ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2010.
Вип. 72. С. 94–106

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2010.
Is. 72. P. 94–106

УДК 512.536

ПРО НАПІВТОПОЛОГІЧНІ СИМЕТРИЧНІ ІНВЕРСНІ ПІВГРУПИ ОБМЕЖЕНОГО СКІНЧЕННОГО РАНГУ

Олег ГУТІК, Андрій РЕЙТЕР

*Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: o_gutik@franko.lviv.ua, reiter_andriy@yahoo.com*

Доведено, що симетрична інверсна півгрупа обмеженого скінченного рангу $\mathscr{I}_\lambda^n$ є алгебрично h-замкненою в класі напівтопологічних інверсних півгруп з неперервною інверсією. Описано усі компактні та зліченно компактні топології τ на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ такі, що $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ – гаусдорфова напівтопологічна півгрупа.

Ключові слова: симетрична інверсна півгрупа обмеженого скінченного рангу, напівтопологічна півгрупа, конгруенція.

1. Вступ. У роботі всі простори вважаються гаусдорфовими. Надалі ми будемо користуватися термінологією та позначеннями з [4, 5, 6, 7, 8, 15, 16].

Півгрупою називається непорожня підмножина з заданою на ній бінарною асоціативною операцією. Півгрупа S називається *інверсною*, якщо для довільного її елемента x існує єдиний елемент y з S такий, що $x = xyx$ і $y = yxy$. У цьому випадку будемо говорити, що елемент y є *інверсним* до x та позначатимемо його через x^{-1}. Відображення, яке ставить кожному елементові інверсної півгрупи інверсний до нього елемент, називається *інверсією*.

Відношення еквівалентності $\mathfrak{R}$ на півгрупі S називається *конгруенцією*, якщо з того, що $a\mathfrak{R}b$, для $a, b \in S$, випливає $ac\mathfrak{R}bc$ і $da\mathfrak{R}db$, для довільних $c, d \in S$. На кожній півгрупі S існують такі конгруенції: *одинична* (*діагональ*) $\Delta = \{(s,s) \mid s \in S\}$ та *універсальна* $\Omega = S \times S$. Одиничну та універсальну конгруенції часто називають *тривіальними* конгруенціями.

Елемент e півгрупи S називається *ідемпотентом*, якщо $ee = e$. *Підмножину ідемпотентів* (*в'язку*) півгрупи S позначатимемо через $E(S)$.

Нехай $\alpha\colon X \rightharpoonup X$ – часткове відображення (часткове перетворення) множини X. Через $\operatorname{dom}\alpha$ і $\operatorname{ran}\alpha$ позначатимемо область визначення та область значень, відповідно, часткового перетворення α. Якщо α – часткове бієктивне перетворення, то потужність множини $\operatorname{dom}\alpha$ будемо називати *рангом* часткового відображення α, і позначатимемо $\operatorname{rank}\alpha$.

Нехай X – множина потужності $\lambda \geqslant 1$. Через $\mathscr{I}_\lambda$ позначимо множину усіх часткових взаємно однозначних перетворень множини X з півгруповою операцією

$$x(\alpha\beta) = (x\alpha)\beta, \quad \text{якщо} \quad x \in \operatorname{dom}(\alpha\beta) = \{y \in \operatorname{dom}\alpha \mid y\alpha \in \operatorname{dom}\beta\}, \quad \text{для} \quad \alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda.$$

Півгрупа $\mathscr{I}_\lambda$ називається *симетричною інверсною півгрупою* над множиною X (див. [6]). Симетричну інверсну півгрупу вперше ввів Вагнер у [1, 2] і вона відіграє важливу роль у теорії півгруп.

Позначимо $\mathscr{I}_\lambda^n = \{\alpha \in \mathscr{I}_\lambda \mid \operatorname{rank}\alpha \leqslant n\}$, для $n = 1, 2, 3, \ldots$. Очевидно, що $\mathscr{I}_\lambda^n$ – інверсна півгрупа, яка є ідеалом в $\mathscr{I}_\lambda$ для всіх $n = 1, 2, 3, \ldots$. Надалі називатимемо півгрупу $\mathscr{I}_\lambda^n$ *симетричною інверсною півгрупою скінченних перетворень рангу n множини потужності λ*. Елементи півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ називаються *скінченними взаємно однозначними перетвореннями* (*частковими бієкціями*) множини X. Через

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n \end{pmatrix}$$

позначатимемо часткове взаємно однозначне перетворення, яке відображає елемент x_1 в y_1, x_2 в y_2, $\ldots$ та x_n в y_n, а через $\boldsymbol{0}$ – порожнє перетворення. Очевидно, у цьому випадку маємо $x_i \neq x_j$ і $y_i \neq y_j$ для $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3, \ldots, n)$. Також зауважимо, що симетрична інверсна півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^1$ скінченних перетворень рангу 1 множини потужності λ ізоморфна півгрупі $\lambda \times \lambda$-матричних одиниць B_λ.

Нагадаємо означення відношень Гріна на півгрупі S (див. [9] і [6, § 2.1]):

$a\mathscr{L}b$ тоді і лише тільки тоді, коли $\{a\} \cup Sa = \{b\} \cup Sb$, $a, b \in S$;
$a\mathscr{R}b$ тоді і лише тільки тоді, коли $\{a\} \cup aS = \{b\} \cup bS$, $a, b \in S$;
$\mathscr{D} = \mathscr{L} \circ \mathscr{R} = \mathscr{R} \circ \mathscr{L}$;
$\mathscr{H} = \mathscr{L} \cap \mathscr{R}$.

Безпосередньо з означень відношень Гріна випливає твердження.

Твердження 1. *Для $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ виконуються такі умови:*

(*i*) *$\alpha\mathscr{L}\beta$ тоді і лише тільки тоді, коли* $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$*;*
(*ii*) *$\alpha\mathscr{R}\beta$ тоді і лише тільки тоді, коли* $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$*;*
(*iii*) *$\alpha\mathscr{D}\beta$ тоді і лише тільки тоді, коли* $\operatorname{rank}\alpha = \operatorname{rank}\beta$*;*
(*iv*) *$\alpha\mathscr{H}\beta$ тоді і лише тільки тоді, коли* $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$ *і* $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$*.*

Напівтопологічна (*топологічна*) *півгрупа* – це гаусдорфовий топологічний простір із заданою на ньому нарізно неперервною (сукупно неперервною) напівгруповою операцією. Якщо в інверсній топологічній півгрупі інверсія неперервна, то така півгрупа називається *топологічною інверсною півгрупою*.

Симетричну інверсну півгрупу обмеженого скінченного рангу $\mathscr{I}_\lambda^n$ як топологічну та напівтопологічну вперше вивчали у [10], де доведено, що вона є напівгрупою зі шільними ідеальними рядами, і у підсумку півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ алгебрично замкнена в класі напівтопологічних інверсних півгруп з неперервною інверсією. У [14] доведено, що півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ алгебрично h-замкнена в класі топологічних інверсних півгруп, а також описана Борівська компактифікація нескінченної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ у класі топологічних півгруп. У [13] подано достатні умови для того, щоб півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ була H-замкненою чи абсолютно H-замкненою в класі топологічних півгруп. Також в [10] доведено, що на симетричній інверсній півгрупі скінченного рангу $\mathscr{I}_\lambda^\infty = \bigcup_{n=1}^\infty \mathscr{I}_\lambda^n$ не існує компактної топології, стосовно якої вона була б напівтопологічною півгрупою. Водночас в [12] описано усі компактні та зліченно компактні топології на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^1$, за яких вона є напівтопологічною півгрупою.

Ми описуємо усі нетривіальні конгруенції на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$, доводимо, що довільний гомоморфний образ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ є півгрупою зі щільними ідеальними рядами, а отже, півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ є алгебрично h-замкненою півгрупою в класі напівтопологічних інверсних півгруп з неперервною інверсією. Ми також описуємо усі компактні та зліченно компактні топології τ на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ такі, що $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ є напівтопологічною півгрупою.

2. Про конгруенції на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ та її алгебричну повноту.

З означення півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ випливає твердження.

Твердження 2. *Для довільних натуральних $m \leqslant n$, підпівгрупа $\mathscr{I}_\lambda^m$ є (двостороннім) ідеалом півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$.*

Твердження 3. *Для довільних $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ таких, що $\operatorname{rank}\alpha \leqslant \operatorname{rank}\beta$, існують $\gamma, \delta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ такі, що $\alpha = \gamma\beta\delta$ і $\operatorname{rank}\alpha \leqslant \operatorname{rank}\gamma = \operatorname{rank}\delta \leqslant \operatorname{rank}\beta$.*

Доведення. Нехай $\alpha = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ y_1 & \cdots & y_k \end{pmatrix}$ і $\beta = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_l \\ b_1 & \cdots & b_l \end{pmatrix}$, де $k \leqslant l \leqslant n$. Означимо $\gamma = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k & a_{k+1} & \cdots & a_l \\ a_1 & \cdots & a_k & a_{k+1} & \cdots & a_l \end{pmatrix}$ і $\delta = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_k & b_{k+1} & \cdots & b_l \\ y_1 & \cdots & y_k & b_{k+1} & \cdots & b_l \end{pmatrix}$. Тоді очевидно, що $\alpha = \gamma\beta\delta$. $\square$

Лема 1. *Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$. Якщо $\alpha\mathfrak{R}\boldsymbol{0}$ для деякого елемента α півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$, то $\beta\mathfrak{R}\boldsymbol{0}$ для всіх $\beta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ таких, що $\operatorname{rank}\beta \leqslant \operatorname{rank}\alpha$.*

Доведення. За твердженням 3 існують $\gamma, \delta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ такі, що $\beta = \gamma\alpha\delta$ і $\operatorname{rank}\beta \leqslant \operatorname{rank}\gamma = \operatorname{rank}\delta \leqslant \operatorname{rank}\alpha$. Нехай $\pi_\mathfrak{R} \colon \mathscr{I}_\lambda^n \to \mathscr{I}_\lambda^n/\mathfrak{R}$ – природний гомоморфізм, породжений конгруенцією $\mathfrak{R}$. Тоді

$$(\beta)\pi_\mathfrak{R} = (\gamma\alpha\delta)\pi_\mathfrak{R} = (\gamma)\pi_\mathfrak{R} \cdot (\alpha)\pi_\mathfrak{R} \cdot (\delta)\pi_\mathfrak{R} = (\gamma)\pi_\mathfrak{R} \cdot (\boldsymbol{0})\pi_\mathfrak{R} \cdot (\delta)\pi_\mathfrak{R} = (\gamma\boldsymbol{0}\delta)\pi_\mathfrak{R} = (\boldsymbol{0})\pi_\mathfrak{R},$$

а отже, $\beta\mathfrak{R}\mathbf{0}$. $\square$

Лема 2. *Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на інверсній півгрупі S і $a, b \in S$. Якщо $a\mathfrak{R}b$, то виконуються такі твердження:*

- (i) *$a^{-1}\mathfrak{R}b^{-1}$, $(aa^{-1})\mathfrak{R}(bb^{-1})$ і $(a^{-1}a)\mathfrak{R}(b^{-1}b)$;*
- (ii) *елементи a, b, $aa^{-1}b$, $ba^{-1}a$, $bb^{-1}a$ і $ab^{-1}b$ є $\mathfrak{R}$-еквівалентними;*
- (iii) *ідемпотенти aa^{-1}, bb^{-1} і $aa^{-1}bb^{-1}$ є $\mathfrak{R}$-еквівалентними;*
- (iv) *ідемпотенти $a^{-1}a$, $b^{-1}b$ і $a^{-1}ab^{-1}b$ є $\mathfrak{R}$-еквівалентними.*

Доведення. Твердження (i) випливає з леми III.1.1 [15] та означення конгруенції. Твердження (ii) – (iv) випливають з твердження (i) та леми I.4.7 [15]. $\square$

Теорема 1. *Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ і $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ така, що $\operatorname{rank}\alpha < \operatorname{rank}\beta$. Якщо $\alpha\mathfrak{R}\beta$, то $\beta\mathfrak{R}\gamma$ для всіх $\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n$ таких, що $\operatorname{rank}\gamma \leqslant \operatorname{rank}\beta$.*

Доведення. Розглянемо можливі випадки:

1) $\operatorname{dom}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta = \varnothing$;
2) $\operatorname{ran}\alpha \cap \operatorname{ran}\beta = \varnothing$;
3) $\operatorname{dom}\alpha \subset \operatorname{dom}\beta$;
4) $\operatorname{ran}\alpha \subset \operatorname{ran}\beta$;
5) $\operatorname{dom}\alpha \cap \operatorname{dom}\beta \neq \varnothing$ і $\operatorname{dom}\alpha \not\subset \operatorname{dom}\beta$;
6) $\operatorname{ran}\alpha \cap \operatorname{ran}\beta \neq \varnothing$ і $\operatorname{ran}\alpha \not\subset \operatorname{ran}\beta$.

Покажемо, що у всіх цих випадках виконуються умови леми 1.

Припустимо, що виконується випадок 1. Тоді $\big(\beta\beta^{-1}\alpha\big)\mathfrak{R}\big(\beta\beta^{-1}\beta\big)$, але $\beta = \beta\beta^{-1}\beta$ і $\beta\beta^{-1}\alpha = \mathbf{0}$, а отже, $\beta\mathfrak{R}\mathbf{0}$.

У випадку 2 міркування аналогічні.

Припустимо, що виконується випадок 3. Нехай $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k \\ b_1 & b_2 & \cdots & b_k \end{pmatrix}$, $\beta = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & x_{k+1} & \cdots & x_l \\ y_1 & y_2 & \cdots & y_k & y_{k+1} & \cdots & y_l \end{pmatrix}$, $\varepsilon_\alpha = \alpha\alpha^{-1}$ і $\varepsilon_\beta = \beta\beta^{-1}$. Тоді за лемою 2 маємо $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}\varepsilon_\beta$. Нехай ε – ідемпотент півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ такий, що $\varepsilon_\alpha \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon_\beta$. Тоді $\varepsilon = \varepsilon \cdot \varepsilon_\beta$ і $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon$, і з того, що $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}\varepsilon_\beta$, випливає, що $(\varepsilon \cdot \varepsilon_\alpha)\mathfrak{R}(\varepsilon \cdot \varepsilon_\beta)$, а отже, $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}\varepsilon$ і $\varepsilon_\beta\mathfrak{R}\varepsilon$.

Нехай
$$\uparrow^l\varepsilon_\alpha = \{\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n \mid \gamma \cdot \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha \cdot \gamma = \varepsilon_\alpha \text{ і } \operatorname{rank}\gamma \leqslant l\}.$$
Тоді, очевидно, що $\uparrow^l\varepsilon_\alpha$ – інверсна підпівгрупа півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ і ε_α – нуль в $\uparrow^l\varepsilon_\alpha$. Отож, для довільного елемента χ півгрупи $\uparrow^l\varepsilon_\alpha$ маємо $\chi\chi^{-1}\chi = \chi$ і $\chi\chi^{-1}\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\alpha$, а отже, $\chi\mathfrak{R}\varepsilon_\alpha$.

Нехай $\widetilde{\varepsilon}_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & x_1 \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & x_1 \end{pmatrix}$, де $x_1 \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_k\}$. Тоді, очевидно, що $\widetilde{\varepsilon}_1 \in \uparrow^l\varepsilon_\alpha$. Означимо $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & x_1 \\ x_1 & a_2 & \cdots & a_k & a_1 \end{pmatrix}$. Тоді $\gamma_1\gamma_1^{-1} = \widetilde{\varepsilon}_1$ і $\gamma_1\widetilde{\varepsilon}_1\gamma_1^{-1} = \widetilde{\varepsilon}_1$, а отже, $\widetilde{\varepsilon}_1\mathfrak{R}\big(\gamma_1\varepsilon_\alpha\gamma_1^{-1}\big)$, $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}\big(\gamma_1\varepsilon_\alpha\gamma_1^{-1}\big)$ і $\varepsilon_\beta\mathfrak{R}\big(\gamma_1\varepsilon_\alpha\gamma_1^{-1}\big)$. Очевидно, що $\operatorname{rank}(\gamma_1\varepsilon_\alpha\gamma_1^{-1}) = k$. Позначимо $\varepsilon_1 = \gamma_1\varepsilon_\alpha\gamma_1^{-1}$. За індукцією побудуємо сім'ю ідемпотентів $\{\varepsilon_i \mid i = 2, \ldots, k\}$ так. Нехай
$$\widetilde{\varepsilon}_i = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_k & x_i \\ a_1 & a_2 & \cdots & a_k & x_i \end{pmatrix},$$
де $x_1 \notin \{a_1, a_2, \ldots, a_k, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_l\}$ і позначимо
$$\gamma_i = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{i-1} & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_k & x_i \\ a_1 & \cdots & a_{i-1} & x_i & a_{i+1} & \cdots & a_k & a_i \end{pmatrix}.$$
Тоді, очевидно, що $\widetilde{\varepsilon}_i \in \uparrow^l\varepsilon_\alpha$, $\gamma_i\gamma_i^{-1} = \widetilde{\varepsilon}_i$ і $\gamma_i\widetilde{\varepsilon}_i\gamma_i^{-1} = \widetilde{\varepsilon}_i$, а отже, $\widetilde{\varepsilon}_i\mathfrak{R}\big(\gamma_i\varepsilon_\alpha\gamma_i^{-1}\big)$, $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}\big(\gamma_i\varepsilon_\alpha\gamma_i^{-1}\big)$ і $\varepsilon_\beta\mathfrak{R}\big(\gamma_i\varepsilon_\alpha\gamma_i^{-1}\big)$. Позначимо $\varepsilon_i = \gamma_i\varepsilon_\alpha\gamma_i^{-1}$. Очевидно, що $\operatorname{rank}\varepsilon_i = k$.

Отже, маємо $\varepsilon_i\mathfrak{R}\varepsilon_\alpha$ для всіх $i = 1, 2, \ldots, k$, а отже, $\varepsilon_i\mathfrak{R}\varepsilon_j$ для всіх $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Тоді $\varepsilon_i\mathfrak{R}(\varepsilon_i)^k$, а отже, $\varepsilon_i\mathfrak{R}(\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k)$. Але $\varepsilon_1\varepsilon_2\ldots\varepsilon_k = \mathbf{0}$, а отже $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}\mathbf{0}$. Оскільки $\beta = \varepsilon_\beta\beta$ і $\alpha = \varepsilon_\alpha\alpha$, то
$$(\beta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\varepsilon_\beta\beta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\varepsilon_\beta)\pi_{\mathfrak{R}} \cdot (\beta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\varepsilon_\alpha)\pi_{\mathfrak{R}} \cdot (\beta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\mathbf{0})\pi_{\mathfrak{R}} \cdot (\beta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\mathbf{0} \cdot \beta)\pi_{\mathfrak{R}} = (\mathbf{0})\pi_{\mathfrak{R}},$$
а отже, $\beta\mathfrak{R}\mathbf{0}$.

У випадку 4 міркування аналогічні.

У випадку 5 для $\varepsilon_\alpha = \alpha\alpha^{-1}$ і $\varepsilon_\beta = \beta\beta^{-1}$ маємо $\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\alpha < \varepsilon_\beta$. Якщо $\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\alpha = \mathbf{0}$, то твердження теореми випливає з леми 1. Якщо ж $\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\alpha \neq \mathbf{0}$, то виконується випадок 3: $\varepsilon = \varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\alpha < \varepsilon_\beta$.

У випадку 6 міркування аналогічні. $\square$

З леми 1 та теореми 1 випливає наслідок.

Наслідок 1. *Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ та елементи α і β півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ є $\mathfrak{R}$-еквівалентними і не є $\mathfrak{R}$-еквівалентними до порожнього часткового відображення $\mathbf{0}$. Тоді* $\operatorname{rank}\alpha = \operatorname{rank}\beta$.

Твердження 4. *Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ та елементи α і β півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ є $\mathfrak{R}$-еквівалентними і не є $\mathfrak{R}$-еквівалентними до порожнього часткового відображення $\mathbf{0}$. Тоді* $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$ *і* $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$, *а отже, $\alpha\mathscr{H}\beta$.*

Доведення. За наслідком 1 маємо $\operatorname{rank}\alpha = \operatorname{rank}\beta$. Припустимо, що хоча б одна з умов $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$ чи $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$ не виконується. Нехай $\operatorname{dom}\alpha \neq \operatorname{dom}\beta$. Оскільки $\alpha\mathfrak{R}\beta$, то $\alpha = \alpha\alpha^{-1}\alpha$ і $(\alpha\alpha^{-1}\alpha)\mathfrak{R}(\alpha\alpha^{-1}\beta)$, а отже, $\alpha\mathfrak{R}(\alpha\alpha^{-1}\beta)$. Позаяк $\operatorname{dom}\alpha \neq \operatorname{dom}\beta$, то $\operatorname{rank}\alpha > \operatorname{rank}(\alpha\alpha^{-1}\beta)$. Отже, виконуються умови теореми 1, а отже, $\alpha\mathfrak{R}\mathbf{0}$, що суперечить припущенню. У випадку $\operatorname{ran}\alpha \neq \operatorname{ran}\beta$ міркування аналогічні. $\square$

Теорема 2. *Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ та елементи α, β півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ належать різним $\mathscr{H}$-класам. Якщо $\alpha\mathfrak{R}\beta$, то $\beta\mathfrak{R}\gamma$ для всіх $\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n$, що задовольняють умову* $\operatorname{rank}\gamma \leqslant \max\{\operatorname{rank}\alpha, \operatorname{rank}\beta\}$.

Доведення. У випадку, коли $\operatorname{rank}\alpha \neq \operatorname{rank}\beta$, твердження теореми випливає з теореми 1, тому вважатимемо, що $\operatorname{rank}\alpha = \operatorname{rank}\beta$. Тоді з означення півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ випливає, що для ідемпотентів $\varepsilon_\alpha = \alpha\alpha^{-1}$, $\varepsilon_\alpha^- = \alpha^{-1}\alpha$, $\varepsilon_\beta = \beta\beta^{-1}$ і $\varepsilon_\beta^- = \beta^{-1}\beta$ виконується хоча б одна з умов: $\varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_\beta$ або $\varepsilon_\alpha^- \neq \varepsilon_\beta^-$. Припустимо, що $\varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_\beta$. У випадку $\varepsilon_\alpha^- \neq \varepsilon_\beta^-$ міркування аналогічні.

Оскільки $\operatorname{rank}\alpha = \operatorname{rank}\beta$, то $\operatorname{rank}\varepsilon_\alpha = \operatorname{rank}\varepsilon_\beta$, а з умови $\varepsilon_\alpha \neq \varepsilon_\beta$ отримуємо, що ідемпотенти ε_α і ε_β є непорівняльними. Нехай $\varepsilon_0 = \varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta$. Тоді $\varepsilon_\alpha\mathfrak{R}\varepsilon_\beta$, а отже, $(\varepsilon_\alpha \cdot \varepsilon_\beta)\mathfrak{R}(\varepsilon_\beta \cdot \varepsilon_\beta)$ і $\varepsilon_0\mathfrak{R}\varepsilon_\beta$. Отож, виконуються умови теореми 1. $\square$

Теорема 3. *Нехай $\mathfrak{R}$ – конгруенція на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ та α і β – різні елементи напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$. Якщо $\alpha\mathfrak{R}\beta$ та елемент β не є $\mathfrak{R}$-еквівалентними до порожнього перетворення $\mathbf{0}$, то усі елементи півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$, ранг яких менший за* $\operatorname{rank}\alpha$, *є $\mathfrak{R}$-еквівалентними, а усі елементи півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$, ранг яких більший за* $\operatorname{rank}\alpha$, *є $\mathfrak{R}$-еквівалентними лише самим собі.*

Доведення. За твердженням 4 маємо $\operatorname{dom}\alpha = \operatorname{dom}\beta$ і $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{ran}\beta$. Оскільки $\alpha \neq \beta$, то існує елемент x множини $\operatorname{dom}\alpha$ такий, що $(x)\alpha \neq (x)\beta$. Позначимо $A = \operatorname{dom}\alpha \setminus \{x\}$. Тоді $(x)\alpha \notin (A)\alpha$. Оскільки $((x)\alpha)\,\beta^{-1} \neq x$, то $\left(((x)\alpha)\beta^{-1}\right)\beta \in (A)\beta$, тому $(A)\beta \neq (A)\alpha$. Нехай ε_A – тотожне часткове перетворення множини A і $\varepsilon_{(A)\alpha}$ – тотожне часткове перетворення множини $(A)\alpha$. Тоді з $\alpha\mathfrak{R}\beta$ випливає, що $(\varepsilon_A\cdot\alpha\cdot\varepsilon_{(A)\alpha})\mathfrak{R}(\varepsilon_A\cdot\beta\cdot\varepsilon_{(A)\alpha})$. Позаяк $\operatorname{rank}(\varepsilon_A\cdot\alpha\cdot\varepsilon_{(A)\alpha}) > \operatorname{rank}(\varepsilon_A\cdot\beta\cdot\varepsilon_{(A)\alpha})$, то за теоремою 1 усі часткові перетворення рангу $i \leqslant \operatorname{rank}(\varepsilon_A\cdot\alpha\cdot\varepsilon_{(A)\alpha})$ є $\mathfrak{R}$-еквівалентними.

Доведемо друге твердження теореми. Нехай γ і δ – $\mathfrak{R}$-еквівалентні елементи напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$, причому $\operatorname{rank}\gamma > \operatorname{rank}\alpha$ і $\operatorname{rank}\delta > \operatorname{rank}\alpha$. Покажемо, що тоді $\gamma = \delta$. Припустимо, що $\gamma \neq \delta$. Тоді з твердження 4 і теореми 2 випливає, що $\operatorname{dom}\gamma = \operatorname{dom}\delta$ і $\operatorname{ran}\gamma = \operatorname{ran}\delta$. Нехай $\operatorname{rank}\alpha = k$. Тоді існує підмножина $\{x_1, \ldots, x_k\}$ в $\operatorname{dom}\gamma$ така, що $(\{x_1, \ldots, x_k\})\gamma \neq (\{x_1, \ldots, x_k\})\delta$. Нехай $\varepsilon_1 = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_k \\ x_1 & \cdots & x_k \end{pmatrix}$ і $\varepsilon_2 = \begin{pmatrix} (x_1)\gamma & \cdots & (x_k)\gamma \\ (x_1)\gamma & \cdots & (x_k)\gamma \end{pmatrix}$. Тоді з $\gamma\mathfrak{R}\delta$ випливає, що $(\varepsilon_1 \cdot \gamma \cdot \varepsilon_2)\mathfrak{R}(\varepsilon_1 \cdot \delta \cdot \varepsilon_2)$. Але $\operatorname{rank}(\varepsilon_1 \cdot \gamma \cdot \varepsilon_2) = k > \operatorname{rank}(\varepsilon_1 \cdot \delta \cdot \varepsilon_2)$, і за теоремою 1 елементи α і β є $\mathfrak{R}$-еквівалентними до порожнього перетворення $\mathbf{0}$, що суперечить припущенню. З отриманого протиріччя випливає друге твердження теореми. $\square$

Означення 1 ([10]). *Підмножина D півгрупи S називається ω-нестійкою, якщо D – нескінченна і $aB \cup Ba \nsubseteq D$ для довільних елемента a з D та нескінченної підмножини B в D.*

Для довільного нескінченного кардинала λ та натурального $k \leqslant n$ множина $D = \mathscr{I}_\lambda^k \setminus \mathscr{I}_\lambda^{k-1}$ є ω-нестійкою [10].

З теорем 2 і 3 випливає теорема 4.

Теорема 4. *Нехай S – півгрупа і $h\colon \mathscr{I}_\lambda^n \to S$ – сюр'єктивний неанулюючий гомоморфізм. Тоді для довільного нескінченного кардинала λ та натурального $k \leqslant n$, якщо $(\mathscr{I}_\lambda^k)h \neq (\mathscr{I}_\lambda^{k-1})h$, то множина $(\mathscr{I}_\lambda^k)h \setminus (\mathscr{I}_\lambda^{k-1})h$ є ω-нестійкою.*

Ідеальним рядом півгрупи S називається ланцюг ідеалів $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_m = S$ [6].

Означення 2 ([10]). *Ідеальний ряд $I_0 \subseteq I_1 \subseteq \ldots \subseteq I_m = S$ півгрупи S називається щільним, якщо I_0 – скінченна множина і $I_k \setminus I_{k-1}$ є ω-нестійкою множиною для всіх $k = 1, \ldots, m$.*

Півгрупи зі щільними ідеальними рядами зберігаються скінченними прямими добутками та гомоморфізмами, для яких кожен елемент з образу має скінченний прообраз [10]. Зауважимо також, що півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ має щільний ідеальний ряд $\{0\} \subseteq \mathscr{I}_\lambda^1 \subseteq \ldots \subseteq \mathscr{I}_\lambda^n$.

З теореми 4 випливає теорема 5.

Теорема 5. *Довільний нетривіальний гомоморфний образ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ є півгрупою зі щільним ідеальним рядом.*

Якщо напівтопологічна інверсна півгрупа S з неперервною інверсією містить інверсну підпівгрупу T, що є півгрупою зі щільним ідеальним рядом, то T – замкнена підпівгрупа в S [10, твердження 10].

Нехай $\mathscr{S}$ – клас напівтопологічних півгруп.

Означення 3 ([3, 11, 17, 18]). *Напівтопологічна півгрупа $S \in \mathscr{S}$ називається:*

- *H-замкненою в класі $\mathscr{S}$, якщо вона є замкненою підпівгрупою у кожній напівтопологічній півгрупі $T \in \mathscr{S}$, що містить S як підпівгрупу;*
- *абсолютно H-замкненою в класі $\mathscr{S}$, якщо довільний неперервний гомоморфний образ півгрупи S у півгрупу $T \in \mathscr{S}$ є H-замкненою півгрупою в класі $\mathscr{S}$;*

- *алгебрично h-замкненою в класі $\mathscr{S}$, якщо півгрупа S з дискретною топологією $\mathfrak{d}$ є абсолютно H-замкненою в класі $\mathscr{S}$ і $(S,\mathfrak{d})\in\mathscr{S}$.*

З теореми 5 випливає теорема 6.

Теорема 6. *Півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^n$ є алгебрично h-замкненою в класі напівтопологічних інверсних півгруп з неперервною інверсією.*

3. Топологізація півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$.

Для довільного елемента α півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ позначимо

$$\uparrow_l\alpha=\{\gamma\in\mathscr{I}_\lambda^n \mid \alpha\alpha^{-1}\gamma=\alpha\} \qquad \text{і} \qquad \uparrow_r\alpha=\{\gamma\in\mathscr{I}_\lambda^n \mid \gamma\alpha^{-1}\alpha=\alpha\}.$$

Твердження 5. *Для довільного елемента α півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ виконується рівність $\uparrow_l\alpha=\uparrow_r\alpha$.*

Доведення. Нехай $\gamma\in\uparrow_l\alpha$. Тоді для довільного $x\in\operatorname{dom}\alpha$ маємо $(x)\alpha\alpha^{-1}\gamma=(x)\alpha$, але $(x)\alpha\alpha^{-1}=x$, а отже, $(x)\gamma=(x)\alpha$. Тоді $(x)\gamma\alpha^{-1}\alpha=(x)\alpha\alpha^{-1}\alpha=(x)\alpha$ і маємо $\gamma\in\uparrow_r\alpha$. Отже, $\uparrow_l\alpha\subseteq\uparrow_r\alpha$. Доведення включення $\uparrow_r\alpha\subseteq\uparrow_l\alpha$ аналогічне. $\square$

Для довільного елемента α півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ означимо

$$\uparrow\alpha=\uparrow_l\alpha=\uparrow_r\alpha.$$

Твердження 6. *Кожна гаусдорфова топологія τ на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ така, що $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ – напівтопологічна півгрупа є цілком регулярною.*

Доведення. З наслідку 8 [10] отримуємо, що для довільного елемента α напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ з $\operatorname{rank}\alpha=k$ точка α є ізольованою в $\mathscr{I}_\lambda^k$, оскільки зсуви у півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ є неперервними відображеннями, то $\uparrow\alpha$ – відкрито-замкнена підмножина в $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$.

Нехай α і β – довільні різні елементи півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$. Тоді виконується хоча б одна з умов: $\alpha\notin\uparrow\beta$ або $\beta\notin\uparrow\alpha$. Припустимо, що $\alpha\notin\uparrow\beta$. Означимо відображення $f\colon\mathscr{I}_\lambda^n\to[0,1]$ за формулою

$$(\chi)f=\begin{cases} 1, & \text{якщо} \quad \chi\in\uparrow\beta;\\ 0, & \text{якщо} \quad \chi\notin\uparrow\beta.\end{cases}$$

Оскільки підмножина $\uparrow\beta$ відкрито-замкнена в $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$, то так визначене відображення f є неперервним. У випадку $\beta\notin\uparrow\alpha$ відображення $f\colon\mathscr{I}_\lambda^n\to[0,1]$ визначається аналогічно. Отже, $(\mathscr{I}_\lambda^n,\tau)$ – цілком регулярний топологічний простір. $\square$

Топологічний простір X називається *колективно нормальним*, якщо X є T_1-простором і для довільної дискретної сім'ї $\{F_s\}_{s\in\mathscr{S}}$ замкнених підмножин в X існує дискретна сім'я $\{U_s\}_{s\in\mathscr{S}}$ відкритих підмножин в X така, що $F_s\subseteq U_s$ для всіх $s\in\mathscr{S}$ [8].

Твердження 7. *Для довільного $\lambda\geqslant 1$ простір гаусдорфової напівтопологічної півгрупи $(\mathscr{I}_\lambda^1,\tau)$ є колективно нормальним, а отже, нормальним.*

Доведення. Якщо $\lambda<\omega$, то твердження очевидне, тому вважатимемо, що $\lambda\geqslant\omega$. Нехай $\mathscr{F}=\{F_s\}_{s\in\mathscr{S}}$ – дискретна сім'я замкнених підмножин в $(\mathscr{I}_\lambda^1,\tau)$. За лемою 2 [12] кожен ненульовий елемент півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^1$ є ізольваною точкою у просторі $(\mathscr{I}_\lambda^1,\tau)$. Якщо жоден елемент сім'ї $\mathscr{F}$ не містить нуля $\mathbf{0}$ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^1$, то твердження випливає з теореми 5.1.17 [8]. Припустимо, що $\mathbf{0}\in F_{s_0}$, для деякого $s_0\in\mathscr{S}$. Нехай $U(\mathbf{0})$ –

відкритий окіл нуля $\mathbf{0}$ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^1$, що перетинає не більше, ніж один елемент сім'ї $\mathscr{F}$. Приймемо $U_{s_0} = U(\mathbf{0}) \cup F_{s_0}$ і $U_s = F_s$ для всіх $s \in \mathscr{S} \setminus \{s_0\}$. Тоді $U_s \cap U_t = \varnothing$ для всіх $s \neq t$, $s, t \in \mathscr{S}$ і за теоремою 5.1.17 [8] топологічний простір $(\mathscr{I}_\lambda^1, \tau)$ колективно нормальний. $\square$

Зауваження 1. Для довільного незліченного кардинала λ на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^1$ існує півгрупова (інверсна) топологія τ_{mv} (τ_{mi}) така, що топологічний простір $(\mathscr{I}_\lambda^1, \tau_{mv})$ $((\mathscr{I}_\lambda^1, \tau_{mh}))$ не є досконало нормальним [12].

Зауваження 2. Нехай $V(\aleph_0)$ – зліченне віяло Фреше-Урисона (див. [8, 3.12.8(e)]). Означимо топологію τ на зліченній півгрупі $\mathscr{I}_{\aleph_0}^1$ так: усі ненульові елементи напівгрупи $\mathscr{I}_{\aleph_0}^1$ є ізольованими точками, в'язка $E(\mathscr{I}_{\aleph_0}^1)$ – відкрита підмножина в $\mathscr{I}_{\aleph_0}^1$ і ототожнюється з $V(\aleph_0)$ так, щоб нуль півгрупи $\mathscr{I}_{\aleph_0}^1$ був неізольованою точкою в $V(\aleph_0)$. Легко бачити, що $(\mathscr{I}_{\aleph_0}^1, \tau)$ – топологічна інверсна півгрупа, яка не має зліченної бази в нулі.

Топологічний простір X називається *розрідженим*, якщо він не містить непорожню щільну в собі власну підмножину [8]. Очевидно, що топологічний простір X є розрідженим, якщо кожна непорожня підмножина A в X містить ізольовану точку в A.

Твердження 8. *Для довільних натурального n і $\lambda \geqslant 1$ простір гаусдорфової напівтопологічної півгрупи $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ є розрідженим.*

Доведення. Якщо $\lambda < \omega$, то твердження очевидне, тому вважатимемо, що $\lambda \geqslant \omega$. Покажемо, що кожна замкнена підмножина в $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ містить ізольовану в собі точку. Нехай A – замкнена підмножина в $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. Тоді з означення півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ випливає, що існує елемент α півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ такий, що $\alpha \in A$ і $\operatorname{rank}\beta \leqslant \operatorname{rank}\alpha = k$ для всіх $\beta \in A$. За наслідком 8 [10], $\{\alpha\}$ – відкрита підмножина в підпросторі $\mathscr{I}_\lambda^k$, а отже, α – ізольована точка в A. $\square$

Топологічний простір X називається *нульвимірним*, якщо в X існує база топології, що складається з відкрито-замкнених підмножин [8].

Зауваження 3. З леми 2 [12] випливає, що для довільного кардинала $\lambda \geqslant 1$ простір напівтопологічної півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^1$ є нульвимірним.

Твердження 9. *Для довільних натурального n і $\lambda \geqslant 1$ простір гаусдорфової локально компактної напівтопологічної півгрупи $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ є нульвимірним.*

Доведення. Зафіксуємо довільний елемент α півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$. Оскільки зсуви в півгрупі $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ є неперервними відображеннями, то з наслідку 8 [10] отримуємо, що ${\uparrow}\alpha$ – відкрито-замкнена підмножина в $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. Нехай $U(\alpha)$ – відкритий окіл точки α в $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ з компактним замиканням $\overline{U(\alpha)}$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\overline{U(\alpha)} \subseteq {\uparrow}\alpha$. Тоді $\overline{U(\alpha)} \setminus U(\alpha)$ – компактна підмножина в $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$, $\alpha \notin \overline{U(\alpha)} \setminus U(\alpha)$ і $\Gamma = \{{\uparrow}\beta \mid \beta \in \overline{U(\alpha)} \setminus U(\alpha)\}$ – відкрите покриття множини $\overline{U(\alpha)} \setminus U(\alpha)$. Нехай $\Gamma_0 = \{{\uparrow}\beta_i \mid i = 1, 2, \ldots, k\} \subseteq \Gamma$ – скінченне підпокриття множини $\overline{U(\alpha)} \setminus U(\alpha)$. Тоді $V(\alpha) = U(\alpha) \setminus \bigcup_{i=1}^k {\uparrow}\beta_i$ – відкрито-замкнений окіл точки α і $V(\alpha) \subseteq U(\alpha)$. $\square$

Означимо топологію τ_c на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$ так: сім'я

$$\mathscr{B} = \{U_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = {\uparrow}\alpha \setminus ({\uparrow}\alpha_1 \cup \cdots \cup {\uparrow}\alpha_k) \mid \alpha_i \in {\uparrow}\alpha \setminus \{\alpha\}, \alpha, \alpha_i \in \mathscr{I}_\lambda^n, i = 1, \ldots, k\}$$

є базою топології τ_c на $\mathscr{I}_\lambda^n$.

Твердження 10. *Для довільних $\lambda \geqslant 1$ і натурального n, $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau_c)$ – гаусдорфова компактна напівтопологічна півгрупа з неперервною інверсією.*

Доведення. Оскільки для довільних $\alpha, \beta \in \mathscr{I}_\lambda^n$ виконується хоча б одна з умов $\alpha \notin {\uparrow}\beta$ або $\beta \notin {\uparrow}\alpha$, то простір $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau_c)$ є гаусдорфовим. Очевидно, що простір $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau_c)$ компактний.

Покажемо, що у півгрупі $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau_c)$ зсуви є неперервними відображеннями. Для цього розглянемо можливі випадки.

(i) $\mathbf{0}\cdot\mathbf{0} = \mathbf{0}$. Тоді для довільного відкритого околу $U_{\mathbf{0}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ нуля $\mathbf{0}$ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$ маємо

$$U_{\mathbf{0}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0} \cdot U_{\mathbf{0}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \{\mathbf{0}\} \subseteq U_{\mathbf{0}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k).$$

(ii) $\alpha \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}$. Тоді для довільного відкритого околу $U_{\mathbf{0}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ нуля $\mathbf{0}$ маємо

$$U_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \cdot \mathbf{0} = \{\mathbf{0}\} \subseteq U_{\mathbf{0}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k).$$

Нехай $U_{\mathbf{0}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ – довільний окіл нуля $\mathbf{0}$ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\operatorname{rank}\alpha_1, \ldots, \operatorname{rank}\alpha_k \leqslant \operatorname{rank}\alpha$. Означимо

$$B = \{\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n \mid \operatorname{rank}\gamma = 1,\ \operatorname{dom}\gamma \subseteq \operatorname{dom}\alpha \quad \text{і} \quad \operatorname{ran}\gamma \subseteq \operatorname{ran}\alpha_1 \cup \ldots \cup \operatorname{ran}\alpha_k\}.$$

Тоді B – скінченна підмножина в $\mathscr{I}_\lambda^n$ і $\alpha \cdot U_{\mathbf{0}}(B) \subseteq U_{\mathbf{0}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

(iii) $\mathbf{0}\cdot\alpha = \mathbf{0}$. Тоді для довільного відкритого околу $U_{\mathbf{0}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ нуля $\mathbf{0}$ маємо

$$\mathbf{0} \cdot U_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) = \{\mathbf{0}\} \subseteq U_{\mathbf{0}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k).$$

Нехай $U_{\mathbf{0}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$ – довільний окіл нуля $\mathbf{0}$ напівгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $\operatorname{rank}\alpha_1, \ldots, \operatorname{rank}\alpha_k \leqslant \operatorname{rank}\alpha$. Означимо

$$B = \{\gamma \in \mathscr{I}_\lambda^n \mid \operatorname{rank}\gamma = 1,\ \operatorname{dom}\gamma \subseteq \operatorname{dom}\alpha_1 \cup \ldots \cup \operatorname{dom}\alpha_k \quad \text{і} \quad \operatorname{ran}\gamma \subseteq \operatorname{ran}\alpha\}.$$

Тоді B – скінченна підмножина в $\mathscr{I}_\lambda^n$ і $U_{\mathbf{0}}(B) \cdot \alpha \subseteq U_{\mathbf{0}}(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$.

(iv) $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq \mathbf{0}$ і $\operatorname{rank}\alpha = \operatorname{rank}\beta = \operatorname{rank}\gamma$, тобто $\operatorname{ran}\alpha = \operatorname{dom}\beta$. Тоді для довільних околів $U_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k)$, $U_\beta(\beta_1, \ldots, \beta_n)$, $U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ елементів α, β і γ, відповідно, маємо

$$U_\alpha(\alpha_1, \ldots, \alpha_k) \cdot \beta = \alpha \cdot U_\beta(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \{\gamma\} \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_m).$$

(v) $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq \mathbf{0}$ і $\operatorname{rank}\alpha = \operatorname{rank}\gamma < \operatorname{rank}\beta$, тобто $\operatorname{ran}\alpha \subsetneqq \operatorname{dom}\beta$. Тоді для довільних околів $U_\beta(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ і $U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_m)$ елементів β і γ, відповідно, маємо

$$\alpha \cdot U_\beta(\beta_1, \ldots, \beta_n) = \{\gamma\} \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_m).$$

Якщо $\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ b_1 & \cdots & b_i \end{pmatrix}$ і $\beta = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{i+j} \\ c_1 & \cdots & c_i & c_{i+1} & \cdots & c_{i+j} \end{pmatrix}$, де $i + j \leqslant n$, то $\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ c_1 & \cdots & c_i \end{pmatrix}$. Нехай $U_\gamma(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ – довільний відкритий окіл елемента γ і

$\gamma_l = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & a^l_{i+1} & \cdots & a^l_{i+s_l} \\ c_1 & \cdots & c_i & c^l_{i+1} & \cdots & c^l_{i+s_l} \end{pmatrix}$, де $l = 1, \dots, k$. Не зменшуючи загальності, можемо вважати, що $s \leqslant j$. Нехай $X = \{c_{i+1}, \dots, c_{i+j}\} \cap \bigcup_{l=1}^{k} \{c^l_{i+1}, \dots, c^l_{i+s_l}\}$ і

$$X_\alpha = \{(a, b) \mid a \in \operatorname{dom} \gamma_1 \cup \dots \cup \operatorname{dom} \gamma_k, b \in X\}.$$

Якщо $X_\alpha = \varnothing$, то для довільного околу $U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k)$ елемента α одержуємо

$$U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_k) \cdot \beta = \{\gamma\} \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_k).$$

Якщо ж $X_\alpha \neq \varnothing$, то множина X_α – скінченна й означимо

$$A_\alpha = \left\{ \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & a \\ b_1 & \cdots & b_i & b \end{pmatrix} \;\middle|\; (a, b) \in X_\alpha \right\}.$$

Тоді множина A_α – скінченна, $A_\alpha \subseteq {\uparrow}\alpha$ і виконується включення

$$U_\alpha(A_\alpha) \cdot \beta \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_k).$$

(vi) $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq \mathbf{0}$ і $\operatorname{rank} \beta = \operatorname{rank} \gamma < \operatorname{rank} \alpha$, тобто $\operatorname{dom} \beta \subsetneqq \operatorname{ran} \alpha$. У цьому випадку міркування аналогічні до випадку (v) з точністю до дуальності.

(vii) $\alpha \cdot \beta = \gamma \neq \mathbf{0}$ і $\operatorname{rank} \gamma < \max\{\operatorname{rank} \alpha, \operatorname{rank} \beta\}$. Нехай

$$\alpha = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{i+k} \\ b_1 & \cdots & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{i+k} \end{pmatrix}, \; \beta = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_i & x_{i+1} & \cdots & x_{i+j} \\ c_1 & \cdots & c_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j} \end{pmatrix},$$

$$\gamma = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i \\ c_1 & \cdots & c_i \end{pmatrix}, \quad \text{де} \quad i + k, i + j \leqslant n.$$

Нехай $\gamma_1 = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & p_1 \\ c_1 & \cdots & c_i & q_1 \end{pmatrix}, \dots, \gamma_m = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & p_m \\ c_1 & \cdots & c_i & q_m \end{pmatrix}$. Якщо $q_1, \dots, q_{m_1} \in \operatorname{ran} \beta$, $m_1 \leqslant m$, то $U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_{m_1}) \cdot \beta \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, де

$$\alpha_t = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_i & a_{i+1} & \cdots & a_{i+k} & p_t \\ b_1 & \cdots & b_i & b_{i+1} & \cdots & b_{i+k} & x \end{pmatrix}, \; t = 1, \dots, m_1 \text{ і } (x)\beta \in \{q_1, \dots, q_{m_1}\}.$$

Якщо $p_1, \dots, p_{m_2} \in \operatorname{dom} \alpha$, $m_2 \leqslant m$, то $\alpha \cdot U_\beta(\beta_1 \dots, \beta_{m_2}) \subseteq U_\gamma(\gamma_1, \dots, \gamma_m)$, де

$$\beta_t = \begin{pmatrix} b_1 & \cdots & b_i & x_{i+1} & \cdots & x_{i+j} & y \\ c_1 & \cdots & c_i & y_{i+1} & \cdots & y_{i+j} & q_t \end{pmatrix}, t = 1, \dots, m_2, \text{ і } (y)\alpha^{-1} \in \{p_1, \dots, p_{m_2}\}.$$

Отож, зсуви у $(\mathscr{I}^n_\lambda, \tau_c)$ є неперервними. Інверсія неперервна в $(\mathscr{I}^n_\lambda, \tau_c)$, оскільки для довільних $\alpha, \alpha_1, \dots, \alpha_i \in \mathscr{I}^n_\lambda$, де $\alpha_1, \dots, \alpha_i \in {\uparrow}\alpha \setminus \{\alpha\}$, $i = 1, 2, \dots$, виконується рівність $(U_\alpha(\alpha_1, \dots, \alpha_i))^{-1} = U_{\alpha^{-1}}(\alpha_1^{-1}, \dots, \alpha_i^{-1})$. □

Зауваження 4. З означення топології τ_c на півгрупі $\mathscr{I}^n_\lambda$ випливає, що для довільної топології τ на $\mathscr{I}^n_\lambda$ такої, що $(\mathscr{I}^n_\lambda, \tau)$ – гаусдорфова напівтопологічна півгрупа, виконується включення $\tau_c \subseteq \tau$.

Теорема 7. *Нехай $\lambda \geqslant \omega$, $n = 1, 2, \dots$ і τ – гаусдорфова топологія на півгрупі $\mathscr{I}^n_\lambda$. Тоді такі умови еквівалентні:*

(i) *$(\mathscr{I}^n_\lambda, \tau)$ – компактна напівтопологічна півгрупа;*
(ii) *$(\mathscr{I}^n_\lambda, \tau)$ – топологічно ізоморфна до півгрупи $(\mathscr{I}^n_\lambda, \tau_c)$;*
(iii) *$(\mathscr{I}^n_\lambda, \tau)$ – компактна напівтопологічна півгрупа з неперевною інверсією;*
(iv) *$(\mathscr{I}^n_\lambda, \tau)$ – зліченно компактна напівтопологічна півгрупа.*

Доведення. Імплікації $(ii) \Rightarrow (i)$, $(ii) \Rightarrow (iii)$, $(iii) \Rightarrow (i)$, $(i) \Rightarrow (iv)$, $(ii) \Rightarrow (iv)$ і $(iii) \Rightarrow (iv)$ є очевидними.

$(i) \Rightarrow (ii)$. Із зауваження 4 отримуємо, що $\tau_c \subseteq \tau$, оскільки τ – компактна топологія на півгрупі $\mathscr{I}_\lambda^n$, то за наслідком 3.1.14 [8] одержуємо $\tau = \tau_c$.

$(iv) \Rightarrow (i)$. Нехай τ – топологія на $\mathscr{I}_\lambda^n$ така, що $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ – зліченно компактна напівтопологічна півгрупа. Доведення будемо проводити індукцією по n. За теоремою 2 [12] для $n = 1$ напівтопологічна півгрупа $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ є компактною. Доведемо, що з того, що для довільного $k < n$ напівтопологічна півгрупа $(\mathscr{I}_\lambda^k, \tau)$ є компактною, випливає, що півгрупа $(\mathscr{I}_\lambda^k, \tau)$ є компактною для $k = n$.

З припущення індукції та теореми 3.10.4 [8] отримуємо, що півгрупа $\mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ з індукованою з $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ топологією, є компактною, оскільки $\mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ – замкнений підпростір в $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. Припустимо, що τ – некомпактна топологія на $\mathscr{I}_\lambda^n$. Тоді існує відкрите покриття $\Gamma = \{U_\iota\}_{\iota \in \mathscr{A}}$ півгрупи $\mathscr{I}_\lambda^n$, що не містить скінченне підпокриття. Оскільки $\mathscr{I}_\lambda^{n-1}$ – компактна підпівгрупа в $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$, то існує скінченна підсім'я $\Gamma_{n-1} = \{U_1, \ldots, U_m\}$ в $\Gamma = \{U_\iota\}_{\iota \in \mathscr{A}}$ така, що $\mathscr{I}_\lambda^{n-1} \subseteq \bigcup_{i=1}^m$. Оскільки простір $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ не є компактним, то існує елемент U покриття Γ такий, що $\bigcup \Gamma_{n-1} \neq \bigcup \Gamma_{n-1} \cup U$. За індукцією побудуємо зліченну підсім'ю $\Gamma^* = \{U_j \mid j = 1, 2, 3, \ldots\}$ сім'ї Γ таку, що $\bigcup \Gamma_{n-1} \neq \bigcup \Gamma_{n-1} \cup U_1$ і

$$\bigcup \Gamma_{n-1} \cup U_1 \cup \ldots \cup U_j \neq \bigcup \Gamma_{n-1} \cup U_1 \cup \ldots \cup U_j \cup U_{j+1},$$

для довільного натурального j. Зауважимо, що зі зліченної компактності простору $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ випливає, що $\bigcup \Gamma_{n-1} \cup \bigcup \{U_j \mid j = 1, 2, 3, \ldots\} \neq \mathscr{I}_\lambda^n$, оскільки за припущенням $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ – некомпактний простір. За наслідком 8 [10] множина

$$V = \mathscr{I}_\lambda^n \setminus \left(\bigcup \Gamma_{n-1} \cup \bigcup \{U_j \mid j = 1, 2, 3, \ldots\} \right)$$

містить лише ізольовані точки в $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$, а отже, $\widetilde{\Gamma} = \Gamma_{n-1} \cup \{V\} \cup \{U_j \mid j = 1, 2, 3, \ldots\}$ – відкрите зліченне покриття простору $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$, що не містить скінченне підпокриття, а це суперечить зліченній компактності простору $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. З отриманої суперечності випливає компактність простору $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$. $\square$

1. *Вагнер В.В.* К теории частичных преобразований / *Вагнер В.В.* // ДАН СССР. – 1952. – Т. 84, №5. – С. 653-656.
2. *Вагнер В.В.* Обобщённые группы / *Вагнер В.В.* // ДАН СССР. – 1952. – Т. 84, №5. – С. 1119-1122.
3. *Гутік О.В.* H-замкнені топологічні півгрупи та λ-розширення Брандта / *Гутік О.В., Павлик К.П.* // Мат. методи фіз.-мех. поля. – 2001. – Т. 44, №3. – С. 20-28.
4. *Carruth J.H.* The Theory of Topological Semigroups, Vol. I / *Carruth J.H., Hildebrant J.A., Koch R.J.* – New York and Basel: Marcel Dekker Inc., 1983.
5. *Carruth J.H.* The Theory of Topological Semigroups, Vol. II / *Carruth J.H., Hildebrant J.A., Koch R.J.* – New York and Basel: Marcel Dekker Inc., 1986.
6. *Clifford A.H.* The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. I / *Clifford A.H., Preston G.B.* – Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1961.
7. *Clifford A.H.* The Algebraic Theory of Semigroups, Vol. II / *Clifford A.H., Preston G.B.* – Amer. Math. Soc. Surveys 7, Providence, R.I., 1967.
8. *Engelking R.* General Topology, 2nd ed. / *Engelking R.* – Berlin, 1989.

9. *Green J.A.* On the structure of semigroups / *Green J.A.* // Ann. of Math. – 1955. – Vol. 84. – P. 163-172.
10. *Gutik O.* Semigroup closures of finite rank symmetric inverse semigroups / *Gutik O., Lawson J., Repovš D.* // Semigroup Forum. – 2009. – Vol. 78, №2. – P. 326-336.
11. *Gutik O.* Topological Brandt λ-extensions of absolutely H-closed topological inverse semigroups / *Gutik O., Pavlyk K.* // Вісн. Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2003. – Вип. 61. – №2. – С. 98-105.
12. *Gutik O.* Topological semigroups of matrix units / *Gutik O., Pavlyk K.* // Algebra Discrete Math. – 2005. – №. 3. – С. 1-17.
13. *Gutik O.V.* Topological semigroups of matrix units and countably compact Brandt λ^0-extensions / *Gutik O.V., Pavlyk K.P., Reiter A.R.* // Мат. студії. – 2009. – Т. 32, №2. – С. 115-131.
14. *Gutik O.V.* Symmetric inverse topological semigroups of finite rank $\leqslant n$ / *Gutik O.V., Reiter A.R.* // Мат. методи фіз.-мех. поля. – 2009. – Т. 52, №3. – С. 7-14.
15. *Petrich M.* Inverse Semigroups / *Petrich M.* – New York: John Wiley & Sons, 1984.
16. *Ruppert W.* Compact Semitopological Semigroups: An Intrinsic Theory / *Ruppert W.* – Lecture Notes in Mathematics. – Vol. 1079 – Berlin, 1984.
17. *Stepp J.W.* A note on maximal locally compact semigroups / *Stepp J.W.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1969. – Vol. 20, №. 1 – P. 251-253.
18. *Stepp J.W.* Algebraic maximal semilattices / *Stepp J.W.* // Pacific J. Math. – 1975. – Vol. 58, №. 1 – P. 243-248.

ON SEMITOPOLOGICAL SYMMETRIC INVERSE SEMIGROUPS OF A BOUNDED FINITE RANK

Oleg GUTIK, Andriy REITER

Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: o_gutik@franko.lviv.ua, reiter_andriy@yahoo.com

We prove that the symmetric inverse semigroup of a bounded finite rank $\mathscr{I}_\lambda^n$ is algebraically h-closed in the class of semitopological inverse semigroups with continuous inversion. Also we describe all compact and countably compact topologies τ on $\mathscr{I}_\lambda^n$ such that $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ is a Hausdorff semitopological semigroup.

Key words: symmetric inverse semigroup of a bounded finite rank, semitopological semigroup, congruence.

О ПОЛУТОПОЛОГИЧЕСКИХ СИММЕТРИЧЕСКИХ ИНВЕРСНЫХ ПОЛУГРУППАХ ОГРАНИЧЕННОГО КОНЕЧНОГО РАНГА

Олег ГУТИК, Андрей РЕЙТЕР

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: o_gutik@franko.lviv.ua, reiter_andriy@yahoo.com

Доказано, что симметрическая инверсная полугруппа ограниченного конечного ранга $\mathscr{I}_\lambda^n$ алгебраически h-замкнута в классе полутопологических инверсных полугрупп с непрерывной инверсией. Описаны все компактные и счётно компактные топологии τ на полугруппе $\mathscr{I}_\lambda^n$ такие, что $(\mathscr{I}_\lambda^n, \tau)$ – хаусдорфова полутопологическая полугруппа.

Ключевые слова: симметрическая инверсная полугруппа ограниченного конечного ранга, полутопологическая полугруппа, конгруэнция.

Стаття надійшла до редколегії 06.05.2010

Прийнята до друку 22.12.2010