язування задачі "m" для різних τ

τ	m^*	$m_{\max}$	$\overline{t}_r(m_{\max})$	$\overline{t}_r(m_{\max})$ (GPSS World)
2	11,463	11	1,933	1,934
2,5	14,794	14	2,379	2,374
3	18,027	18	2,996	2,998
3,5	21,199	21	3,468	3,465
4	24,332	24	3,947	3,942
4,5	27,440	27	4,429	4,435
5	30,529	30	4,914	4,873
5,5	33,603	33	5,402	5,380
6	36,667	36	5,891	5,909

Зауваження 3. Якщо умови теореми 8 виконуються, то для реалізації алгоритму (42) достатньо знайти єдиний додатний розв'язок $m=m^*$ рівняння $\widetilde{T}(m,h,1,\gamma,\lambda)=\tau$ (для фіксованих h, γ і λ). Тоді $m_{\max}=\max\limits_{m\in\mathbb{N},\ m\ge h+1}\{m\le m^*\}$. Результати реалізації цього алгоритму наведено в табл. 2 для $\lambda=\mu_1=2$; $\mu_2=4$; $\gamma=0,5$; $h=5$. Для таких значень параметрів з (41) отримуємо обмеження на τ: $\tau\ge 1,288$. В останньому стовпці таблиці для порівнняння записано значення середнього часу очікування

$\bar{t}_r(m_{\max})$, отримані для значення часу моделювання $t = 2 \cdot 10^6$ за допомогою системи імітаційного моделювання GPSS World.

---

1. *Жерновий К.* Оптимізація режимів обслуговування для систем M/M/1/m та M/M/1 з блокуванням вхідного потоку / *Жерновий К.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2009. – Вип. 71. – С. 92-101.
2. *Дудин А.Н.* Расчёт необходимого числа каналов в современных телекоммуникационных сетях / *Дудин А.Н., Клименок В.И.* // Информатизация образования. – 2005. – №4. – С. 56-68.
3. *Братійчук А.М.* Граничні теореми для системи типу $\mathrm{M}^\theta/\mathrm{G}/1/\mathrm{b}$ з відновлюючим рівнем вхідного потоку / *Братійчук А.М.* // Укр. мат. журн. – 2007. – Т. 59, №7. – С. 884-889.
4. *Єлейко Я.* Універсальні формули для системи обслуговування M/M/n/m з блокуванням вхідного потоку / *Єлейко Я., Жерновий Ю.* // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. прикл. матем. та інформатика. – 2009. – Вип. 15. – С. 234-239.
5. *Боев В.Д.* Моделирование систем. Инструментальные средства GPSS World / *Боев В.Д.* – Санкт-Петербург, 2004.
6. *Жерновий Ю.В.* Імітаційне моделювання систем масового обслуговування / *Жерновий Ю.В.* – Львів, 2007.

OPTIMIZATION OF THE AVERAGE WAITING TIME FOR THE M/M/1/m QUEUES WITH BLOCKING OF AN INPUT FLOW AND SWITCHING OF MODES OF SERVICE

Kostyantyn ZHERNOVYI

Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

The M/M/1/m queues with threshold blocking of an input flow and with regenerative level of an input flow in which on the blocking period changes intensity of service are studied. For each of queues the problems of optimization of an average waiting time on parameters $\gamma = \mu_1/\mu_2$, h and m, where μ_1 and μ_2 are intensities of service in a usual mode and in a blocking mode accordingly, h is a blocking threshold, are solved.

Key words: the M/M/1/m queues, blocking of an input flow, switching of modes of service, optimization of an average waiting time.

ОПТИМИЗАЦИЯ СРЕДНЕГО ВРЕМЕНИ ОЖИДАНИЯ ДЛЯ СИСТЕМ ТИПА M/M/1/m С БЛОКИРОВКОЙ ВХОДНОГО ПОТОКА И ПЕРЕКЛЮЧЕНИЕМ РЕЖИМОВ ОБСЛУЖИВАНИЯ

Константин ЖЕРНОВЫЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: k_zhernovyi@yahoo.com

Изучено системы обслуживания M/M/1/m с пороговой блокировкой входного потока и с восстановительным уровнем потока заявок, в которых на период блокировки изменяется интенсивность обслуживания. Для каждой из систем решены задачи оптимизации среднего времени ожидания по параметрам $\gamma = \mu_1/\mu_2$, h и m, где μ_1, μ_2 – интенсивности обслуживания в обычном режиме и в режиме блокировки, соответственно, h – порог блокировки.

Ключевые слова: система M/M/1/m, блокировка входного потока, переключение режимов обслуживания, оптимизация среднего времени ожидания.

Стаття надійшла до редколегії 08.09.2010

Прийнята до друку 22.12.2010