

УДК 519.2:519.7

СИСТЕМНИЙ АНАЛІЗ БАГАТОФАКТОРНИХ ЕКОНОМЕТРИЧНИХ МОДЕЛЕЙ У ВИПАДКОВОМУ СЕРЕДОВИЩІ

Ярослав ЄЛЕЙКО, Катерина КОСАРЕВИЧ

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: katia_kosarevych@mail.ru*

Розглянуто проблему формалізації економічного процесу в умовах невизначеності. Відомі на сьогодні праці уникають питання побудови методу оптимального вибору факторів економетричної моделі, який був би ефективним в умовах невизначеності. Наша мета – вирішити цю проблему. Побудовано узагальнений метод Хелвіга для відбору визначального набору факторів у випадковому середовищі та відповідну динамічну модель. Визначено параметри багатофакторних економетричних моделей, які залежать від еволюції зовнішніх чинників, що описується процесом Маркова.

Ключові слова: динамічна факторна модель, домінуючий фактор, метод Хелвіга, стохастична факторна регресія, процес Маркова.

1. Вступ. При дослідженні динаміки різноманітних економічних явищ застосовують прогнозні розрахунки й оптимізаційні моделі. Математичні методи, які використовують, потребують попередньої побудови описових моделей, а це супроводжується визначенням та аналізом факторів, які беруть участь у формуванні значень результативної змінної [1, 5]. Інформаційною базою для таких досліджень є статистична звітність, яка дає змогу простежити динаміку показників протягом визначеного періоду. Звичайно, для різних економічних об'єктів існує своя система факторів, причому кількість таких чинників може бути довільною.

Наприклад, такий підхід застосовують у сучасній теорії портфеля [5]. Її мета – розробити методи, за допомогою яких інвестор може вибрати оптимальний для нього портфель з нескінченної кількості можливих. Для вирішення питання про включення кожного розглядуваного цінного паперу в портфель інвестору треба оцінити його очікувану дохідність і стандартне відхилення разом з усіма коваріаціями

між цими цінними паперами. Однак на практиці обсяг розрахунків при визначенні коваріацій цінних паперів збільшується зі збільшенням їхньої кількості, багаторазові аналітичні обчислення стають громіздкими. Така задача може бути сильно спрощена за допомогою побудови моделі процесу формування дохідності за цінним папером, тобто статистичної моделі, яка даватиме необхідний рівень абстрактності. З огляду на це виникає потреба відповісти на такі питання:

- 1) як оптимально вибрати з множини змінних (факторів) ті, які зазначатимуть структуру факторної моделі, аби уникнути громіздких моделей на виході?
- 2) як знайти кількість і номери факторів, які будуть входити в модель?
- 3) наскільки вагомий кожен фактор у формуванні значення залежної змінної?

Пошук відповідей спонукає до виконання першого і надзвичайно важливого кроку фінансового аналізу – відбору домінуючих чинників. Фактично, це той етап, виконання якого потребує аналіз будь-якого економічного явища (наприклад, дослідження впливу цін на паливо, електроенергію, оборотні засоби на величину доходу деякого транспортного підприємства).

Польський економіст Хелвіг запропонував метод [6] такого відбору, однак функціонування будь-якої економічної системи (втім числі діючого підприємства) відбувається в умовах складної взаємодії комплексу не лише внутрішніх, а й зовнішніх факторів. Справді, чинники, на підставі яких ми будемо моделювати певне явище, набувають різних значень в різні моменти часу, і ці значення очевидно складаються під впливом зовнішнього середовища. Зокрема, йдеться про деякі події макrorівня, які визначають стан економіки в цілому, та відповідно кожного конкретного підприємства. Наш світ не є стабільним, економіка теж не є монолітною, тому зміни в очікуваннях стосовно її майбутнього стану зумовлюють динаміку більшості економічних систем. Отже, виникає потреба в новому підході до вибору визначальних факторів, який би був достатньо ефективним в умовах невизначеності на відміну від згаданого.

Відомі сучасній науці моделі економічних явищ [2, 6] опускають дослідження розглянутих проблем. Мета нашої праці – пошук узагальненого механізму вибору визначального набору факторів як нового підходу до вирішення актуальної проблеми формалізації економічного процесу в умовах невизначеності. А також побудова на основі вибраних згідно з цим механізмом домінуючих факторів динамічної факторної моделі, дослідження наявності стабільності цієї регресії та знаходження параметрів моделі.

2. Основні результати. Припустимо, що досліджуване економічне явище формується на підставі впливу випадкових змінних X_1, X_2, \dots, X_n з випадковою похибкою спостереження ε

$$Y = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 + \dots + \alpha_n X_n + \varepsilon,$$

параметри $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – чутливості залежної змінної до відповідних факторів (в загальному випадку невідомі, оцінюються на підставі статистичних даних).

Нехай деякі A_1, A_2, \dots, A_k – повна група попарно несумісних подій

$$\bigcup_{i \in \overline{1, k}} A_i = \Omega; \quad A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i \in \overline{1, k}, \quad j \in \overline{1, k},$$

таких, що $P(A_1) = p_1, P(A_2) = p_2, \dots, P(A_k) = p_k$.

Вважатимемо, що кожна подія A_1, A_2, \dots, A_k , яка може відбутись в зовнішньому середовищі, спонукає до того, що в економіці складається одна з ситуацій A_1, A_2, \dots, A_k , в якій фактори впливатимуть на деяке економічне явище з різною силою. Тобто кожній події ставиться у відповідність деякий набір значень факторних змінних. У цьому разі невідомо, яка саме подія настане, адже насправді не можна точно передбачити розвиток подій. Події зовнішнього середовища, від яких залежить досліджувана економічна система, мають стохастичний характер, тобто впливають на неї випадково [3, 4].

Якщо n – кількість чинників, m – кількість експериментів, $n < m$, то статистичні дані для кожної можливої ситуації A_k в економіці запишемо в матричній формі

$$X = \begin{pmatrix} x_{11}^{A_k} & x_{12}^{A_k} & \dots & x_{1n}^{A_k} \\ x_{21}^{A_k} & x_{22}^{A_k} & \dots & x_{2n}^{A_k} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1}^{A_k} & x_{n2}^{A_k} & \dots & x_{nn}^{A_k} \end{pmatrix}.$$

Зробимо кілька припущень: факторні змінні стохастично залежні, тобто X_i і X_j – корельовані, $r(X_i, X_j) = r_{ij}$, та визначають результат, $r(X_i, Y) = r_i, i, j \in \overline{1, n}$. Відповідні матриці кореляцій $R^{A_1} = (r_{ij}^{A_1})_{i,j=1}^n, R^{A_1} \neq I$ та $R_0^{A_1} = (r_i^{A_1})_{i=1}^n$, причому $R \cdot A = R_0$ при $A = (a_1, \dots, a_n); a_j = \hat{a}_j$.

У кожній ситуації A_l знаходимо набір домінуючих факторів за допомогою відомого алгоритму Хелвіга відбору визначальних чинників [6].

1. Знаходимо всі можливі комбінації факторів, тобто будуємо всі підмножини факторних змінних $\{X_1\}, \{X_2\}, \dots, \{X_1, X_2\}, \{X_1, X_3\}, \dots, \{X_1, \dots, X_n\}$. Позначимо їх, відповідно, $C_i, i \in \overline{1, 2^n - 1}$. Індекси чинників у кожній конкретній C_i занумеруємо в множину $I = \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, k \leq n$.

2. Виділяємо один визначальний фактор для кожної окремої множини факторів. Силу впливу кожного фактора $X_p, p \in I$ в комбінації C_i назвемо індивідуальною інформаційною об'ємністю. Одержуємо

$$h_{i,i_1} = \frac{r_{i_1}^2}{\sum_{p \in I_i} |r_{pi_1}|}, \quad h_{i,i_2} = \frac{r_{i_2}^2}{\sum_{p \in I_i} |r_{pi_2}|}, \quad \dots, \quad h_{i,i_k} = \frac{r_{i_k}^2}{\sum_{p \in I_i} |r_{pi_k}|}.$$

Максимальне значення серед всіх $h_{i,i_j}, j = \overline{1, k}$, свідчить про домінуючий фактор у кожній з можливих комбінацій $C_i, i \in \overline{1, 2^n - 1}$.

3. Знаходимо форму лінійної регресії, яка найліпше описує поведінку залежної змінної, тобто оптимальну комбінацію факторів, що є визначальною для економічного явища.

Сукупний вплив всіх факторів, наявних в множині C_i , називатимемо інтегральною (колективною) інформаційною об'ємністю $H_i = \sum_{i_s \in I} h_{i,i_s}, s \in \overline{1, k}$. Шукану домінуючу підмножину вибираємо серед усіх C_i шляхом максимізації наближених значень інтегральної інформаційної об'ємності.

Зауважимо, що нас цікавлять не тільки конкретні фактори, які формують комбінацію з найбільшою інтегральною інформаційною об'ємністю, а й виявлення факту

наявності чи відсутності в моделі “схожих” комбінацій, адже очевидно, що значення H_i для різних C_i можуть бути близькими.

Наступним кроком введення в модель невизначеності є порівняння вибраних у кожній ситуації наборів домінуючих факторів. Можливі такі три випадки.

Перший випадок. $\forall j, p: \{X_{i_1}^{A_j}, \dots, X_{i_s}^{A_j}\} = \{X_{i_1}^{A_p}, \dots, X_{i_s}^{A_p}\}$ – у кожній ситуації A_l отримуємо той самий набір. Тоді вважаємо, що цей набір факторів є визначальним під час формування економічного явища.

Другий випадок. $\exists q_1, q_2 \in I_i \forall j, p: X_{q_1}^{A_j} = X_{q_2}^{A_p}$ – в наборах, отриманих для кожної ситуації A_l , є один або більше спільних факторів. Цей випадок також є тривіальним. Результат очевидний – саме ці фактори є визначальними для економічного явища, а всі інші – вилучаємо з моделі.

Третій випадок. $\forall j, p \forall q_1, q_2 \in I_i: X_{q_1}^{A_j} \neq X_{q_2}^{A_p}$ – в наборах у різних ситуаціях A_l немає спільних факторів.

У такому випадку пропонують будувати узагальнені матриці вигляду

$$R = \sum_{l=1}^k p(A_l) R^{A_l} \quad \text{та} \quad R_0 = \sum_{l=1}^k p(A_l) R_0^{A_l}.$$

Застосування до узагальнених матриць такого вигляду відомої вже методики дає змогу ввести в модель невизначеність і уникнути несуттєвих елементів.

Після того, як факторну регресійну модель було побудовано, перейдемо до аналізу та оцінки її параметрів.

3. Дослідження в стохастичному середовищі. Варто звернути увагу на еволюцію зовнішніх чинників у часі. Звісно, було б зручно, коли б ні фактори, ні їхні значення не змінювались від періоду до періоду. Тоді б, наприклад, для оцінювання дохідності цінних паперів за великий період часу можна було б застосувати механічні процедури й отримати факторну модель з усіма необхідними величинами. Така факторна модель, ефективна для одного часового проміжку, була б ефективною для наступного періоду. Однак вона не враховує дію зовнішнього середовища. Насправді ж треба, щоб побудована модель враховувала динамічну природу економічного середовища, в такому випадку сила впливу факторів не може бути однозначно визначена. Тому при постійних випадкових зовнішніх впливах, незалежних і неоднакових у різні моменти часу, дослідження потребує вже система, задана за допомогою динамічної факторної регресії. Іншими словами, треба побудувати модель, яка б “добре” описувала деяку економічну систему під впливом зовнішнього середовища протягом достатньо довгого періоду часу. Отож, постає питання про існування рівноважного значення результативної змінної.

Вплив зовнішнього середовища в кожен момент часу задається регресією $Y_t = a_1(t)X_1 + a_2(t)X_2 + \dots + a_n(t)X_n$, де a_i – коефіцієнти, які виражають силу впливу відповідних коефіцієнтів, $\sum a_i = 1$, $i = 1, \dots, n$.

За умови стабільності економіки з m можливих ситуацій (таких як спад, застій, підйом тощо) відбувалася б лише деяка ситуація i , тому факторна модель спростилась би до $Y(i) = a_1(i)X_1 + a_2(i)X_2 + \dots + a_n(i)X_n$.

Позаяк економіка – явище динамічне і постійно змінюється, то треба розглядати еволюцію такої регресії в часі, тобто досліджувати динамічну факторну модель

$$Y(\xi(t)) = a_1(\xi(t))X_1 + a_2(\xi(t))X_2 + \dots + a_n(\xi(t))X_n.$$

Постає питання – як, враховуючи ці безперервні зміни, задані $\xi(t)$, спрогнозувати результат Y_t для деякого досить великого t ? Іншими словами, ми хочемо дослідити побудовану модель на стабільність.

Вважатимемо, що зміну станів навколишнього середовища можна змоделювати однорідним ланцюгом Маркова $\xi(t)$ з дискретним (неперервним) часом і скінченною множиною станів X [4].

Розглянемо функцію $a_k(\xi)$, $k = \overline{1, n}$, визначену на множині станів X ланцюга Маркова $\xi(t)$. Щоб отримати очікуваний при $t \rightarrow \infty$ результат, треба наблизити кожен з функцій $a_k(\xi)$. Для цього використовуємо усереднені характеристики, тобто середнє значення цих функцій вздовж траєкторії процесу $\xi(t)$ вигляду $\frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} a(\xi(t))$ в дискретному та $\frac{1}{T} \int_0^T a(\xi(t)) dt$ неперервному випадку. Існування границі таких середніх при $T \rightarrow \infty$ визначає ергодична теорема [4].

Сформулюємо умови ергодичної теореми в нашому випадку.

Теорема 1 (дискретний випадок). *Нехай ξ – ланцюг Маркова зі скінченною множиною станів X ; $\{q_x\}$ – стаціонарний розподіл, а функція $a_k(\xi)$ задовольняє умову $\sum_x q_x |a_k(\xi)| < \infty$.*

Тоді з ймовірністю 1 справджується рівність $\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \sum_{t=0}^{T-1} a_k(\xi(t)) = \sum_y q_y f(y)$.

Теорема 2 (неперервний випадок). *Нехай виконуються умови:*

- 1) π_j , $j \in X$ – стаціонарні ймовірності для станів вкладеного ланцюга Маркова;
- 2) коефіцієнти q_j задовольняють умову $\sum \pi_j q_j^{-2} < \infty$, $j \in X$;
- 3) функція $a(\xi)$ на станах ланцюга така, що $\sum a^2(i) \pi_i q_i^{-2} < \infty$, $i, j \in X$.

Тоді з ймовірністю 1

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T a(\xi(t)) dt = \frac{\sum a(i) \pi_i q_i^{-1}}{\sum \pi_i q_i^{-1}},$$

де $\pi_j = \lim_{t \rightarrow \infty} p_{ij}(t)$, $\sum \pi_i = 1$, $i \in X$ – стаціонарний розподіл.

Застосувавши цю теорему в неперервному випадку, отримуємо шукані наближення для залежної змінної

$$\frac{1}{T} \int_{t=0}^T Y(\xi(t)) dt \xrightarrow{T \rightarrow \infty} \theta_1 X_1 + \dots + \theta_n X_n,$$

де ваги факторів $\theta_1 = \frac{\sum a_1(i) \pi_i q_i^{-1}}{\sum \pi_i q_i^{-1}}$, \dots , $\theta_n = \frac{\sum a_n(i) \pi_i q_i^{-1}}{\sum \pi_i q_i^{-1}}$, функції $a_k(i)$ – чутливості результувальної змінної до фактора X_k при $\xi(t) = i$.

Зауваження 1. Легко бачити, що твердження сформульованих вище теорем 1 та 2 отримують у разі використання відповідних ергодичних теорем Скорохода [4]. Справді, оскільки в нашому випадку множина станів X процесу $\xi(t)$ скінченна, то для ергодичності достатньо, щоб стани X утворювали один клас станів, які сполучаються, а отже, деякі умови ергодичних теорем виконуються автоматично.

Оскільки функції $a_k(\cdot)$, $k = \overline{1, n}$ визначені на множині станів X ланцюга Маркова $\xi(t)$, то ми одержали наближене усереднене значення результувальної змінної, що відповідає за стан економічного явища в майбутньому. Тобто знайдено значення параметрів факторної регресії і показано, що для динамічної системи, яка зазнає постійних зовнішніх впливів, незалежних у різні моменти часу, все таки простежується певна стабільність регресії, задана коефіцієнтами $\theta_1, \dots, \theta_n$ (у неперервному випадку). Отож, ймовірніше узагальнення динамічної системи за допомогою ланцюгів Маркова дає змогу змоделювати (спрогнозувати) майбутній стан економічного явища з урахуванням впливу на нього зовнішнього середовища у вигляді факторів X_1, X_2, \dots, X_n , що діють з відповідними “коефіцієнтами стабільності”.

4. Висновки. Отже, побудовано згідно з розробленим узагальненим механізмом вибору визначального набору факторів динамічну багатфакторну модель і спрощено її до звичайної факторної регресії. Спроба ввести невизначеність у метод Хелвіга виявилась успішною. Отримані результати можуть стати невід’ємною частиною теорії функціонування економічної системи в умовах невизначеності.

-
1. *Грін В.Г.* Економетричний аналіз / *Грін В.Г.* – К., 2005.
 2. *Леоненко М.М.* Теоретико-ймовірнісні та статистичні методи в економетриці та фінансовій математиці / *Леоненко М.М., Мішуря Ю.С., Пархоменко В.М., Ядренко М.Й.* – К., 1985.
 3. *Лысенко Ю.Г.* Модели управления проектами в нестабильной экономической среде / *Лысенко Ю.Г., Левчицкий С.И.* – Донецк, 2003.
 4. *Скоруход А.В.* Элементы теории вероятностей и случайных процессов / *Скоруход А.В.* – К., 1975.
 5. *Шарп У.* Инвестиции / *Шарп У., Александер Г., Бейли Д.* – М., 1997.
 6. *Hellwig Z.* On the optimal Choice of Predictors, Study VI / *Hellwig Z.* – Paris: United Nations Educational, Scientific and Cultural Organization, 1968.

SYSTEMS ANALYSIS OF MULTIFACTOR ECONOMETRIC MODELS IN STOCHASTIC ENVIRONMENT

Yaroslav YELEJKO, Kateryna KOSAREVYCH

*Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: katia_kosarevych@mail.ru*

The article focuses on economic process's formalization under uncertainty. Famous studies are silent on the problem of construction the method for the optimal choice of predictors of multifactor econometric model that would be effective under uncertainty. This study intends to fill in the gaps above. Generalized Hellwig's method of selection of the optimal set of dominant factors in stochastic environment is proposed, dynamic factor model is

constructed. Parameters of multifactor regression described by Markov process and depended on evolution of outer environment are determined.

Key words: dynamic factor model, dominant factor, Hellwig's method, stochastic factor regression, Markov process.

СИСТЕМНЫЙ АНАЛИЗ МНОГОФАКТОРНЫХ ЭКОНОМЕТРИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ В СЛУЧАЙНОЙ СРЕДЕ

Ярослав ЕЛЕЙКО, Екатерина КОСАРЕВИЧ

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: katia_kosarevych@mail.ru*

Рассмотрено проблему формализации экономического процесса в условиях неопределенности. Известные на сегодня работы избегают вопроса построения метода оптимального выбора факторов эконометрической модели, который был бы эффективным в условиях неопределенности. Наша цель – решить эту проблему. Построен обобщенный метод Хелвига для отбора определяющего набора факторов в случайной среде и соответствующая динамическая модель. Определены параметры многофакторных эконометрических моделей, зависящих от эволюции внешних факторов, которую можно смоделировать как процесс Маркова.

Ключевые слова: динамическая факторная модель, доминирующий фактор, метод Хелвига, стохастическая факторная регрессия, процесс Маркова.

Стаття надійшла до редколегії 12.04.2010

Після остаточної правки 09.11.2010

Прийнята до друку 22.12.2010