ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2010.
Вип. 72. С. 107–126

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2010.
Is. 72. P. 107–126

УДК 517.9

ІНТЕГРОВНІ ПОТЕНЦІАЛИ СИМЕТРИЧНИХ ЗАДАЧ ЧОТИРЬОХ ТА П'ЯТИ ПОПАРНО ВЗАЄМОДІЮЧИХ ЧАСТИНОК НА ПРЯМІЙ

Богдан ДОВГАНЬ, Андрій ВУС

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: bohdan_dovhanj@ukr.net, andrij_vus@ukr.net*

Досліджено редуковані системи чотирьох і п'яти попарно взаємодіючих частинок на прямій. Розглянуто властивості потенціалів взаємодії в припущенні, що ця система володіє першим інтегралом, поліноміальний за імпульсами. Отримано функціональні рівняння на потенціали й описано деякі їхні розв'язки.

Ключові слова: гамільтонова система, перший інтеграл, дужка Пуассона, теорема додавання.

1. Вступ. Одним з важливих напрямів дослідження інтегровності динамічних систем є розгляд системи взаємодіючих n частинок на прямій, яка описується гамільтоніаном

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i\le i<j\le n} V(x_i - x_j), \tag{1}$$

де $V(t)$ – потенціал попарної взаємодії частинок. Вперше таку задачу для випадку трьох частинок з потенціалом взаємодії $V(t) = a/t^2$ дослідив Якобі [6], який показав, що вона є інтегровною. Згодом Ф. Калоджеро, Б. Сазерленд та Дж. Мозер [8-13] довели інтегровність системи n взаємодіючих частинок з потенціалом у вигляді $\wp$–функції Вейєрштрасса. Загальний вигляд перших інтегралів та їхній зв'язок з квантовими системами описав С.І. Підкуйко [4-5]. Висока симетрія таких систем була об'єктом тривалих досліджень М.А. Ольшанецького та А.М. Переломова [1-3, 15-18]. Значний внесок в дослідження проблеми інтегровності деформованих систем взаємодіючих частинок внесли М. Адлер, П. ван Мербеке, В.І. Іноземцев [7, 14]. Часто розглядаються системи на прямій, в яких частинки, що їх утворюють, взаємодіють тільки з найближчими сусідами (одновимірні ланцюжки). Динаміка “замкненого” (періодичного) ланцюжка описується гамільтоніаном

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n} V(x_i - x_{i+1}), \quad x_{n+1} = x_1 \tag{2}$$

а “розірваного” (неперіодичного) – гамільтоніаном

$$H = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} p_i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} V(x_i - x_{i+1}). \tag{3}$$

У цих випадках потенціал V не завжди вважається парним.

1.1. Формулювання задачі. Основними припущеннями щодо досліджуваних систем n взаємодіючих частинок на прямій є їхня повна інтегровність за Ліувіллем, тобто існування повного набору перших інтегралів $\{F_k, k = \overline{1,n}\}$, $F_1 = H$, поліноміальних за імпульсами і функціонально незалежних між собою.

Розглянемо проблему інтегровності за Ліувіллем гамільтонової системи взаємодії чотирьох і п’яти точкових мас на прямій з гамільтоніаном (1), де $n \in \{4, 5\}$, $x_i, p_i, i = \overline{1,n}$ – відповідно координати та імпульси частинок (точкових мас), функцію V тут і надалі будемо називати *потенціалом.*

Ми розглядаємо перші інтеграли, що поліноміальні за імпульсами, тому в загальному випадку перший інтеграл можна записати у вигляді

$$F = F_{2N} + F_{2N-2} + \cdots + F_0, \tag{4}$$

де $F_r = \sum\limits_{i_1+\cdots+i_k=r} E^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(x)p_1^{i_1}\ldots p_k^{i_k}$ – однорідний поліном порядку r за імпульсами з коефіцієнтами $E^{i_1,i_2,\ldots,i_k}(x)$, які є $C^{(1)}$-гладкими функціями координат.

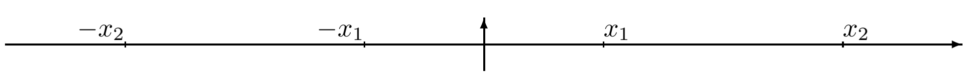
Якщо $k = 2$, то $F_r = \sum\limits_{i=0}^{r} E^{r-i,i}(x)p_1^{r-i}p_2^i$. Для випадку $k = 2$, $2N = 4$, $r = 4$ позначатимемо $A_i = E^{4-i,i}, \quad i = \overline{0,4}$. Якщо $F(x,p)$ – перший інтеграл гамільтонової системи з гамільтоніаном (1), то будемо говорити, що потенціал V *допускає* перший інтеграл F.

Розглядатимемо надалі лише потенціали $V(t)$, що задовольняють такі умови.

1. Нуль є особливою точкою для потенціалу $V(t)$ (полюс або істотна особлива точка).

2. $V(t)$ – парна.

1.2. Редукція задач чотирьох і п’яти частинок на прямій із попарною взаємодією до системи з 2 ступенями вільності. Нехай на прямій розміщені чотири частинки, що розташовані симетрично стосовно початку координат



Вибравши початкові умови $x_i(0)$, $\dot{x}_i(0)$, $i = \overline{1,4}$, у симетричному вигляді, одержимо для еволюції в часі

$$\begin{cases} x_3(t) = -x_2(t), \\ x_4(t) = -x_1(t). \end{cases}$$

Внаслідок симетричності еволюції системи стосовно початку координат гамільтоніан (1) може бути зведений до вигляду

$$H^* = p_1^2 + p_2^2 + 2V(x_2 - x_1) + V(2x_1) + 2V(x_1 + x_2) + V(2x_2),$$

який зручно звести до вигляду $H^* = 2\widetilde{H}$, де

$$\widetilde{H} = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2) + V(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}V(2x_1) + V(x_1 + x_2) + \frac{1}{2}V(2x_2).$$

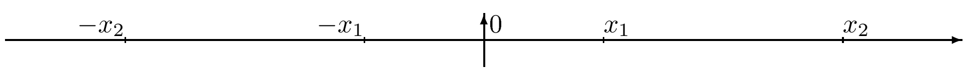
Надалі $\widetilde{H}$ для зручності позначатимемо знову через H

$$H = T + W, \tag{5}$$

де кінетична енергія $T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$, а

$$W = V(x_1 + x_2) + V(x_2 - x_1) + \frac{1}{2}V(2x_1) + \frac{1}{2}V(2x_2). \tag{6}$$

Ми описали вигляд H і W у випадку редукованої системи чотирьох частинок на прямій з попарною взаємодією. Зауважимо, що наведений вище алгоритм редукції застосовний і до випадку $n = 5$. Справді, нехай на прямій розміщено п'ять частинок, що розташовані симетрично стосовно початку координат.



Вибравши початкові умови $x_i(0), \dot{x}_i(0), i = \overline{1,5}$ у відповідному вигляді, внаслідок симетричності еволюції системи стосовно початку координат, одержимо

$$\begin{cases} x_3(t) &= \quad 0, \\ x_4(t) &= -x_2(t), \\ x_5(t) &= -x_1(t). \end{cases}$$

Аналогічно до (6) одержимо

$$H = T + W,$$

де кінетична енергія $T = \frac{1}{2}(p_1^2 + p_2^2)$, а

$$W = V(x_1 + x_2) + V(x_2 - x_1) + V(x_1) + \frac{1}{2}V(2x_1) + V(x_2) + \frac{1}{2}V(2x_2). \tag{7}$$

Надалі гамільтоніани для випадку редукованої системи чотирьох і п'яти частинок на прямій записуватимемо у вигляді (5), де для випадку чотирьох частинок потенціальна енергія W має вигляд (6), а для випадку п'яти частинок – вигляд (7).

2. Симетрії задач чотирьох і п'яти частинок. Позначимо через X множину функцій $f(x,p) : \mathbb{R}^{2N} \mapsto \mathbb{R}$, які залежать від координат та імпульсів.

Нагадаємо, що канонічне перетворення – це заміна узагальнених координат та узагальнених імпульсів класичної механічної системи на інші, при якій зберігається вигляд основних рівнянь гамільтонової механіки – рівнянь Гамільтона

$$\dot{x}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = \overline{1,n}. \tag{8}$$

Означення 1. *Оператор $S : \mathbb{R}^{2N} \mapsto \mathbb{R}^{2N}$, який описує канонічну заміну узагальнених координат та узагальнених імпульсів класичної механічної системи на інші, при якій зберігається вигляд функції Гамільтона H: $H(S(x,p)) \equiv H(x,p)$, називатимемо* симетрією.

Означення 2. *Будемо говорити, що функція $f(x,p) \in X$* задовольняє *симетрію $S : \mathbb{R}^{2N} \mapsto \mathbb{R}^{2N}$ (або ж, що функція f* володіє *симетрією S), якщо $f(S(x,p)) \equiv f(x,p)$.*

2.1. Опис симетрій. Опишемо симетрії, якими володіють гамільтоніани (5), (6) і (5), (7).

Тотожна симетрія $I : \forall f \in X\ If = f$.

Симетрія $S_0 : S_0(x_1,x_2,p_1,p_2) \equiv (x_2,x_1,p_2,p_1)$.

Симетрія $S : S(x_1,x_2,p_1,p_2) \equiv (-x_2,x_1,-p_2,p_1)$.

Симетрія $S_1 : S_1(x_1,x_2,p_1,p_2) \equiv (-x_1,x_2,-p_1,p_2)$.

Симетрія $S_2 : S_2(x_1,x_2,p_1,p_2) \equiv (x_1,-x_2,p_1,-p_2)$.

Симетрія $S_{12} = S_1S_2 : S_{12}(x_1,x_2,p_1,p_2) \equiv (-x_1,-x_2,-p_1,-p_2)$.

Симетрія $S_{012} = S_0S_{12}$: $S_{012}(x_1,x_2,p_1,p_2) \equiv (-x_2,-x_1,-p_2,-p_1)$.

Симетрії S_0, S_1, S_2, S_{12} і S_{012} – другого порядку, а симетрія S – четвертого порядку: $S_0^2 = S_1^2 = S_2^2 = S_{12}^2 = S_{012}^2 = S^4 = I$.

$S^2 : S^2(x_1,x_2,p_1,p_2) = (-x_1,-x_2,-p_1,-p_2)$; $S^2 = S_{12}$.

$S^3 : S^3(x_1,x_2,p_1,p_2) = (x_2,-x_1,p_2,-p_1) = S^{-1}$.

Зауважимо, що $S_1S_0 = S_0S_2 = S$ і $S_2S_0 = S_0S_1 = S^{-1}$. Нас буде цікавити група симетрій $\{I,S_1,S_0\} \cong D_8$. Випишемо усі елементи цієї групи симетрій: $\{I,S_1,S_0\} = (I,S_0,S_1,S_2,S,S_{12},S^{-1}$ і $S_{012})$. Ми отримали відому діедральну групу D_8, всі властивості якої описані в [19].

Покажемо таке: якщо оператор S – симетрія другого порядку для гамільтоніана $H(x,p)$ (тобто $S^2 = I$), то існує перший інтеграл $G(x,p)$, що задовольняє симетрію S, тобто для якого $GS(x,p) \equiv G(x,p)$. Справді, нехай для гамільтоніана $H(x,p)$ існує деякий перший інтеграл $F(x,p)$ такий, що $SF \neq F$. Розглянемо два перші інтеграли

$$\begin{cases} G_1 = F + FS, \\ G_2 = (F - FS)^2. \end{cases}$$

Вони обидва задовольняють симетрію S

$$\begin{cases} G_1S = G_1 : \ G_1S = FS + FS^2 = FS + FI = F + FS = G_1; \\ G_2S = G_2 : \ G_2S = (F-FS)^2S = ((F-FS)S)^2 = (FS-F)^2 = (F-FS)^2 = G_2. \end{cases}$$

Хоча б один з них буде нетривіальним (функціонально незалежним з гамільтоніаном H). Отже, доведено таку лему.

Лема 1. *Нехай оператор S – симетрія другого порядку для гамільтоніана $H(x,p)$, тобто $S^2 = I$. Тоді існує перший інтеграл $G(x,p)$, що задовольняє симетрію S ($GS(x,p) \equiv G(x,p)$).*

Далі вважатимемо, що перший інтеграл задовольняє усі ті симетрії другого порядку, які задовольняє відповідний гамільтоніан H. Крім того, гамільтоніани (5), (6) і (5), (7) володіють симетрією четвертого порядку S, яка виражається через дві симетрії другого порядку $S = S_1S_0$. Очевидно таке: якщо перший інтеграл задовольняє дві симетрії, то він задовольняє і їхню композицію

$fS_1(x,p) \equiv f(x,p) \wedge fS_2(x,p) \equiv f(x,p) \Rightarrow fS_1S_2(x,p) \equiv f(x,p)$.

Тому надалі будемо вважати, що перший інтеграл задовольняє також усі симетрії вищого порядку, що можуть бути подані як композиції симетрій другого порядку.

2.2. Множина допустимих перетворень.

Лема 2. *Нехай деяка гамільтонова система взаємодіючих частинок на прямій з гамільтоніаном (5) має перший інтеграл вигляду (4), тоді гамільтонова система взаємодіючих частинок на прямій з гамільтоніаном $H = T + \alpha W$, де α – сталий множник, має перший інтеграл вигляду $F_{2N} + \alpha F_{2N-2} + \cdots + \alpha^{N-k} F_{2k} + \cdots + \alpha^N F_0$.*

Очевидно, що система (5) має нетривіальний поліноміальний за імпульсами перший інтеграл (4) одночасно з системою

$$H = T + \alpha W. \tag{9}$$

Справді, якщо (4) – перший інтеграл системи з гамільтоніаном (5), і F_{2k} – його однорідні $2k$ степеня за імпульсами компоненти, то вираз $F_{2N} + \alpha F_{2N-2} + \cdots + \alpha^{N-k} F_{2k} + \cdots + \alpha^N F_0$ є першим інтегралом для системи з гамільтоніаном (9).

Означення 3. Допустимими перетвореннями координат *будемо називати комбінації перетворень двох таких типів:*

1) $(x, p_x) \mapsto (y, p_y)$: $y = Ax$, $p_x = A^T p_y$ – розширення точкового перетворення конфігураційних змінних до канонічного;

2) $(x,p) \mapsto (x, \frac{1}{\beta}p)$: $\beta \neq 0$ – у цьому разі гамільтоніан $H = T + W$ переходить у гамільтоніан $H = \frac{1}{\beta^2}T + W$, який еквівалентний гамільтоніану $H = T + \beta^2 W$. Відповідно, за лемою 2 якщо $F = F_{2N} + F_{2N-2} + \cdots + F_0$ – перший інтеграл для $H = T + W$, то $F_{2N} + \beta^2 F_{2N-2} + \cdots + \beta^{2N-2k} F_{2k} + \cdots + \beta^{2N} F_0$ – перший інтеграл для $H = T + \beta^2 W$ і зберігається умова $\{F, H\} = 0$ завдяки поліноміальності за імпульсами.

Згідно з лемою 2 старша компонента першого інтеграла за допустимих перетворень координат не змінюється.

Лема 3. *Нехай деяка гамільтонова система взаємодіючих частинок на прямій з гамільтоніаном (5) має перший інтеграл вигляду (4). Тоді за допустимих перетворень координат диференціально-функціональні співвідношення вигляду*

$$[\{F_{2N}, W\}] = 0$$

зберігаються з точністю до сталого множника.

Оскільки ми розглядаємо систему з поліноміальним за імпульсами першим інтегралом, то поняття допустимого перетворення є певним розширенням поняття канонічного перетворення для цих гамільтонових систем.

3. Функціональні рівняння на потенціали взаємодії. Умова

$$\{F, H\} = \sum_{i=1}^{2} \left(\frac{\partial F}{\partial x_i} \frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i} \frac{\partial H}{\partial x_i} \right) = 0$$

записується для випадку поліноміального за імпульсами першого інтеграла $2N$ степеня у вигляді системи рівнянь

$$\begin{cases} 0 & = & p_1\partial_{x_1}F_{2N} + p_2\partial_{x_2}F_{2N}; \\ \partial_{p_1}F_{2N}\cdot W_1 + \partial_{p_2}F_{2N}\cdot W_2 & = & p_1\partial_{x_1}F_{2N-2} + p_2\partial_{x_2}F_{2N-2}; \\ & \vdots & \\ \partial_{p_1}F_2\cdot W_1 + \partial_{p_2}F_2\cdot W_2 & = & p_1\partial_{x_1}F_0 + p_2\partial_{x_2}F_0, \end{cases} \tag{10}$$

де $\partial_{x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}$, $\partial_{p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}$, $W_i = \partial_{x_i}W$ – позначення, які використовуватимемо надалі.

Права частина кожного з рівнянь (10) є однорідним поліномом за імпульсами. Тому коефіцієнти при відповідних мономах $p_1^{2N-i+1}p_2^i$ дорівнюють нулю.

Означення 4. *Нехай* $R_k(x_1,x_2,p_1,p_2) = \sum\limits_{i=0}^{k} f_i(x_1,x_2)p_1^{k-i}p_2^i$ *– деякий однорідний степеня k поліном за імпульсами. Введемо диференціальний оператор*

$$[R_k] = R_k\left(x_1,x_2,\partial_{x_2},-\partial_{x_1}\right) = \sum_{i=0}^{k}\partial_{x_2}^{k-i}(-\partial_{x_1})^i f_i(x_1,x_2). \tag{11}$$

Зауважимо, що при дії на праву частину рівнянь (10) оператором (11), отримаємо очевидно нулі. Тоді з рівнянь (10) одержимо

$$P_i(V) = 0, \tag{12}$$

де $P_i(V) = [\partial_{p_1}F_{2N+2-2i}\cdot W_1 + \partial_{p_2}F_{2N+2-2i}\cdot W_2]$.

Якщо існує функція V з розглядуваного класу функцій, яка не задовольняє рівняння (12), то співвідношення (12) називатимемо *нетривіальним.*

Означення 5. *Нетривіальні співвідношення (12) будемо називати теоремами додавання.*

Надалі нас цікавитиме перша теорема додавання як функціональне рівняння на невідомий потенціал взаємодії V.

Одержимо можливий вигляд теореми додавання. Для цього розпишемо перше з рівнянь (10) покомпонентно, прирівнюючи до нуля коефіцієнти при відповідних мономах $p_1^{2N-i+1}p_2^i$

$$\begin{cases} E_1^{2N,0} & = & 0, \\ E_1^{2N-1,1} + E_2^{2N,0} & = & 0, \\ & \vdots & \\ E_1^{2N-i,i} + E_2^{2N-i+1,i-1} & = & 0, \\ & \vdots & \\ E_2^{0,2N} & = & 0. \end{cases} \tag{13}$$

Послідовно інтегруючи рівняння (13), одержимо

$$
\begin{aligned}
E^{2N,0} &= \varphi_{2N},\\
E^{2N-1,1} &= \varphi_{2N-1} - x_1\varphi'_{2N},\\
E^{2N-2,2} &= \varphi_{2N-2} - x_1\varphi'_{2N-1} + \tfrac{x_1^2}{2}\varphi''_{2N},\\
&\vdots\\
E^{2N-i,i} &= \sum_{j=0}^{i}(-1)^j\tfrac{x_1^j}{j!}\varphi^{(j)}_{2N-(i-j)},\\
&\vdots\\
E^{0,2N} &= \sum_{j=0}^{2N}(-1)^j\tfrac{x_1^j}{j!}\varphi^{(j)}_j = \varphi_0 - x_1\varphi'_1 + \cdots + \tfrac{x_1^{2N}}{(2N)!}\varphi^{(2N)}_{2N},
\end{aligned}
$$

де $\varphi_k = \varphi_k(x_2)$, $k=\overline{1,2N}$ – деякі функції. Оскільки $E_2^{0,2N}=0$, то всі φ_k є поліномами степеня не вище k.

Якщо F задовольняє симетрію S_1, то для всіх $k\in\overline{1,N}$ $\varphi_{2k-1}=0$

$$
\begin{aligned}
E^{2N,0} &= \varphi_{2N},\\
E^{2N-1,1} &= -x_1\varphi'_{2N},\\
E^{2N-2,2} &= \varphi_{2N-2} + \tfrac{x_1^2}{2}\varphi''_{2N},\\
&\vdots\\
E^{2N-i,i} &= \sum_{j=0}^{[i/2]}\tfrac{x_1^{2j}}{(2j)!}\varphi^{(2j)}_{2N-(i-2j)},\\
&\vdots\\
E^{0,2N} &= \sum_{j=0}^{N}\tfrac{x_1^{2j}}{(2j)!}\varphi^{(2j)}_{2j} = \varphi_0 + \tfrac{x_1^2}{2}\varphi''_2 + \cdots + \tfrac{x_1^{2N}}{(2N)!}\varphi^{(2N)}_{2N}.
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Множину всіх розглядуваних перших інтегралів поділимо на три групи за критерієм, який ґрунтується на вигляді коефіцієнтів старшої однорідної за імпульсами компоненти

$$
F_{2N} = \sum_{i=0}^{2N} E^{2N-i,i}(x_1,x_2)p_1^{2N-i}p_2^i \tag{15}
$$

першого інтеграла (4).

Означення 6. *Будемо називати перший інтеграл F інтегралом I типу, якщо всі $E^{2N-i,i}$ є константами, до того ж старша однорідна за імпульсами компонента F_{2N} не є степенем полінома $p_1^2+p_2^2$ (умова незалежності F з інтегралом енергії). У випадку, якщо принаймні один з коефіцієнтів $E^{2N-i,i}$ не є константою і $E^{1,2N-1}\neq 0$, то називатимемо F інтегралом II типу. Якщо хоч один з коефіцієнтів $E^{2N-i,i}$ не є константою і $E^{1,2N-1}=0$, то називатимемо F інтегралом III типу.*

4. Перший інтеграл четвертого порядку I типу. Для систем з гамільтоніанами (5), (6) та (5), (7) шукаємо найпростіший розв'язок – перший інтеграл четвертого порядку $2N=4$. Розглядаємо випадок інтеграла I типу ($A_i = const$).

Враховуючи групу симетрій гамільтоніана і першого інтеграла $\{I, S_1, S_0\} \cong D_8$ та функціональну незалежність з H, можна вважати, що

$$F_4 = \frac{p_1^2 p_2^2}{2}. \tag{16}$$

4.1. Загальний вигляд теореми додавання для першого інтеграла четвертого порядку. Умову (10) рівності нулю дужки Пуассона $\{F, H\}$, розписану за степенями імпульсів, для випадку $2N = 4$ запишемо у вигляді

$$\begin{cases} 0 & = & p_1\partial_{x_1}F_4 + p_2\partial_{x_2}F_4; \\ \partial_{p_1}F_4 \cdot W_1 + \partial_{p_2}F_4 \cdot W_2 & = & p_1\partial_{x_1}F_2 + p_2\partial_{x_2}F_2; \\ \partial_{p_1}F_2 \cdot W_1 + \partial_{p_2}F_2 \cdot W_2 & = & p_1\partial_{x_1}F_0 + p_2\partial_{x_2}F_0, \end{cases} \tag{17}$$

де $F_2 = ap_1^2 + bp_1p_2 + cp_2^2$.

Запишемо потенціальну частину W гамільтоніана в загальному вигляді

$$W = V_1(x) + V_2(y) + V_3(y - x) + V_4(x + y). \tag{18}$$

Справді, ми це можемо зробити, бо при $n = 4$

$$\begin{cases} V_1(x) & = & \frac{1}{2}V(2x), \\ V_2(y) & = & \frac{1}{2}V(2y), \\ V_3(y-x) & = & V(y-x), \\ V_4(x+y) & = & V(x+y), \end{cases} \tag{19}$$

а при $n = 5$

$$\begin{cases} V_1(x) & = & \frac{1}{2}V(2x) + V(x), \\ V_2(y) & = & \frac{1}{2}V(2y) + V(y), \\ V_3(y-x) & = & V(y-x), \\ V_4(x+y) & = & V(x+y). \end{cases} \tag{20}$$

Розв'яжемо друге рівняння системи (17), підставивши замість F_4 найпростіший поліном 4 степеня за імпульсами (16). У підсумку отримаємо умови на компоненти полінома 2 степеня за імпульсами

$$F_2 = (V_2(y) + \tfrac{Ay^2}{2})p_1^2 + (V_4(x+y) - V_3(y-x) - Axy)p_1p_2 + (V_1(x) + \tfrac{Ax^2}{2})p_2^2. \tag{21}$$

Подіявши оператором (11) на третє рівняння системи (17), отримаємо

$$\left[\frac{\partial}{\partial p_1}F_2W_1 + \frac{\partial}{\partial p_2}F_2W_2\right] = 0. \tag{22}$$

Підставивши знайдений вигляд для F_2 (21) в отримане рівняння (22), одержимо

$$\begin{gathered} \big(V_4'(x+y) - V_3'(y-x) - 2V_1'(x) - 3Ax\big)\big(V_3'(y-x) + V_4'(x+y) + V_2'(y)\big) + \\ + \big(2V_2'(y) + 3Ay - V_4'(x+y) - V_3'(y-x)\big)\big(V_4'(x+y) - V_3'(y-x) + V_1'(x)\big) + \\ + \big(V_4(x+y) - V_3(y-x) - Axy\big)\big(V_2''(y) - V_1''(x)\big) + \\ +2\left(V_2(y) + \tfrac{Ay^2}{2} - V_1(x) - \tfrac{Ax^2}{2}\right)\big(V_4''(x+y) - V_3''(y-x)\big) = 0. \end{gathered} \tag{23}$$

Скорочено диференціально-функціональне рівняння (23) можна подати у вигляді

$$\begin{gathered} \big(V_4 - V_3 - Axy\big)\big(V_2'' - V_1''\big) + 2\left(V_2 + \tfrac{Ay^2}{2} - V_1 - \tfrac{Ax^2}{2}\right)\big(V_4'' - V_3''\big) - \\ -3\left(Ax + V_1'\right)\big(V_4' + V_3' + V_2'\big) + 3\left(Ay + V_2'\right)\big(V_4' - V_3' + V_1'\big) = 0. \end{gathered}$$

Прийнявши в диференціально-функціональному рівнянні $A = 0$, одержимо

$$(V_4 - V_3)\,(V_2'' - V_1'') + 2\,(V_2 - V_1)\cdot(V_4'' - V_3'') - 3V_1'\,(V_4' + V_3') + 3V_2'\,(V_4' - V_3') = 0. \tag{24}$$

Позначимо

$$\rho := (V_4 - V_3)\,(V_2'' - V_1'') + 2\,(V_2 - V_1)\cdot(V_4'' - V_3'') - 3V_1'\,(V_4' + V_3') + 3V_2'\,(V_4' - V_3')\,, \tag{25}$$

тоді (24) запишемо у вигляді

$$\rho \equiv 0.$$

Використаємо такий результат.

Теорема 1 (єдиності)**.** *[20] Нехай $Lf(x_1, x_2) = 0$, причому:*
1) диференціальний оператор $L = a\partial_{x_1}^2 + b\partial_{x_1}\partial_{x_2} + c\partial_{x_2}^2$, $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$;
2) f – голоморфна функція в $\mathbb{R}^2$ така, що $\lim\limits_{x_1^2 + x_2^2 \to \infty} f(x_1, x_2) = 0$.

Тоді $f(x_1, x_2) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^2$.

Наслідок 1. *Нехай $Lf(x_1, x_2) = 0$, причому:*
1) диференціальний оператор $L = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i \partial_{x_2}^i (-\partial_{x_1})^{n-i}$, $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i^2 \neq 0$;
2) f – голоморфна функція в $\mathbb{R}^2$ така, що $\lim\limits_{x_1^2 + x_2^2 \to \infty} f(x_1, x_2) = 0$.

Тоді $f(x_1, x_2) \equiv 0$ в $\mathbb{R}^2$.

Доведення. Оскільки кожен однорідний поліном можна подати у вигляді добутку поліномів 1 і 2 степеня над полем дійсних чисел, то оператор L можна подати у вигляді композиції диференціальних операторів 1 і 2 порядку. □

Використовуючи поведінку V на безмежності, покажемо, що в (23) $A = 0$. Справді, безпосередньою перевіркою можна переконатися у тому, що, застосувавши оператор диференціювання

$$L_8 = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial}{\partial y} - \frac{\partial}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\right)^2 \tag{26}$$

до виразу у лівій частині рівняння (23), можна отримати вираз, в якому не буде константи інтегрування A, якщо потім його знову проінтегрувати з застосуванням наслідку 1 із теореми єдиності, то отримаємо вираз (24).

4.2. Теореми додавання редукованих задач чотирьох та п'яти частинок. Розглядаємо два випадки: випадок $W^{(4p)}$ – редуковану систему з чотирьох частинок із попарною взаємодією, що описується гамільтоніаном, заданим системою (5), (6) та $W^{(5p)}$ – редуковану систему з п'яти частинок із попарною взаємодією, що описується системою (5), (7).

Розглянемо випадок $W^{(4p)}$ – редуковану систему з чотирьох частинок із попарною взаємодією, що описується системою (5), (6), і підставимо функції (19) у рівняння (24)

$$\begin{aligned}&2(V(x+y) - V(y-x))(V''(2y) - V''(2x)) +\\ &+(V(2y) - V(2x))(V''(x+y) - V''(y-x)) -\\ &-3V'(2x)(V'(x+y) + V'(y-x)) + 3V'(2y)(V'(x+y) - V'(y-x)) = 0.\end{aligned} \tag{27}$$

Введемо позначення

$$
\begin{aligned}
&\xi = 2(V(x+y) - V(y-x))(V''(2y) - V''(2x))+\\
&+(V(2y) - V(2x))(V''(x+y) - V''(y-x))-\\
&-3V'(2x)(V'(x+y) + V'(y-x)) + 3V'(2y)(V'(x+y) - V'(y-x)),
\end{aligned} \tag{28}
$$

тоді (27) перепишемо в компактному вигляді

$$\xi = 0. \tag{29}$$

Легко переконатися, що вираз ξ кососиметричний щодо симетрій S_0 та S_1. Отже, рівняння (29) задовольняє групу симетрій $\{I, S_1, S_0\} \cong D_8$.

Зауважимо, що у виразі (28) зручно зробити заміну $x + y = v$, $y - x = u$, $2y = u + v$, $2x = v - u$. Позначимо

$$
\begin{aligned}
&\eta(u,v) = 2(V(v) - V(u))(V''(u+v) - V''(v-u))+\\
&+(V(u+v) - V(v-u))(V''(v) - V''(u))-\\
&-3V'(v-u)(V'(v) + V'(u)) + 3V'(u+v)(V'(v) - V'(u)).
\end{aligned} \tag{30}
$$

Відповідно, диференціально-функціональне рівняння (27) зведено до вигляду

$$\eta = 0, \tag{31}$$

який є досить зручним і будемо використовувати надалі.

Якщо підставити $V_1 = V_2 = V_3 = V_4 = V$, де

$$
\begin{cases}
V_1(x) &= V(x),\\
V_2(y) &= V(y),\\
V_3(y-x) &= V(y-x),\\
V_4(x+y) &= V(x+y),
\end{cases}
$$

в (24), то отримаємо рівняння $\eta(x,y) = 0$, еквівалентне до $\xi(x,y) = 0$.

Для випадку $W^{(5p)}$ редукованої системи з п'яти частинок із попарною взаємодією, що описується системою (5), (7), підставимо функції (20) у рівняння (24)

$$
\begin{aligned}
&(V(x+y) - V(y-x))(2V''(2y) - 2V''(2x) + V''(y) - V''(x))+\\
&+(V(2y) - V(2x) + 2V(y) - 2V(x))(V''(x+y) - V''(y-x))-\\
&-3(V'(2x) + V'(x))(V'(x+y) + V'(y-x))+\\
&+3(V'(2y) + V'(y))(V'(x+y) - V'(y-x)) = 0.
\end{aligned} \tag{32}
$$

Легко переконатися, що вираз у лівій частині (32) є сумою $\xi(x,y)$ та $\eta(x,y)$. Оскільки рівняння (29) та (31) еквівалентні, то якщо потенціал V задовольняє рівняння (29), то він задовольняє також і рівняння (32).

Отож, правильна така теорема.

Теорема 2. *Якщо V – інтегровний потенціал в задачі $W^{(4p)}$, що допускає перший інтеграл 4 порядку за імпульсами зі сталими коефіцієнтами, то цей самий V інтегровний в задачі $W^{(5p)}$ у тому ж сенсі, тобто, V – інтегровний потенціал у задачі $W^{(5p)}$, що допускає перший інтеграл 4 порядку за імпульсами зі сталими коефіцієнтами.*

Твердження 1. *Рівняння (24) і (32) є теоремами додавання.*

Доведення. Безпосередньою підстановкою можна переконатися, що потенціал $V(t) = \frac{1}{t^4}$ не задовольняє рівняння (24) і (32). $\square$

5. Розв'язки теорем додавання у різних функціональних класах. У цьому розділі ми покажемо, що гамільтоніан (5), (6) (для випадку $W^{(4p)}$) може мати перший інтеграл вигляду $F_4 = \frac{p_1^2 p_2^2}{2} + F_2 + F_0$ лише для потенціалу, який має в нулі полюс другого порядку.

Лема 4. *Нехай система з гамільтоніаном (5), (6) допускає додатковий поліноміальний за імпульсами перший інтеграл. Тоді потенціал $V(z)$ не може мати в околі нуля істотної особливої точки.*

Доведення. Припустимо, що розвинення в ряд Лорана в околі нуля потенціалу $V(z)$ має нескінченну кількість доданків у головній частині. Тоді можна вважати, що

$$V(z) = \sum_{n=-\infty}^{N} c_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = \ldots + c_N x^N + c_0 + c_1 x + \ldots \tag{33}$$

причому серед коефіцієнтів $c_k, k < 0$ є нескінченна кількість ненульових.

Розвиваючи $\rho(V)$ в ряд Лорана, на підставі (33) отримаємо, що коефіцієнт розвинення

$$\begin{aligned}
&2\Bigg(V''(-2y) - \sum_{n=-\infty}^{-1} c_n n(n-1)\cdot 2^{n-2}x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} c_n n(n-1)\cdot 2^{n-2}x^{n-2}\Bigg)\times\\
&\quad\times\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{V^{(m)}(y)}{m!}x^m - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{V^{(m)}(y)}{m!}(-1)^m x^m\Bigg) - 3\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{V^{(m+1)}(y)}{m!}x^m +\\
&\quad+\sum_{m=0}^{\infty}\frac{V^{(m+1)}(y)}{m!}(-1)^m x^m\Bigg)\cdot\Bigg(\sum_{n=-\infty}^{-1} c_n n 2^{n-1}x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} c_n n 2^{n-1} x^{n-1}\Bigg)+\\
&+\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{V^{(m+2)}(y)}{m!}x^m - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{V^{(m+2)}(y)}{m!}(-1)^m x^m\Bigg)\cdot\Bigg(V(-2y) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n 2^n x^n\Bigg)+\\
&\quad+3\Bigg(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{V^{(m+1)}(y)}{m!}x^m - \sum_{m=0}^{\infty}\frac{V^{(m+1)}(y)}{m!}(-1)^m x^m\Bigg)\cdot V'(-2y) = 0
\end{aligned}\tag{34}$$

при x^k дорівнює $V'(y)c_{k+1}(2^{k-1} + 2^k) + \{$*вищі похідні від* $V\}$.

Зокрема, прирівняємо до нуля коефіцієнт розвинення (34) при x^{N-1}

$$V'(y)c_N(2^{N-2} + 2^{N-1}) + \sum_{s=2}^{\infty}\Phi_s V^{(s)}(y) = 0, \tag{35}$$

де Φ_s – деякі константи, що виражаються через c_k, $k < 0$.

Розвинувши в ряд Лорана вираз у лівій частині рівняння (35) за степенями y і прирівнявши коефіцієнт при y^N до нуля, одержимо $c_N^2 N(2^{N-2} + 2^{N-1}) = 0$, що суперечить умові $c_N \neq 0$. □

Лема 5. *Теорема додавання (24) не має нетривіальних розв'язків, регулярних в нулі.*

Зауваження 1. Тривіальними вважатимемо поліноми не більше 2 степеня, бо для таких потенціалів система рівнянь Гамільтона (8) є лінійною системою диференціальних рівнянь, яка елементарно інтегровна в квадратурах.

Доведення леми. Нехай $t = 0$ – регулярна точка для $V(t)$.

Розвинувши вираз (30) в ряд Тейлора за змінною v і прирівнявши до нуля коефіцієнт при v^1, отримаємо рівняння

$$(8V''(u) - 16b)V'(u) + (-4a + 4V(u))V'''(u) = 0,$$

звідки $2(V'' - 2b)V' = -(V - a)V'''$.

Виконавши заміну $f = V - a$, одержимо $2f'(f'' - 2b) = -ff'''$.

Розділяючи змінні, послідовно отримаємо
$\frac{2f'}{f} = -\frac{f'''}{f''-2b}$; $2\ln f = -\ln(f'' - 2b) + \ln C$; $f^2 = C(f'' - 2b)^{-1}$; $f^2(f'' - 2b) = C$.

Але $f(0) = 0$, тому $C = 0$. Оскільки $f \not\equiv 0$, то з рівняння $f^2(f'' - 2b) = 0$ одержимо $f'' - 2b = 0$, а отже, $f(t) = bt^2 + C_1t + C_2$, тобто f є поліномом не вище 2-го степеня.

Зауважимо, що безпосередня підстановка цього розв'язку в рівняння (24) дає $b = 0$. Отже, враховуючи парність потенціалу, в класі регулярних функцій розв'язками цього рівняння є лише константи. $\square$

Теорема 3. *Гамільтоніан з $W^{(4p)}$ має перший інтеграл вигляду $F_4 = \frac{p_1^2p_2^2}{2} + F_2 + F_0$ лише для потенціалу, який має в нулі полюс другого порядку.*

Доведення. Розвинувши вираз у лівій частині рівняння (24) в ряд за змінною x, отримаємо

$$\begin{aligned}&2(2(V'(y)x + V'''(y)\tfrac{x^3}{6} + V^{(V)}(y)\tfrac{x^5}{5!}) + O(x^7))(V''(2y) - (\tfrac{\alpha(\alpha+1)}{(2x)^{\alpha+2}} + \dots))+\\&+(V(2y) - (\tfrac{1}{(2x)^{\alpha}} + \dots))(2(V'''(y)x + V^{(V)}(y)\tfrac{x^3}{6} + V^{(VII)}(y)\tfrac{x^5}{5!}) + O(x^7))-\\&-3(-\tfrac{\alpha}{(2x)^{\alpha+1}} + \dots)(2(V'(y) + V'''(y)\tfrac{x^2}{2} + V^{(V)}(y)\tfrac{x^4}{4!}) + O(x^7))+\\&\qquad+3V'(2y)(2V''(y)x + O(x^3)) = 0.\end{aligned}$$

Коефіцієнт при мономі $\frac{1}{x^{\alpha+1}}$ дорівнює

$$-4V'(y)\frac{\alpha(\alpha+1)}{2^{\alpha+2}} + 6V'(y)\frac{\alpha}{2^{\alpha+1}} = -\frac{\alpha}{2^{\alpha}}V'(y)(\alpha - 2) = 0.$$

Отже, $\alpha = 2$. Отож, серед усіх потенціалів, які мають полюс, рівняння (24) задовольняє лише потенціал з полюсом другого порядку. Крім того, за лемами 4 і 5 рівняння (24) не задовольняють ні потенціали, що мають істотну особливу точку, ані нетривіальні регулярні потенціали. Тому гамільтоніан з $W^{(4p)}$ має перший інтеграл вигляду $F_4 = \frac{p_1^2p_2^2}{2} + F_2 + F_0$ лише для потенціалу, який має в нулі полюс другого порядку. $\square$

Теорема 4. *Лише $V = \wp + const$ є розв'язком теореми додавання $\eta = 0$.*

Доведення. Згідно з теоремою 3 теорема додавання (27), а отже, і її еквівалентний запис (31), може мати розв'язки лише з полюсом другого порядку в нулі. Нехай $t = 0$ – полюс другого порядку для $V(t)$. Розвинувши вираз (28) за степенями x і прирівнявши до нуля коефіцієнт при x^1, отримаємо рівняння

$$\frac{1}{30}V^{(V)}(y) - 4V'(y)(V''(2y) - 8b) - 2V'''(y)(V(2y) - a) - 6V'(2y)V''(y) = 0. \quad (36)$$

Розвинувши вираз (30) за v, і прирівнявши до нуля коефіцієнт при v^1, отримаємо рівняння

$$\frac{4}{15}V^{(V)}(u) - 4V'''(u)(V(u)-a) - 8V'(u)(V''(u)-2b) = 0. \tag{37}$$

Розвинувши потенціал $V(t)$ в ряд Лорана в околі точки $t=0$, отримаємо зображення

$$V(t) = t^{-2} + \sum_{i=0}^{\infty} a_i t^{2i}. \tag{38}$$

Підставивши зображення (38) потенціалу V у диференціальне рівняння (37), отримаємо рекурентну формулу для коефіцієнтів розвинення (38)

$$a_i = 15\sum_{j=2}^{i-2} \frac{a_{i-1-j}a_j j(4j(i-2)-2i+3-2j^2+3j)}{(i-2)(i-3)(2i+3)(4(i-2)^2+10i-11)}, \quad i \geq 4. \tag{39}$$

Згідно з отриманою рекурентною формулою (39) лише 4 параметри a_0, a_1, a_2, a_3 довільні, а решта виражаються через них однозначно.

Якщо підставити зображення (38) потенціалу V у диференціальне рівняння (37) та диференціально-функціональне рівняння (36), та порівняти коефіцієнти одержаних розвинень рівнянь (37) і (36), то одержимо рівняння

$$\frac{35}{1243}a_1^2a_2 + \frac{11}{113}a_2a_3 = \frac{350}{11341}a_1^2a_2 + \frac{92}{1031}a_2a_3,$$

розв'язавши яке стосовно a_3, отримаємо, що $a_3 = \frac{1}{3}a_1^2$.

Залишилося 3 незалежні параметри a_0, a_1, a_2, якими шуканий потенціал V визначається однозначно.

Оскільки $\wp$-функція Вейєрштраса задовольняє теорему додавання

$$\begin{vmatrix} \wp(u) & \wp'(u) & 1 \\ \wp(v) & \wp'(v) & 1 \\ \wp(w) & \wp'(w) & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

де $u+v+w=0$ [21], і

$$\eta = -\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{vmatrix} V(x) & V'(x) & 1 \\ V(y) & V'(y) & 1 \\ V(-x-y) & V'(-x-y) & 1 \end{vmatrix} -$$

$$-\left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\right)\begin{vmatrix} V(x) & V'(x) & 1 \\ V(y-x) & V'(y-x) & 1 \\ V(-y) & V'(-y) & 1 \end{vmatrix},$$

то $V = \wp$ є розв'язком $\eta = 0$.

Але $\wp$-функція Вейєрштраса однозначно визначається трьома параметрами $a_0 = 0, a_1, a_2$ розвинення в ряд Лорана в околі нуля [21], тому шуканий потенціал V і є $\wp$-функцією Вейєрштраса з точністю до константи. □

6. Випадок першого інтеграла довільного степеня II типу. Запишемо співвідношення (12) при $i=1$

$$[\partial_{p_1}F_{2N}\cdot W_1 + \partial_{p_2}F_{2N}\cdot W_2] = 0. \tag{40}$$

Лема 6. *Якщо F є інтегралом II типу, то рівняння (40) має вигляд*

$$\begin{aligned}&x_2(p_1(x_1)U(x_1))^{(2N+1)}+(x_1+x_2)(p_3(x_1-x_2)U(x_2-x_1))^{(2N+1)}+\\&+x_1(p_2(x_2)U(x_2))^{(2N+1)}+(x_2-x_1)(p_4(x_1+x_2)U(x_2+x_1))^{(2N+1)}=0,\end{aligned}\tag{41}$$

де $p_i(\cdot), i=\overline{1,4}$ – поліноми, які не всі дорівнюють нулю.

Доведення. Розпишемо рівняння (40), враховуючи вигляд (15)

$$\left[\sum_{i=0}^{2N-1}(2N-i)E^{2N-i,i}(x_1,x_2)p_1^{2N-i-1}p_2^i\cdot W_1+\right.$$
$$\left.+\sum_{i=1}^{2N}iE^{2N-i,i}(x_1,x_2)p_1^{2N-i}p_2^{i-1}\cdot W_2\right]=0,$$

звідки

$$\begin{aligned}&\sum_{i=0}^{2N-1}\partial_{x_2}^{2N-i-1}(-\partial_{x_1})^i\big((2N-i)E^{2N-i,i}(x_1,x_2)W_1+\\&+(i+1)E^{2N-i-1,i+1}(x_1,x_2)W_2\big)=0.\end{aligned}\tag{42}$$

Враховуючи вигляд (18) потенціальної частини гамільтоніана W, співвідношення (42) можна записати у вигляді

$$[\Phi_1]V_1'+[\Phi_2]V_2'+[\Phi_3]V_3'+[\Phi_4]V_4'=0,\tag{43}$$

де $[\Phi_1]$, $[\Phi_2]$, $[\Phi_3]$, $[\Phi_4]$ – наступні лінійні диференціальні оператори $2N$-го порядку

$$[\Phi_1]V_1'=\sum_{i=0}^{2N-1}\partial_{x_2}^{2N-i-1}(-\partial_{x_1})^i(2N-i)E^{2N-i,i}V_1',$$

$$[\Phi_2]V_2'=\sum_{i=0}^{2N-1}\partial_{x_2}^{2N-i-1}(-\partial_{x_1})^i(i+1)E^{2N-i-1,i+1}V_2',$$

$$[\Phi_3]V_3'=[\Phi_2-\Phi_1]V_3'=\sum_{i=0}^{2N-1}\partial_{x_2}^{2N-i-1}(-\partial_{x_1})^i\big((i+1)E^{2N-i-1,i+1}-$$
$$-(2N-i)E^{2N-i,i}\big)V_3',$$

$$[\Phi_4]V_4'=[\Phi_2+\Phi_1]V_4'=\sum_{i=0}^{2N-1}\partial_{x_2}^{2N-i-1}(-\partial_{x_1})^i\big((i+1)E^{2N-i-1,i+1}+$$
$$+(2N-i)E^{2N-i,i}\big)V_4'.$$

Щоб спростити вирази $[\Phi_i]V_i'$, перепишемо коефіцієнти (14) у вигляді

$$\begin{aligned}E^{0,2N}&=P_{2N}(x_1),\\E^{1,2N-1}&=-x_2P_{2N}'(x_1),\\E^{2,2N-2}&=P_{2N-2}(x_1)+\tfrac{x_2^2}{2}P_{2N}''(x_1),\\&\vdots\\E^{i,2N-i}&=\sum_{j=0}^{[i/2]}\tfrac{x_2^{2j}}{(2j)!}P_{2N-(i-2j)}^{(2j)}(x_1),\\&\vdots\\E^{2N,0}&=\sum_{j=0}^{N}\tfrac{x_2^{2j}}{(2j)!}P_{2j}^{(2j)}=P_0+\tfrac{x_2^2}{2}P_2''+\cdots+\tfrac{x_2^{2N}}{(2N)!}P_{2N}^{(2N)}.\end{aligned}$$

Позначимо через U довільну первісну потенціалу взаємодії V_1.

Тоді, враховуючи очевидну комбінаторну тотожність $\sum\limits_{i=j}^{2N-1}(2N-i)C_i^j = C_{2n+1}^{j+2}$, отримуємо

$$[\Phi_1]V_1' = x_2\sum_{i=0}^{2N-1}(2N-i)\left(P_{2N}^{(2N-i)}V'\right)^{(i)} = x_2(2NP_{2N}^{(2N)}V' +$$
$$+(2N-1)(P_{2N}^{(2N-1)}V')' + \cdots + 1\cdot(P_{2N}'V')^{(2N-1)}) =$$
$$= x_2\sum_{i=0}^{2N-1}(2N-i)\sum_{j=0}^{i}C_i^jP_{2N}^{(2N-i+i-j)}V^{(j+1)} =$$
$$= x_2\sum_{i=0}^{2N-1}\sum_{j=0}^{i}(2N-i)C_i^jP_{2N}^{(2N-i+i-j)}V^{(j+1)} = x_2\sum_{j=0}^{2N-1}P_{2N}^{(2N-j)}V^{(j+1)}\sum_{i=j}^{2N-1}(2N-i)C_i^j =$$
$$= x_2\sum_{j=0}^{2N-1}P_{2N}^{(2N-j)}V^{(j+1)}C_{2N+1}^{j+2} = [k=j+2] = x_2\sum_{k=2}^{2N+1}P_{2N}^{(2N+2-k)}U^{(k)}C_{2N+1}^k =$$
$$= x_2\left((P_{2N}'(x_1)U(x_1))^{(2N+1)} - P_{2N}^{(2N+2)}U(x_1)C_{2N+1}^0 - P_{2N}^{(2N+1)}U'(x_1)C_{2N+1}^1\right) =$$
$$= x_2\left((P_{2N}'(x_1)U(x_1))^{(2N+1)} - P_{2N}^{(2N+2)}U(x_1) - (2N+1)P_{2N}^{(2N+1)}U'(x_1)\right).$$

Оскільки $P_{2N}(x_1)$ – поліном від x_1 степеня не вище за $2N$, то

$$P_{2N}^{(2N+1)} = P_{2N}^{(2N+2)} = 0 \text{ і } [\Phi_1]V_1' = x_2(P_{2N}'U(x_1))^{(2N+1)}.$$

Перепозначимо $p_1(x_1) := P_{2N}'(x_1)$. З умов теореми випливає, що $p_1(x_1) \neq 0$. Тоді

$$[\Phi_1]V_1' = x_2(p_1(x_1)U(x_1))^{(2N+1)}. \tag{44}$$

Виконуючи відповідні допустимі перетворення так, щоб аргументи функцій V_2, V_3 і V_4 ставали новою першою конфігураційною змінною, одержимо $[\Phi_i]V_i'$, $i=\overline{2,4}$ у вигляді, аналогічному до (44). Отож, (43) має вигляд (41). □

Теорема 5. *Якщо F є інтегралом II типу, то рівняння (41) є нетривіальним, тобто, теоремою додавання.*

Доведення. Нетривіальність цього співвідношення випливає з того, що для функції $U(x_1) = \frac{1}{x_1p_1(x_1)}$ рівняння (41) не справджується. □

Теорема 6. *Якщо система з гамільтоніаном (5), (6) допускає додатковий інтеграл II типу, то потенціал взаємодії V є раціональною функцією.*

Доведення. Застосуємо до виразу у лівій частині рівняння (41) оператор
$L = \partial x_1{}^2\partial x_2(\partial x_1+\partial x_2)^2(\partial x_2-\partial x_1)^2$. Оскільки
$\partial x_1((p(x_2)U(x_2))^{(2N+1)}) = \partial x_2((p(x_1)U(x_1))^{(2N+1)}) =$
$= (\partial x_1+\partial x_2)((p(x_1-x_2)U(x_2-x_1))^{(2N+1)}) =$
$= (\partial x_2-\partial x_1)((p(x_1+x_2)U(x_2+x_1))^{(2N+1)}) = 0,$
то $\partial x_1{}^2(\partial x_1+\partial x_2)^2(\partial x_2-\partial x_1)^2((p(x_1)U(x_1))^{(2N+1)}) = 0,$
звідки одержимо

$$L[\Phi_1]V_1' = \; = L(x_2(P_{2N}'U(x_1))^{(2N+1)}) = (P_{2N}'U(x_1))^{(2N+7)} = 0,$$

то $P_{2N}'U(x_1) = Q_{2N+6}$. Оскільки p є поліномом не більше, ніж $2N-1$ степеня, то довільний розв'язок цього рівняння має вигляд $V = U' = \frac{\partial}{\partial x_1}\frac{Q_{2N+6}(x_1)}{p(x_1)}$, де Q_{2N+6} – деякий поліном $2N+6$ степеня від x_1. □

7. Випадок першого інтеграла довільного степеня I типу. У загальному випадку умови поведінки потенціалу V на безмежності накладати не будемо. Знову розглянемо два випадки: випадок $W^{(4p)}$ – редуковану систему з чотирьох частинок із попарною взаємодією, що описується системою (5), (6) і випадок $W^{(5p)}$ – редуковану систему з п'яти частинок із попарною взаємодією, що описується системою (5), (7).

У цьому розділі ми будемо досліджувати перший інтеграл у вигляді полінома довільного степеня.

В загальному випадку однорідний поліном $2N$ степеня за імпульсами F_{2N} можна записати у вигляді

$$F_{2N} = GT^N, \tag{45}$$

де $G(p_1, p_2) = F_{2N}(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2)$ і де $\widetilde{p}_1 = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}$ і $\widetilde{p}_2 = \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}$.

Лема 7. *Нехай гамільтоніан H володіє групою симетрій $\{I, S_1, S_0\} \cong D_8$. Тоді поліном G в зображенні (45) має вигляд $G = g(\widetilde{p}_1^2\widetilde{p}_2^2)$, де g – деякий поліном.*

Доведення. Приймемо $\widetilde{p}_1 = \frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}} = \cos\varphi$ і $\widetilde{p}_2 = \frac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}} = \sin\varphi$. Така заміна буде коректною, бо $\left|\frac{p_1}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}\right| \le 1$ і $\left|\frac{p_2}{\sqrt{p_1^2+p_2^2}}\right| \le 1$, а також $\widetilde{p}_1^2 + \widetilde{p}_2^2 = 1$.

Позначимо $f(\varphi) = G(\cos\varphi, \sin\varphi)$. Це тригонометричний поліном. Із симетрій S_1, S_2 та S_0 випливає, відповідно, що $f(\varphi) = f(\pi - \varphi)$, $f(\varphi) = f(-\varphi)$ та $f(\varphi) = f(\frac{\pi}{2} - \varphi)$.

Отже, функція f є $\frac{\pi}{2}$-періодичною, парною, тому вона розкладається в ряд Фур'є за косинусами чотирикратного аргументу

$$f(\varphi) = P_1(\cos 4\varphi) = P\left(\frac{1}{4}\sin^2(2\varphi)\right) = P(\sin^2\varphi\cos^2\varphi) = P(\widetilde{p}_1^2\widetilde{p}_2^2).$$

Отже, $G(\widetilde{p}_1, \widetilde{p}_2) = f(\varphi) = P(\widetilde{p}_1^2\widetilde{p}_2^2)$. □

Отож, старша однорідна компонента F_{2N} симетризованого першого інтеграла має вигляд

$$F_{2N} = G(p_1^2 + p_2^2, p_1^2p_2^2) = G(T, J), \tag{46}$$

де G – відповідний поліном від двох змінних, а $J = p_1^2p_2^2$.

Позначимо $G_J = \frac{\partial}{\partial J}G(T, J)$.

Для поліноміального за імпульсами першого інтеграла $2N$ степеня (4) його старша однорідна компонента набуде вигляду

$$F_{2N} = \alpha_0 T^N + \alpha_2 T^{N-2}J + \alpha_4 T^{N-4}J^2 + \cdots .$$

Запишемо гамільтоніан H у загальному вигляді (18), де при $n = 4$ функції V_i, $i = \overline{1,4}$ мають вигляд (19), а при $n = 5$ – (20). Подіявши оператором (11) на третє рівняння системи (10), отримаємо

$$[\partial_{p_1}F_{2N-2} \cdot W_1 + \partial_{p_2}F_{2N-2} \cdot W_2] = 0. \tag{47}$$

Позначимо Q вираз у лівій частині отриманого рівняння (47)

$$Q = \left[\partial_{p_1}F_{2N-2} \cdot W_1 + \partial_{p_2}F_{2N-2} \cdot W_2\right]. \tag{48}$$

Теорема 7. *Диференціально-функціональне співвідношення (47) на потенціал взаємодії для поліноміального за імпульсами першого інтеграла $2N$ степеня зі старшою однорідною компонентою F_{2N} у вигляді (46) має вигляд $L\rho = 0$, де $L = [G_J]$ – однорідний диференціальний оператор, ρ задано формулою (25).*

Доведення. Враховуючи вигляд (18) потенціальної частини гамільтоніана W, будемо шукати F_{2N-2} у вигляді

$$F_{2N-2} = AV_1(x) + BV_2(y) + CV_3(y-x) + DV_4(x+y), \tag{49}$$

де A, B, C, D – поліноми $2N-2$ степеня за імпульсами.

Безпосередньою підстановкою (18) і (49) в друге рівняння системи (10) отримаємо, що

$$A = \frac{1}{p_1}\frac{\partial F_{2N}}{\partial p_1},\ B = \frac{1}{p_2}\frac{\partial F_{2N}}{\partial p_2},\ C = \frac{1}{p_2-p_1}\left(\frac{\partial F_{2N}}{\partial p_2} - \frac{\partial F_{2N}}{\partial p_1}\right),\ D = \frac{1}{p_2+p_1}\left(\frac{\partial F_{2N}}{\partial p_2} + \frac{\partial F_{2N}}{\partial p_1}\right). \tag{50}$$

Підставивши вигляд (46) для F_{2N} у (50), отримаємо

$$A = 2(G_1+G_2p_2^2),\ B = 2(G_1+G_2p_1^2),\ C = 2(G_1-G_2p_1p_2),\ D = 2(G_1+G_2p_1p_2). \tag{51}$$

Підставивши отриманий вигляд (49), (51) для F_{2N-2} у рівняння (47), одержимо

$$\begin{aligned}
&[2(2(G_{11}p_1 + 2G_{12}p_1p_2^2 + G_{22}p_1p_2^4)V_1(x) + 2(G_{11}p_1 + G_{12}p_1(p_1^2+p_2^2)+\\
&+G_{22}p_1^3p_2^2 + G_2p_1)V_2(y) + (2G_{11}p_1 + 2G_{12}p_1p_2(p_2-p_1) - 2G_{22}p_1^2p_2^3-\\
&-G_2p_2)V_3(y-x) + (2G_{11}p_1 + 2G_{12}p_1p_2(p_2+p_1) + 2G_{22}p_1^2p_2^3+\\
&+G_2p_2)V_4(x+y))(V_1'(x) - V_3'(y-x) + V_4'(x+y)) + 2(2(G_{11}p_2+\\
&+G_{12}p_2(p_1^2+p_2^2) + G_{22}p_2^3p_1^2 + G_2p_2)V_1(x) + 2(G_{11}p_2 + 2G_{12}p_2p_1^2+\\
&+G_{22}p_2p_1^4)V_2(y) + (2G_{11}p_2 - 2G_{12}p_1p_2(p_2-p_1) - 2G_{22}p_2^2p_1^3-\\
&-G_2p_1)V_3(y-x) + (2G_{11}p_2 + 2G_{12}p_1p_2(p_2+p_1) + 2G_{22}p_2^2p_1^3+\\
&+G_2p_1)V_4(x+y))(V_2'(y) + V_3'(y-x) + V_4'(x+y))] = 0.
\end{aligned} \tag{52}$$

Після спрощення виразу (52) отримаємо

$$\begin{aligned}
Q = [&P_{13}V_1V_3' + P_{14}\cdot V_1V_4' + P_{23}\cdot V_2V_3' + P_{24}\cdot V_2V_4'+\\
+&P_{31}\cdot V_3V_1' + P_{32}\cdot V_3V_2' + P_{41}\cdot V_4V_1' + P_{42}\cdot V_4V_2'],
\end{aligned} \tag{53}$$

де

$$\begin{aligned}
&P_{13} = 2p_2(G_{11} + G_2 + G_{12}(p_1^2+p_2^2) + G_{22}p_1^2p_2^2) - 2p_1(G_{11} + 2G_{12}p_2^2 + G_{22}p_2^4);\\
&P_{14} = 2p_2(G_{11} + G_2 + G_{12}(p_1^2+p_2^2) + G_{22}p_1^2p_2^2) + 2p_1(G_{11} + 2G_{12}p_2^2 + G_{22}p_2^4);\\
&P_{23} = 2p_2(G_{11} + 2G_{12}p_1^2 + G_{22}p_1^4) - 2p_1(G_{11} + G_2 + G_{12}(p_1^2+p_2^2) + G_{22}p_1^2p_2^2);\\
&P_{24} = 2p_2(G_{11} + 2G_{12}p_1^2 + G_{22}p_1^4) + 2p_1(G_{11} + G_2 + G_{12}(p_1^2+p_2^2) + G_{22}p_1^2p_2^2);\\
&P_{31} = (2G_{11}p_1 + 2G_{12}p_1p_2(p_2-p_1) - 2G_{22}p_1^2p_2^3 - G_2p_2);\\
&P_{32} = (2G_{11}p_2 - 2G_{12}p_1p_2(p_2-p_1) - 2G_{22}p_2^2p_1^3 - G_2p_1);\\
&P_{41} = (2G_{11}p_1 + 2G_{12}p_1p_2(p_2+p_1) + 2G_{22}p_1^2p_2^3 + G_2p_2);\\
&P_{42} = (2G_{11}p_2 + 2G_{12}p_1p_2(p_2+p_1) + 2G_{22}p_2^2p_1^3 + G_2p_1).
\end{aligned} \tag{54}$$

Записавши Q у вигляді $G_{11}Y_{11} + G_2Y_2 + G_{12}Y_{12} + G_{22}Y_{22}$, безпосередньою підстановкою (54) у (53) переконуємося в тому, що $Y_{11} = Y_{12} = Y_{22} = 0$, а $Y_2 = \rho$. Теорему 7 доведено. □

Наслідок 2. *В умовах теореми 7 за додаткової умови $V(\infty) = 0$ одержимо рівняння $\rho = 0$, яке має своїм розв'язком частинні випадки $\wp$-функції Вейерштрасса, які задовольняють умову на безмежності $V(t) \in \{\frac{1}{t^2}, \frac{c^2}{sh^2(ct)}\}$.*

7.1. Теореми додавання для першого інтеграла I типу та їхні розв'язки. Перепишемо друге рівняння системи (10) у вигляді

$$\begin{aligned}
&p_1\partial_{x_1}F_{2N-2} + p_2\partial_{x_2}F_{2N-2} = \partial_{p_1}F_{2N}\cdot V_1' + \partial_{p_2}F_{2N}\cdot V_2'+\\
&+(\partial p_1 + \partial p_2)F_{2N}\cdot V_3' + (\partial p_2 - \partial p_1)F_{2N}\cdot V_4'.
\end{aligned} \tag{55}$$

Легко перевірити, що F_{2N-2} у вигляді (49), (50), задовольняє рівняння (55). Тому в загальному випадку розв'язок другого рівняння системи (10) має вигляд

$$F_{2N-2} = AV_1(x) + BV_2(y) + CV_3(y-x) + DV_4(x+y) + \omega, \tag{56}$$

де A, B, C, D визначаються системою (50), а ω – деякий поліном $2N-2$ степеня за імпульсами, такий що $[\omega] = 0$.

Підставивши (56) у друге рівняння системи (10), одержимо

$$[G_J(p_1, p_2)\rho(V) + \varphi] = 0, \tag{57}$$

де $\varphi = [\partial_{p_1}\omega \cdot W_1 + \partial_{p_2}\omega \cdot W_2]$.

Оскільки в умовах леми 6 для довільного F_{2N} оператор (26) перетворює ліву частину рівняння 41 в тотожний нуль, то, підставивши ω замість F_{2N}, одержимо $L_8\varphi = 0$, тому

$$[M]\rho(V) = 0,$$

де $M(p_1, p_2) = L_8 G_J(p_1, p_2)$.

Отже, доведено теорему.

Теорема 8. *Якщо система з гамільтоніаном (5), (6) допускає додатковий інтеграл I типу, то співвідношення (12) є нетривіальне при $i = 2$, і потенціал V задовольняє диференціально-функціональне рівняння $[M]\rho(V) = 0$.*

Наслідок 3. *За додаткової умови $V(\infty) = 0$ отримаємо $\rho(V) = 0$.*

Доведення. Правильність наслідку 3 випливає з наслідку 1. □

Враховуючи, що теорема додавання $\rho(V) = 0$ в розглядуваному класі потенціалів має розв'язки лише $\wp + const$, тому проблема опису інтегровних потенціалів для першого інтеграла першого типу повністю розв'язана.

Використовуючи теорему 2, одержимо, що симетрична задача п'яти частинок має ті самі розв'язки, що і симетрична задача чотирьох частинок.

8. Висновок. У праці розглянуто теореми додавання для інтеграла довільного степеня в симетричній задача чотирьох і п'яти частинок. У §6, 7 отримано потенціали взаємодії як розв'язки цих теорем додавання у відповідних функціональних класах.

---

1. *Ольшанецкий М.А.* Геодезические потоки на симметрическом пространстве нулевой кривизны и явные решения обобщенной модели Калоджеро для классического случая / *Ольшанецкий М.А., Переломов А.М.* // Функ. анализ и его прил. – 1976. – Т. 10, №3. – С. 86-87.
2. *Ольшанецкий М.А.* Квантовые системы, связанные с системами корней и радиальные части операторов Лапласа / *Ольшанецкий М.А., Переломов А.М.* // Функ. анализ и его прил. – 1978. – Т. 12, №2. – С. 57-65.
3. *Ольшанецкий М.А.* Явные решения некоторых вполне интегрируемых гамильтоновых систем / *Ольшанецкий М.А., Переломов А.М.* // Функ. анализ и его прил. – 1977. – Т. 11, №1. – С. 75-76.
4. *Пидкуйко С.И.* Полиномиальные интегралы гамильтоновых систем / *Пидкуйко С.И., Степин А.М.* // Док. АН СССР. – 1978. – Т. 239, №1. – С. 50-53.

5. *Підкуйко С.І.* Повна інтегровність квантової системи n тіл на прямій / *Підкуйко С.І.* // Мат. методи і фіз.-мех. поля. – 1983. – №17. – С. 98-101.
6. *Якоби К.* Лекции по динамике / *Якоби К.* – М.; Л., 1936.
7. *Adler M.* Completely integrable systems, Euclidean Lie algebras and curves / *Adler M., van Moerbeke P.* // Adv. Math. – 1980. – Vol.38. – P. 267-317.
8. *Calogero F.* Solution of the one-dimensional N-body problem with quadratic and/or inversely quadratic pair potentials / *Calogero F.* // Jour. Math. Phys. – 1971. – Vol. 12. – P. 419-436.
9. *Calogero F.* Exactly solvable one-dimensional many body problems / *Calogero F.* // Letters al Nuovo Cim. – 1975. – Vol. 13. – P. 411-416.
10. *Calogero F.* Exact solution of one-dimensional three-body scattering problem with two-body and/or three body inverse square potential / *Calogero F., Marchioro C.* // Jour. Math. Phys. – 1974. – Vol. 15. – P. 1425-1430.
11. *Calogero F.* Exact solution of the classical and quantal one-dimensional many body problems with the two-body potential $V_a(x) = g^2a^2/sinh^2(ax)$ / *Calogero F., Marchioro C., Ragnisco O.* // Letters al Nuovo Cim. – 1975. – Vol. 13. – P. 383-387.
12. *Mozer J.* Three integrable Hamiltonian systems connected with isospectral deformations / *Mozer J.* // Adv. Math. – 1975. – Vol. 16. – P. 197-220.
13. *Sutherland B.* Exact results for a quantum many-body problems in one dimension I, II / *Sutherland B.* // Phys. Rev. – 1971. – Vol. A4. – P. 2019-2021; 1972. – Vol. A5. – P. 1372-1376.
14. *Inosemzev V. I.* New completely integrable multiparticle dynamical systems / *Inosemzev V. I.* // Phys. Scripta. – 1984. – Vol. 29. – P. 518-520.
15. *Olshanetsky M.A.* Completely integrable Hamiltonian systems connected with semisimple Lie algebras / *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Invent. Math. – 1976. – Vol. 37. – P. 93-108.
16. *Olshanetsky M.A.* Explicit solutions of some completely integrable systems / *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Letters al Nuovo Cim. – 1976. – Vol. 17. – P. 97-101.
17. *Olshanetsky M.A.* Classical integrable finitedimensional systems related to Lie algebras / *Olshanetsky M.A., Perelomov A.M.* // Phys, Reports. – 1981. – Vol. 71. – P. 313-400.
18. *Perelomov A.M.* Algebraical approach to the solution of onedimensional model of N interacting particles / *Perelomov A.M.* // Theor. Math. Phys. – 1971. – Vol. 6. – P. 263-283.
19. `http://groupprops.subwiki.org/wiki/Subgroup_structure_of_dihedral_group:D8`
20. *Vus A.Ya.* On integrable three-body problems of the line / *Vus A.Ya.* // Matematychni Studii – 1998. – Vol. 10. – P. 97-102.
21. *Abramowitz M.* Handbook of Mathematical Functions with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables / *Abramowitz M., Stegun I.* – New York: Dover Publications, 1972.

INTEGRABLE POTENTIALS OF SYMMETRIC PROBLEMS OF FOURTH AND FIFTH PAIRWISE INTERACTING PARTICLES ON LINE

Bohdan DOVHAN', Andrij VUS

Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1

e-mail: bohdan_ dovhanj@ukr.net, andrij_ vus@ukr.net

The reduced systems of four and five pairwise interacting particles on the line are investigated. The properties of interactive potentials are considered under assumption that the given system has the first integral polynomial of prescribed degree in the momenta. The functional equations for those potentials are obtained. Some such potentials are described.

Key words: hamiltonian system, first integral, Poisson brackets, addition theorem.

ИНТЕГРИРУИМЫЕ ПОТЕНЦИАЛЫ СИММЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ЧЕТЫРЁХ И ПЯТИ ПОПАРНО ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ ЧАСТИЦ НА ПРЯМОЙ

Богдан ДОВГАНЬ, Андрей ВУС

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: bohdan_ dovhanj@ukr.net, andrij_ vus@ukr.net

Исследовано редуцированные системы четырех и пяти попарно взаимодействующих частиц на прямой. Рассмотрены свойства потенциалов взаимодействия в предположении, что данная система обладает первым интегралом, полиномиальным по импульсам. Получены функциональные уравнения на потенциалы и описаны некоторые их решения.

Ключевые слова: гамильтоновая система, первый интеграл, скобка Пуассона, теорема сложения.

Стаття надійшла до редколегії 20.09.2010

Прийнята до друку 22.12.2010