

УДК 517.928:517.927

## ПРО ЗАДАЧУ ШТУРМА-ЛІУВІЛЛЯ НА ЗІРКОВИХ ГРАФАХ З “ВАЖКИМИ” ВУЗЛАМИ

Юрій ГОЛОВАТИЙ, Геннадій ГРАБЧАК

Львівський національний університет імені Івана Франка,  
79000 Львів, вул. Університетська, 1  
e-mail: yu\_holovaty@franko.lviv.ua, h\_hrabchak@franko.lviv.ua

Вивчено спектральні властивості граничної задачі для сингулярно збуреної задачі на зірковому графі, яка моделює власні коливання в'язки струн із збуренням густини в околі точки їхнього з'єднання. Розглянуто випадок сили збурення, за якого гранична задача може бути несамоспряженою. З'ясовано структури її спектра і кореневих підпросторів, побудовано системи власних і приєднаних функцій, досліджено питання про геометричну й алгебричну кратності власних значень.

*Ключові слова:* диференціальні рівняння на графах, сингулярне збурення, приєднана маса, спектр, власне значення, власний вектор, приєднаний вектор, асимптотика.

**Вступ.** Природними геометричними моделями фізичних процесів у системах одновимірних континуумів, які взаємодіють через кінці, є асоційовані з цими системами геометричні графи, а математичними моделями – крайові задачі для диференціальних рівнянь на них. Такі задачі виникають під час моделювання різноманітних фізичних явищ: деформацій і коливань пружних мережоподібних конструкцій (струнних і стержневих сіток), опис процесів у мережах хвилеводів, дифузійних процесів у мережах, розрахунків електричних і гідравлічних мереж, коливань складних молекул, поширення сигналів в нейронах, процесів росту рослин тощо. Це призвело до значної активізації протягом останніх трьох десятиріч розвитку теорії диференціальних рівнянь на геометричних графах і відповідно до появи численних публікацій.

На графи переносили результати якісної теорії звичайних диференціальних рівнянь, вивчали спектральні властивості та їхній зв'язок з геометрією графів. З'ясувалось, що деякі результати класичної теорії переносяться на графи нетривіально (наприклад, додатність функції Гріна), в інших же аспектах результати досліджень

задач на графах суттєво відрізняються від класичних, зокрема, що стосується кратності спектра та питання самоспряженості операторів (див. [1] та огляд [2] з бібліографією).

Серед перших досліджень сингулярно збурених крайових задач на графах з використанням асимптотичного аналізу на таких геометричних об'єктах, є праця [3]. В ній для випадку графа загальної структури узагальнено модель, запропоновану О. А. Олейнік [4] для коливних систем з сильно нерівномірним розподілом маси. Хоча вивчення властивостей коливних континуумів з приєднаними та зосередженими масами відбувалося ще у XVIII ст, розвиток новітніх технологій, пов'язаних із створенням матеріалів з новими властивостями, зокрема – композитних матеріалів, призвів до значного зацікавлення дослідників математичними задачами теорії сильно неоднорідних середовищ і у підсумку до побудови нових математичних моделей з більш агресивною зміною характеристик. Ці моделі допомогли описати багато відомих з експериментів ефектів, наприклад, відомий у механіці ефект локалізації реакції – наявність локальних коливань в околі зони збурення маси.

Вивченню асимптотичних властивостей одновимірних коливних систем із сингулярно збуреною густиною присвячено праці [4]–[8]. В них з'ясовано і ефект локальних коливань. У [4]–[5] досліджено спектральні властивості струни з нерівномірним розподілом маси. В праці [6] побудовано повні асимптотичні розвинення власних значень і власних функцій цієї задачі. Подібні результати для диференціальних операторів четвертого порядку (модель стержня) одержано в [7]. Багатовимірні задачі з різними збуреннями густини маси розглянуто в [9]–[11]. Доволі детальний огляд праць, присвячених таким задачам, наведено в [12].

Ця праця є логічним продовженням дослідження сформульованої у [3] задачі, коли локальні збурення густини набувають величини, за якої на коливання всієї системи помітно починають впливати процеси на областях збурення. Взаємодія збуреної і незбуреної частин системи породжує ситуацію, коли гранична задача є несамоспряженою. Таку ситуацію з несамоспряженою граничною задачею розглянуто в [13]. Це зумовлює, порівняно з [3], суттєві зміни в підходах до вивчення збуреної задачі і в техніці її асимптотичного аналізу. Ми використовуємо концепцію дослідження, запропоновану в [13]. Важливим моментом аналізу є вивчення спектральних властивостей граничної задачі, дослідженню яких присвячено нашу працю.

У пункті 1 наведено основні поняття теорії диференціальних рівнянь на геометричних графах і деякі позначення.

В пункті 2 сформульовано збурену спектральну задачу для рівняння Штурма-Ліувілля на геометричному графі, яка є математичним описом фізичної задачі про коливання струнної сітки зі збуренням густини в околі незакріплених вузлів. Ми обмежились формулюванням модельної задачі для зіркового графа, якій в механічній інтерпретації відповідає в'язка струн, з'єднаних в одному незакріпленому вузлі та з закріпленими кінцевими точками. Збурену частину механічної системи назвемо важким кріпленням. Малим параметром  $\varepsilon$  в задачі є відношення характерних лінійних розмірів важкого кріплення та довжини струн. Коли  $\varepsilon$  прямує до нуля, в околі точки кріплення струн концентрується велика маса, причому вважаємо, що

відношення усереднених густин струн і кріплення має порядок  $\varepsilon^{-2}$  (в [3] цей порядок дорівнює  $\varepsilon^{\varkappa}$  з  $\varkappa < 2$ ). Перше власне значення такої задачі є простим і безмежно малим при  $\varepsilon \rightarrow 0$  [3].

У пункті 3 з'ясовано граничну спектральну задачу на головні члени асимптотик решти власних значень і відповідних власних функцій; побудовано у відповідному гільбертовому просторі асоційований з граничною задачею оператор  $T$  і спряжений до нього оператор  $T^*$ . Хоча збурена задача при кожному фіксованому значенні  $\varepsilon > 0$  є самоспряженою, для граничної задачі можлива ситуація, за якої оператори  $T$  і  $T^*$  не збігаються в жодному гільбертовому просторі, тобто гранична задача є несамоспряженою. Ми не обґрунтовуємо збіжності при  $\varepsilon \rightarrow 0$  збуреної задачі до граничної, а зосередимося на вивченні її спектральних властивостей.

В пункті 4 з'ясовано структуру спектра  $\sigma(T)$  граничної задачі: він є об'єднанням точок спектрів  $\sigma(\hat{T}_1)$  і  $\sigma(T_2)$  відповідно незбуреної задачі на графі з закріпленими вершинами та задачі Неймана на зірковому підграфі, який відповідає області збурення густини (тут  $\hat{T}_1$  і  $T_2$  – асоційовані з цими задачами самоспряжені оператори). Цей факт доводимо, явно побудувавши резольвенту оператора  $T$ .

Пункт 5 присвячено дослідженню алгебричної та геометричної кратностей власних значень  $\lambda \in \sigma(T)$  граничного оператора і з'ясуванню структури відповідних кореневих підпросторів. Якщо  $\lambda \notin \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$ , то згадані кратності збігаються і дорівнюють кратності  $\lambda$  як точки спектра  $\sigma(\hat{T}_1)$ , (якщо  $\lambda \in \sigma(\hat{T}_1)$ ) чи  $\sigma(T_2)$  (якщо  $\lambda \in \sigma(T_2)$ ). Несамоспряженість оператора  $T$  виявляється у випадку, коли  $\sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2) \neq \emptyset$ : якщо  $\lambda \in \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$ , то загалом алгебрична і геометрична кратності  $\lambda$  не збігаються і, крім власних, оператор  $T$  має приєднані вектори. Для цього випадку з'ясовано формулу для геометричної кратності  $\lambda$  (теорема 3) і показано, що алгебрична кратність  $\lambda$  є сумою алгебричних кратностей  $\lambda$  як точок спектрів  $\sigma(\hat{T}_1)$  і  $\sigma(T_2)$  (теорема 4). Побудовано системи власних і приєднаних векторів, показано, що в жордановій структурі кореневих підпросторів оператора  $T$  ланцюгів довжини більшої, ніж 2 не існує.

**1. Диференціальні рівняння на графах. Основні поняття.** Нехай  $V = \{a_1, \dots, a_k\}$  – скінченна множина точок в  $\mathbb{R}^3$ , деякі з яких з'єднано гладкими неперетинними кривими. Елементи  $V$  називатимемо *вершинами*, а криві – *ребрами*. Множину ребер позначимо через  $E$ . Ребро, яке з'єднує точки  $a_i$  і  $a_j$ , позначимо через  $g_{ij}$  або  $(a_i, a_j)$ . Просторовий *геометричний граф*  $G = G(V, E)$  – це сукупність вершин і ребер. Ребро і довільну з двох вершин, які воно з'єднує, назвемо *інцидентними*. Надалі  $I(a)$  – множина всіх ребер, інцидентних до вершини  $a$ . *Степенем*  $\deg(a)$  вершини  $a$  назвемо потужність  $I(a)$ .

Відображення  $f: G \rightarrow \mathbb{R}$  називатимемо *функцією на графі*, а через  $f_g$  позначатимемо її *звуження на ребро*  $g$ . Функція  $f$  є *неперервною на графі*, якщо вона неперервна на кожному ребрі і в кожній вершині. *Неперервність*  $f$  у вершині  $a \in V$  означає, що  $\lim_{x \rightarrow a} f_g(x) = f(a)$  для всіх  $g \in I(a)$ . Тобто, *граничні значення*  $f_g(a)$  функції  $f$  на кінцях прилеглих до вершини  $a$  ребер збігаються з її значенням у цій вершині.

Нехай  $C(G)$  – простір неперервних на  $G$  функцій, а  $C\{G\}$  – простір функцій на  $G$ , рівномірно неперервних на ребрах, але значення яких у вершинах не зовсім

збігаються з граничними значеннями на кінцях прилеглих до цих вершин відповідних ребер. Уведемо також простір  $C^n(G) = \{f \in C(G) : f_g \in C^n(\bar{g}) \text{ для всіх } g \in E\}$ . Зауважимо, що похідні функцій на графі не визначені у вершинах – говоримо лише про граничні значення цих похідних вздовж ребер у їхніх кінцевих точках. Диференціювання на ребрі  $g$  проводимо за натуральним параметром цієї кривої. На кожному ребрі є дві натуральні параметризації, тому домовимося під  $\frac{df}{dg}(a)$  розуміти *граничне значення похідної на прилеглому до вершини  $a$  кінці ребра  $g$ , взятої вздовж  $g$  у напрямі від вершини*. Похідні парного порядку від напрямку параметризації не залежать, тому писатимемо просто  $f''$ . Це саме стосується добутків  $f'g'$ .

*Інтеграл* функції  $f$  на графі є сумою інтегралів по всіх його ребрах

$$\int_G f dG = \sum_{g \in E} \int_g f dg.$$

Нехай  $L_2(G)$  – простір Лебега зі скалярним добутком  $(u, v) = \int_G u \bar{v} dG$  і нормою  $\|u\| = (u, u)^{1/2}$ . Введемо простори Соболева

$$W_2^k\{G\} = \{f \in L_2(G) : f_g \in W_2^k(g) \text{ для всіх } g \in E\},$$

$$W_2^k(G) = \{f \in C(G) : f_g \in W_2^k(g) \text{ для всіх } g \in E\},$$

із скалярним добутком  $(u, v)_k = \sum_{i=0}^k \int_G u^{(i)} v^{(i)} dG$  та відповідною нормою

$$\|u\|_k = (u, u)_k^{1/2}.$$

Нехай  $Q$  – функція класу  $C\{G\}$ . *Крайовою задачею* для диференціального рівняння другого порядку  $u'' + Qu = f$  на графі  $G$  називаємо сукупність диференціальних рівнянь  $u_g'' + Q_g u_g = f_g$  на ребрах  $g \in E$  графа і деяких умов у його вершинах. Розіб'ємо множину вершин графа на дві підмножини  $V = V_0 \cup V_1$ . У точках першої з них значення розв'язку  $u$  вважаємо відомими:  $u(a) = \varphi(a)$  для всіх  $a \in V_0$ . У решті вершин вимагаємо, щоб

- функція  $u$  була неперервною

$$u_{g_1}(a) = u_{g_2}(a) = \dots = u_{g_r}(a), \quad (1)$$

де  $g_1, \dots, g_r$  – ребра, інцидентні вершині  $a$ ,  $r = \deg(a)$ ;

- виконувалася умова

$$\sum_{g \in I(a)} \frac{du}{dg}(a) + q(a)u(a) = 0. \quad (2)$$

Якщо  $q(a) = 0$ , то (2) є класичною умовою Кірхгофа балансу струмів, теплових потоків, сил натягу і т. п. Доданок  $q(a)u(a)$  у фізичних моделях означає наявність зосередженого у вершині  $a$  фактора – точкового заряду, точкового джерела тепла, зосередженої маси. Множину  $V_0$ , в точках якої задаємо умови Діріхле, назвемо *межею графа*. Позначатимемо її надалі через  $\partial G$ . Вершини з множини  $V_1$  назвемо *внутрішніми*. Зауважимо, що поділ вершин на граничні і внутрішні визначено типом заданих у них крайових умов, а не топологією графа. Розв'язок  $u$  крайової задачі шукаємо в класі  $C^2(G)$ .

*Зауваження 1.* Якщо внутрішня вершина є кінцевою, тобто  $\deg(a) = 1$ , то умови (1), (2) вироджуються у крайову умову  $\frac{du}{dg}(a) + q(a)u(a) = 0$ , де  $g$  – єдине ребро, інцидентне до  $a$ . Отже, кінцеві вершини, в яких задано третю крайову умову чи умову Неймана, вважаємо внутрішніми.

Нехай  $\dot{G} = G \setminus V$  – теоретико-множинне об'єднання ребер. Трактуючи геометричний граф як стратифікований многовид, зручно використовувати “стратифікований” диференціальний оператор [1]

$$\left(\frac{d}{dG}u' + qu\right)(x) = \begin{cases} u''(x) + q(x)u(x), & x \in \dot{G}, \\ \sum_{g \in I(x)} \frac{du}{dg}(x) + q(x)u(x), & x \in V \setminus \partial G, \end{cases} \quad (3)$$

який діє на функції класу  $C^2(G)$  і об'єднує диференціальні оператори другого порядку на ребрах та оператори першого порядку у внутрішніх вершинах. Надалі, формулюючи крайові задачі, ми опускатимемо умови неперервності (1), бо вони входять в означення простору  $C^2(G)$ .

Для кожної пари функцій  $u, v$  з класу  $C^2\{G\}$  справджується формула

$$\int_G u''v dG = \sum_{a \in V} \sum_{g \in I(a)} \left( u_g(a) \frac{dv}{dg}(a) - \frac{du}{dg}(a) v_g(a) \right) + \int_G u v'' dG \quad (4)$$

– аналог формули Лагранжа на графі.

**2. Формулювання задачі.** Нехай  $V = \{a, a_1, \dots, a_l\}$  і  $E = \{(a, a_1), \dots, (a, a_l)\}$ . Тоді  $\Gamma = \Gamma(V, E)$  – зірковий граф і можна вважати, що всі його ребра  $\gamma_j = (a, a_j)$ , які з'єднують центр  $a$  зірки з вершинами  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, l$ , є прямолінійними відрізками. Нехай  $b_1^\varepsilon, \dots, b_l^\varepsilon$  – точки перетину ребер графа  $\Gamma$  із сферою радіуса  $\varepsilon$  і центром в точці  $a$ . Якщо  $\varepsilon$  достатньо мале додатне число, то сфера перетинає усі ребра. Через  $\Gamma_\varepsilon$  позначимо підрозбиття графа  $\Gamma$ , яке містить нові вершини  $b_j^\varepsilon$ ,  $j = 1, \dots, l$ , а через  $S_\varepsilon$  – граф, вирізаний сферою з  $\Gamma$  (див. рис. 1). Зрозуміло, що  $S_\varepsilon$  – зірковий підграф  $\Gamma_\varepsilon$  з вершинами  $a, b_1^\varepsilon, \dots, b_l^\varepsilon$  та ребрами  $(a, b_1^\varepsilon), \dots, (a, b_l^\varepsilon)$ .

Розглядаючи граф  $\Gamma$  як геометричну модель пучка струн, скріплених в одній точці, введемо лінійну густину  $\rho$  струн. Функція  $\rho$  належить класу  $C\{\Gamma\}$  і є додатною на ребрах. Цю густину збуримо на підграфі  $S_\varepsilon$ , моделюючи стосунково важке кріплення струн. Нехай функція  $q_\varepsilon \in C^\infty\{\Gamma\}$  додатна на ребрах графа  $S_\varepsilon$  і дорівнює нулеві в решті точок  $\Gamma_\varepsilon$ . У фізичній моделі не передбачено приєднаних мас у вершинах, тому припускаємо, що  $\rho$  і  $q_\varepsilon$  дорівнюють нулеві у всіх вершинах  $\Gamma_\varepsilon$ . Для кожного  $\varepsilon > 0$  уведемо збурену густину системи

$$\rho_\varepsilon(x) = \rho(x) + \varepsilon^{-2}q_\varepsilon(x), \quad x \in \Gamma_\varepsilon.$$

Параметр  $\varepsilon$  є відношенням характерних лінійних розмірів кріплення та довжини струн і вважається достатньо малим. Коли  $\varepsilon$  прямує до нуля, в околі вершини  $a$  концентрується велика маса, причому відношення усереднених густин струн та кріплення має порядок  $\varepsilon^{-2}$ .

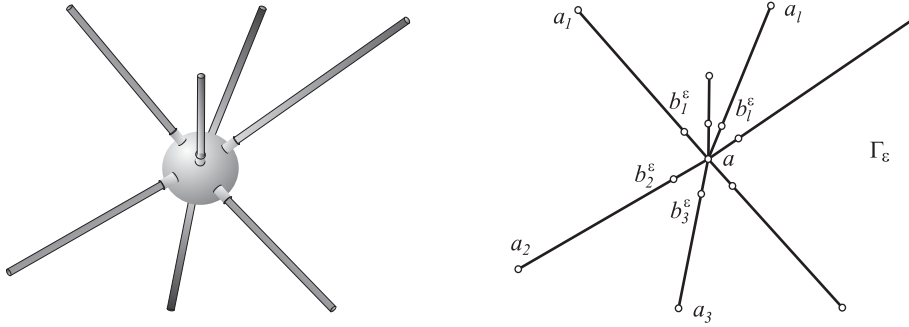


Рис. 1. Приклад струнної конструкції (фізичної моделі) та її реалізації за допомогою геометричного графа (геометричної моделі)

Ми вивчатимемо поведінку при  $\varepsilon \rightarrow 0$  власних значень і власних підпросторів спектральної задачі

$$\frac{d}{d\Gamma_\varepsilon} u'_\varepsilon + \lambda^\varepsilon \rho_\varepsilon u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \Gamma_\varepsilon, \quad u_\varepsilon = 0 \quad \text{на } \partial\Gamma_\varepsilon, \quad (5)$$

де  $\lambda^\varepsilon$  – спектральний параметр;  $u_\varepsilon$  – власна функція. Вважаємо, що  $u_\varepsilon$  належить до класу  $C^2(\Gamma_\varepsilon)$ . Тут  $\partial\Gamma_\varepsilon = \{a_1, \dots, a_l\}$  – множина кінцевих точок графа  $\Gamma_\varepsilon$ .

Конкретизуємо залежність збурення  $q_\varepsilon$  від малого параметра. Нехай  $S$  – образ в  $\mathbb{R}_\xi^3$  графа  $S_\varepsilon$  при афінному відображенні  $\xi = (x - a)/\varepsilon$ . Граф  $S$  є зірковим і його реалізація не залежить від  $\varepsilon$ : образом вершини  $a$  є початок координат  $O$  простору  $\mathbb{R}_\xi^3$ , а вершини  $b_j^\varepsilon$  відображаються у фіксовані точки  $b_j$ . Введемо позначення  $\zeta_j = (O, b_j)$  для ребер графа  $S$ . Нехай  $q$  – функція класу  $C\{S\}$ , додатна на ребрах і з нульовими значеннями у вершинах. Приймемо

$$q_\varepsilon(x) = \begin{cases} q\left(\frac{x-a}{\varepsilon}\right), & \text{коли } x \in S_\varepsilon, \\ 0, & \text{коли } x \in \Gamma_\varepsilon \setminus S_\varepsilon, \end{cases}$$

для всіх додатних  $\varepsilon$ .

Спектр задачі (5) дискретний і додатний для кожного  $\varepsilon > 0$ . З основами спектральної теорії для диференціальних операторів другого порядку на компактних геометричних графах можна ознайомитися в монографії [1]. Нехай

$$\lambda_1^\varepsilon \leq \lambda_2^\varepsilon \leq \dots \leq \lambda_k^\varepsilon \leq \dots$$

– власні значення задачі (5), занумеровані з врахуванням кратності, скінченної для кожного власного значення. Відповідні власні функції позначатимемо через  $u_{\varepsilon,k}$ . В [3] доведено, що перше власне значення  $\lambda_1^\varepsilon$  прямує до нуля і має асимптотику

$$\lambda_1^\varepsilon = \varepsilon \left( \int_S q dS \right)^{-1} \sum_{j=1}^l \frac{1}{|\gamma_j|} + O(\varepsilon^{3/2}), \quad \varepsilon \rightarrow 0,$$

де  $|\gamma_j|$  – довжина ребра  $\gamma_j$ . Решта власних значень відокремлені від нуля при  $\varepsilon \rightarrow 0$  [3, лема 5]. Асимптотика саме цих власних значень є предметом дослідження нашої статті.

**3. Асимптотика спектра та граничний оператор.** Позначимо через  $\lambda^\varepsilon$  одне з власних значень  $\lambda_k^\varepsilon$ ,  $k > 1$ , яке не прямує до нуля, а через  $u_\varepsilon$  – відповідну власну функцію. Шукатимемо їхні асимптотики у вигляді

$$\lambda^\varepsilon \sim \lambda + \varepsilon\lambda_1 + \dots, \quad u_\varepsilon \sim \begin{cases} u(x) + \varepsilon u_1(x) + \dots, & x \in \Gamma_\varepsilon \setminus S_\varepsilon, \\ v(\varepsilon^{-1}(x-a)) + \varepsilon v_1(\varepsilon^{-1}(x-a)) + \dots, & x \in S_\varepsilon. \end{cases} \quad (6)$$

Підставимо ці ряди в задачу (5). Оскільки  $\rho_\varepsilon = \rho$  на множині  $\Gamma_\varepsilon \setminus S_\varepsilon$ , то функція  $u$  буде розв'язком рівняння

$$u'' + \lambda\rho(x)u = 0, \quad x \in \dot{\Gamma},$$

і задовольнятиме крайові умови

$$u = 0, \quad x \in \partial\Gamma.$$

Умови, яким функція  $u$  підпорядкована у вершині  $a$ , з'ясуємо нижче.

Рівняння (5) на ребрах графа  $S \subset \mathbb{R}_\xi^3$  набуває вигляду

$$\varepsilon^{-2} \frac{d^2 u_\varepsilon}{d\xi^2} + \lambda^\varepsilon (\rho(a + \varepsilon\xi) + \varepsilon^{-2} q(\xi)) u_\varepsilon = 0, \quad \xi \in \dot{S}.$$

Сингулярні доданки порядку  $\varepsilon^{-2}$  диктують рівняння для головного члена асимптотики на  $S_\varepsilon$

$$v'' + \lambda q(\xi)v = 0, \quad \xi \in \dot{S}. \quad (7)$$

Крім того, функція  $v$  є неперервною у вершині  $O$  зірки  $S$  і задовольняє умови Кірхгофа

$$v_{\zeta_1}(O) = v_{\zeta_2}(O) = \dots = v_{\zeta_l}(O), \quad \sum_{j=1}^l \frac{dv}{d\zeta_j}(O) = 0. \quad (8)$$

Власна функція  $u_\varepsilon$  неперервно диференційовна в класичному сенсі у вершинах  $b_j^\varepsilon$  степеня 2, тому

$$\begin{aligned} u_{\gamma_j}(b_j^\varepsilon) + \varepsilon u_{1,\gamma_j}(b_j^\varepsilon) + \dots &\sim v_{\zeta_j}(b_j) + \varepsilon v_{1,\zeta_j}(b_j) + \dots, \\ \left( \varepsilon^{-1} \frac{dv}{d\zeta_j}(b_j) + \frac{dv_1}{d\zeta_j}(b_j) + \dots \right) &+ \left( \frac{du}{d\gamma_j}(b_j^\varepsilon) + \varepsilon \frac{du_1}{d\gamma_j}(b_j^\varepsilon) + \dots \right) \sim 0 \end{aligned}$$

Звідси для всіх  $j = 1, \dots, l$  одержуємо

$$u_{\gamma_j}(a) = v_{\zeta_j}(b_j), \quad (9)$$

$$\frac{dv}{d\zeta_j}(b_j) = 0, \quad (10)$$

бо  $b_j^\varepsilon \rightarrow a$  в метриці простору  $\mathbb{R}^3$ . Скориставшись позначенням (3), рівності (7), (8) та (10) можна зінтегрувати в одне рівняння

$$\frac{d}{dS} v' + \lambda qv = 0$$

на графі  $S$  “без межі” ( $\partial S = \emptyset$ ). У цьому записі враховано, що густина  $q$  дорівнює нулю у всіх вершинах  $S$ .

Введемо відображення  $\ell_a: C(\Gamma) \rightarrow \mathbb{C}^l$  та  $\ell^b: C(S) \rightarrow \mathbb{C}^l$  за формулами

$$\ell_a(f) = (f_{\gamma_1}(a), \dots, f_{\gamma_l}(a)), \quad \ell^b(f) = (f_{\zeta_1}(b_1), \dots, f_{\zeta_l}(b_l)).$$

Тоді умови (9) можна записати як  $\ell_a(u) = \ell^b(v)$ , а задача на головні члени рядів (6) набуває вигляду

$$\begin{cases} u'' + \lambda\rho(x)u = 0, & x \in \dot{\Gamma}, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Gamma, \\ \frac{d}{dS}v' + \lambda q(\xi)v = 0, & \xi \in S, \\ \ell_a(u) = \ell^b(v). \end{cases} \quad (11)$$

Цю задачу називатимемо *граничною*.

Побудуємо оператор, асоційований із задачею (11). Нехай  $L^2(\rho, \Gamma)$  і  $L^2(q, S)$  – вагові простори Лебега. Введемо в цих просторах оператори

$$T_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{d^2}{dx^2}, \quad D(T_1) = \{u \in W_2^2\{\Gamma\} : u = 0 \text{ на } \partial\Gamma\};$$

$$T_2 = -\frac{1}{q} \frac{d^2}{d\xi^2}, \quad D(T_2) = \left\{v \in W_2^2(S) : \sum_{k=1}^l \frac{dv}{d\zeta_k}(O) = 0, \frac{dv}{d\zeta_j}(b_j) = 0, j = 1, \dots, l\right\},$$

відповідно. В просторі  $\mathcal{L} = L^2(\rho, \Gamma) \oplus L^2(q, S)$  розглянемо матричний оператор

$$T = \begin{pmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{pmatrix}, \quad D(T) = \{(f_1, f_2) \in D(T_1) \oplus D(T_2) : \ell_a(f_1) = \ell^b(f_2)\}.$$

Тоді задача (11) еквівалентна операторному рівнянню  $Tw = \lambda w$ , де  $w = (u(x), v(\xi))$ .

Побудуємо спряжений оператор  $T^*$ . Нехай  $w \in D(T)$  і  $z \in W_2^2\{\Gamma\} \oplus W_2^2\{S\}$ , причому  $w = (u, v)$  і  $z = (\varphi, \psi)$ . Скориставшись формулою (4), отримаємо

$$\begin{aligned} (Tw, z)_{\mathcal{L}} &= \int_{\Gamma} u'' \overline{\varphi} d\Gamma + \int_S v'' \overline{\psi} dS = \sum_{k=1}^l \left( u_{\gamma_k}(a_k) \overline{\frac{d\varphi}{d\gamma_k}}(a_k) - \frac{du}{d\gamma_k}(a_k) \overline{\varphi_{\gamma_k}}(a_k) \right) + \\ &+ u_{\gamma_k}(a) \overline{\frac{d\varphi}{d\gamma_k}}(a) - \frac{du}{d\gamma_k}(a) \overline{\varphi_{\gamma_k}}(a) + \sum_{k=1}^l \left( v_{\zeta_k}(b_k) \overline{\frac{d\psi}{d\zeta_k}}(b_k) - \frac{dv}{d\zeta_k}(b_k) \overline{\psi_{\zeta_k}}(b_k) \right) + \\ &+ v_{\zeta_k}(O) \overline{\frac{d\psi}{d\zeta_k}}(O) - \frac{dv}{d\zeta_k}(O) \overline{\psi_{\zeta_k}}(O) + \int_{\Gamma} u \overline{\varphi''} d\Gamma + \int_S v \overline{\psi''} dS. \end{aligned}$$

Тепер врахуємо умови, накладені на вектор  $w$ , зокрема, залежність між похідними

$$\frac{dv}{d\zeta_l}(O) = -\sum_{k=1}^{l-1} \frac{dv}{d\zeta_k}(O). \text{ Тоді остання рівність набуде вигляду}$$

$$\begin{aligned} (Tw, z)_{\mathcal{L}} &= -\sum_{k=1}^l \left( \frac{du}{d\gamma_k}(a_k) \overline{\varphi_{\gamma_k}}(a_k) + \frac{du}{d\gamma_k}(a) \overline{\varphi_{\gamma_k}}(a) \right) + \sum_{k=1}^l u_{\gamma_k}(a) \left( \overline{\frac{d\varphi}{d\gamma_k}}(a) + \overline{\frac{d\psi}{d\zeta_k}}(b_k) \right) - \\ &- \sum_{k=1}^{l-1} \frac{dv}{d\zeta_k}(O) (\overline{\psi_{\zeta_k}}(O) - \overline{\psi_{\zeta_l}}(O)) + v(O) \sum_{k=1}^l \overline{\frac{d\psi}{d\zeta_k}}(O) + \int_{\Gamma} u \overline{\varphi''} d\Gamma + \int_S v \overline{\psi''} dS. \end{aligned}$$

Отже, позаінтегральні доданки зникають при всіх  $w \in D(T)$  тоді і лише тоді, коли

$$\varphi_{\gamma_k}(a_k) = 0, \quad \varphi_{\gamma_k}(a) = 0, \quad \frac{d\varphi}{d\gamma_k}(a) + \frac{d\psi}{d\zeta_k}(b_k) = 0$$



для всіх  $k = 1, \dots, l$ , а також

$$\psi_{\zeta_1}(O) = \psi_{\zeta_2}(O) = \dots = \psi_{\zeta_l}(O), \quad \sum_{k=1}^l \frac{d\psi}{d\zeta_k}(O) = 0.$$

Ці умови характеризують область визначення спряженого оператора. А саме

$$T^* = \begin{pmatrix} \hat{T}_1 & 0 \\ 0 & \hat{T}_2 \end{pmatrix},$$

$$D(T^*) = \{z = (\varphi, \psi) \in D(\hat{T}_1) \oplus D(\hat{T}_2) : \frac{d\varphi}{d\gamma_k}(a) + \frac{d\psi}{d\zeta_k}(b_k) = 0, k = 1, \dots, l\},$$

де  $\hat{T}_1$  – звуження оператора  $T_1$  на  $D(\hat{T}_1) = \{u \in D(T_1) \cap C(\Gamma) : u(a) = 0\}$ , а  $\hat{T}_2$  – розширення оператора  $T_2$  на  $D(\hat{T}_2) = \{v \in W_2^2(S) : \sum_{k=1}^l \frac{dv}{d\zeta_k}(O) = 0\}$ .

Отже, ми довели, що в просторі  $\mathcal{L}$  оператор  $T$  несамопряжений. Далі доведемо, що цей оператор може мати приєднані вектори. В цьому випадку в будь-якому іншому гільбертовому просторі гранична задача теж буде асоційована з несамопряженим оператором.

**4. Спектр граничного оператора.** Через  $\sigma(B)$  і  $\rho(B)$  позначатимемо відповідно спектр і резольвентну множину оператора  $B$ , а через  $R_\mu(B) = (B - \mu E)^{-1}$  – резольвенту цього оператора. Опишемо структуру спектра граничного оператора.

**Теорема 1.** *Спектр оператора  $T$  дійсний, дискретний і збігається з множиною  $\sigma(\hat{T}_1) \cup \sigma(T_2)$ .*

*Доведення.* Спершу зауважимо, що оператори  $\hat{T}_1$  і  $T_2$  є самоспряженими в просторах  $L^2(\rho, \Gamma)$  і  $L^2(q, S)$  відповідно, а їхні резольвенти  $R_\lambda(\hat{T}_1)$  і  $R_\lambda(T_2)$  компактні.

Побудуємо резольвенту оператора  $T$ . Розглянемо рівняння

$$(T - \lambda E)w = f \tag{12}$$

для довільного  $f \in \mathcal{L}$ , або ж розгорнуто

$$\begin{cases} (T_1 - \lambda E)w_1 = f_1, \\ (T_2 - \lambda E)w_2 = f_2, \\ \ell_a(w_1) = \ell^b(w_2), \end{cases}$$

де  $w = (w_1, w_2)$  і  $f = (f_1, f_2)$ .

Припустимо, що  $\lambda$  належить резольвентній множині  $\rho(T_2)$ . Тоді  $w_2 = R_\lambda(T_2)f_2$ . Функцію  $w_1$  шукатимемо у вигляді суми  $w_1 = y + z$ , де

$$(\hat{T}_1 - \lambda E)y = f_1, \quad \begin{cases} (T_1 - \lambda E)z = 0, \\ \ell_a(z) = \ell^b(w_2). \end{cases}$$

Якщо  $\lambda$  лежить поза спектром оператора  $\hat{T}_1$ , то  $y = R_\lambda(\hat{T}_1)f_1$ . Крім того, тоді коректно визначений оператор  $H_\lambda : W_2^2(S) \rightarrow W_2^2\{\Gamma\}$ , що діє за таким правилом. Кожній функції  $v \in W_2^2(S)$  поставимо у відповідність вектор  $\ell^b(v) = (v(b_1), \dots, v(b_l))$ . Далі знайдемо розв'язок  $u$  крайової задачі



$l - 1$  рівняння стосовно  $l$  невідомих  $\beta_1, \dots, \beta_l$  завжди має ненульовий розв'язок. Оскільки у вершинах  $b_1, \dots, b_{l-1}$  функція  $v$  задовольняє також умови (10), то вона дорівнює нулеві на всіх ребрах графа  $S$ , за винятком, можливо, ребра  $\zeta_l$ . Справді, на кожному з цих ребер функція  $v$  є розв'язком задачі Коші для рівняння (7) з нульовими умовами Коші. Далі, з умов (8) одержуємо, що  $v_{\zeta_l}(O) = 0$ ,  $\frac{dv}{d\zeta_l}(O) = 0$ . Тому функція  $v$  є нульовою також на ребрі  $\zeta_l$  і, отже, на всьому графі  $\Gamma$ . Отже,  $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_l v_l = 0$  на  $S$  і не всі сталі  $\beta_k$  нульові, а це суперечить лінійній незалежності власних функцій  $v_1, v_2, \dots, v_l$ .

На прикладі рівняння зі сталими коефіцієнтами переконуємося, що доведена нерівність є точною (див. приклад зірки з чотирма ребрами, описаний в [1, с. 34]).  $\square$

**Теорема 2.** Якщо  $\lambda \in \sigma(T) \setminus (\sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2))$ , то

$$k_a(\lambda, T) = k_g(\lambda, T) = \max\{k_a(\lambda, \hat{T}_1), k_a(\lambda, T_2)\}.$$

*Доведення.* Нехай  $n = k_a(\lambda, \hat{T}_1)$  і  $m = k_a(\lambda, T_2)$ . Одне з цих чисел дорівнює нулю, бо  $\lambda \notin \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$ . У випадку  $m = 0$  всі власні вектори оператора  $T$  у векторному просторі  $\mathcal{L}$  мають вигляд  $(u, 0)$ . Тому

$$(u_1, 0), \quad \dots, \quad (u_n, 0) \tag{14}$$

є максимальною системою лінійно незалежних власних векторів оператора  $T$ , де  $\{u_k\}_{k=1}^n$  – база власного підпростору  $V_\lambda(\hat{T}_1)$ . Отже,  $k_a(\lambda, \hat{T}_1) = n$ .

Коли ж  $n = 0$ , то обидві координати власного вектора  $(u, v)$  оператора  $T$  повинні бути відмінними від нуля, в чому легко переконатися. Тоді друга координата  $v$  є власним вектором оператора  $T_2$ . База у власному підпросторі  $V_\lambda(T)$  має вигляд

$$(H_\lambda v_1, v_1), \quad \dots, \quad (H_\lambda v_m, v_m), \tag{15}$$

де  $v_1, \dots, v_m$  – база власного підпростору  $V_\lambda(T_2)$ , а  $H_\lambda$  – оператор, введений у доведенні теореми 1. Отже, ми довели рівність  $k_g(\lambda, T) = \max\{n, m\}$ .

Покажемо, що  $k_a(\lambda, T) = k_g(\lambda, T)$ , тобто, що за умов теореми оператор  $T$  не має приєднаних векторів. Доводячи це від протилежного, припустимо, що існує вектор  $(\hat{u}, \hat{v}) \in \ker(T - \lambda E)^2$ , який є приєднаним до (ненульового) власного вектора  $(u, v)$ , тобто

$$(T_1 - \lambda E)\hat{u} = u, \quad (T_2 - \lambda E)\hat{v} = v, \quad \ell_a(\hat{u}) = \ell^b(\hat{v}); \tag{16}$$

$$(T_1 - \lambda E)u = 0, \quad (T_2 - \lambda E)v = 0, \quad \ell_a(u) = \ell^b(v). \tag{17}$$

Якщо  $\lambda \in \sigma(\hat{T}_1) \setminus \sigma(T_2)$ , то з (17) випливає, що  $v = 0$ , тому  $\hat{v} = 0$  і  $u \neq 0$ . Отже, ненульові вектори  $u$  і  $\hat{u}$  задовольняють рівності  $\ell_a(u) = \ell_a(\hat{u}) = 0$ , тобто  $u$  і  $\hat{u}$  утворюють ланцюжок із власного та приєданого векторів оператора  $\hat{T}_1$ , що є неможливим з огляду на його самоспряженість. Отже,  $\lambda \in \sigma(T_2) \setminus \sigma(\hat{T}_1)$ . Якщо у цьому разі  $v \neq 0$ , то  $v$  і  $\hat{v}$  утворювали б ланцюжок для самоспряженого оператора  $T_2$ , що є неможливим. Тому  $v = 0$ ; тоді вектор  $u$  належить до області визначення оператора  $\hat{T}_1$  і  $(\hat{T}_1 - \lambda E)u = 0$ , що є можливим лише за  $u = 0$ . Це суперечить припущенню про те, що  $(u, v)$  – власний вектор оператора  $T$  і доводить відсутність приєднаних векторів оператора  $T$ .  $\square$

*Зауваження 2.* Зрозуміло, що вектори (14) залишаються власними векторами оператора  $T$  і тоді, коли  $\lambda \in \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$ . Для власних векторів вигляду (15) це не завжди так. Річ у тім, що задача (13), яку розв'язує оператор  $H_\lambda$ , може не мати розв'язку при  $\lambda \in \sigma(T_2)$ .

Розглянемо тепер ситуацію, коли  $\lambda \in \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$ . Вона характерна тим, що загалом  $\ker(T - \lambda E) \neq \ker(T - \lambda E)^2$ , тобто існують приєднані вектори оператора  $T$ . Нехай, як і вище,  $k_a(\lambda, \hat{T}_1) = n$ ,  $k_a(\lambda, T_2) = m$ . Оскільки  $\hat{T}_1$  є прямою сумою  $B_1 \oplus \dots \oplus B_l$  операторів з простим спектром, то  $\lambda$  є власним значенням деяких  $n$  операторів  $B_{j_1}, \dots, B_{j_n}$ , а для решти є точкою резольвентної множини. Введемо множину  $J_\lambda = \{j: \lambda \in \sigma(B_j)\}$  індексів тих операторів  $B_j$ , для яких  $\lambda$  є власним значенням. За лемою 1 множина  $J_\lambda$  може містити від нуля до  $l$  елементів. Введемо також підпростір  $W_\lambda(T_2) = \{v \in V_\lambda(T_2): v(b_j) = 0 \text{ для всіх } j \in J_\lambda\}$ . З доведення леми 2 випливає, що власні функції з підпростору  $W_\lambda(T_2)$  дорівнюють нулю на всіх ребрах  $\zeta_j$  з номерами  $j \in J_\lambda$ .

**Теорема 3.** *Нехай  $\lambda \in \sigma(\hat{T}_1) \cap \sigma(T_2)$ . Тоді геометрична кратність власного значення  $\lambda$  оператора  $T$  обчислюється за формулою*

$$k_g(\lambda, T) = k_a(\lambda, \hat{T}_1) + \dim W_\lambda(T_2).$$

*Крім того,*

$$k_g(\lambda, T) \geq \max\{k_a(\lambda, \hat{T}_1), k_a(\lambda, T_2)\}. \quad (18)$$

*Доведення.* Нехай  $k_a(\lambda, \hat{T}_1) = n$ ,  $k_a(\lambda, T_2) = m$  та  $\dim W_\lambda(T_2) = s$ . Нам треба підрахувати кількість лінійно незалежних власних векторів оператора  $T$ , що відповідають власному значенню  $\lambda$ . Згідно з зауваженням 2 оператор  $T$  і в цьому випадку має  $n$  лінійно незалежних власних векторів вигляду (14).

З доведення теорем 1, 2 легко зробити висновок, що оператор  $T$  може ще мати власні вектори  $(u, v)$  з ненульовою другою компонентою, де  $v$  – власний вектор оператора  $T_2$ ;  $u$  – відповідний розв'язок задачі (13). Ця задача рівносильна системі  $l$  крайових задач на ребрах

$$u''_{\gamma_j} + \lambda \rho u_{\gamma_j} = 0 \text{ на } \gamma_j, \quad u_{\gamma_j}(a_j) = 0, \quad u_{\gamma_j}(a) = v(b_j),$$

де  $j = 1, \dots, l$ . Кожна з них має розв'язок у випадках, коли  $\lambda \notin \sigma(B_j)$ , або ж коли  $\lambda \in \sigma(B_j)$ , але  $v(b_j) = 0$ . Тому задача (13) має розв'язок для таких і лише таких  $v$ , для яких  $v(b_j) = 0$  при всіх  $j \in J_\lambda$ , тобто для векторів з підпростору  $W_\lambda(T_2)$ . Тому оператор  $T$  має ще  $s$  власних векторів вигляду

$$(\tilde{u}_1, v_1), \quad \dots, \quad (\tilde{u}_s, v_s),$$

де  $v_1, \dots, v_s$  – база в  $W_\lambda(T_2)$ ;  $\tilde{u}_k$  – розв'язок задачі (13) при  $v = v_k$ . Очевидно, що вони лінійно незалежні з векторами (14) і разом з ними формують базу

$$(u_1, 0), \quad \dots, \quad (u_n, 0), \quad (\tilde{u}_1, v_1), \quad \dots, \quad (\tilde{u}_s, v_s)$$

у власному підпросторі  $\ker(T - \lambda E)$ .

Доведемо нерівність (18), яку можна записати так:  $k_g(\lambda, T) \geq \max\{n, m\}$ . Якщо  $n \geq m$ , то нерівність справджується, бо існує принаймні  $n$  власних векторів вигляду



Ці умови здобудемо домноженням кожного диференціального рівняння на відповідну власну функцію та інтегруванням частинами одержаної рівності. Решта  $l - n$  задач мають єдиний розв'язок без будь-яких додаткових умов.

Нехай  $V_\lambda(T_2) = W_\lambda(T_2) \oplus \mathcal{M}$ . Якщо функція  $\hat{v}$  належить підпростору  $W_\lambda(T_2)$ , то  $\hat{v}(b_1) = \dots = \hat{v}(b_n) = 0$  і з умов (22) маємо  $\alpha_1 = \dots = \alpha_n = 0$ , що суперечить припущенню. Для кожної ж власної функції  $\hat{v}$  з  $\mathcal{M}$  система (21) має розв'язок за сталих  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , визначених рівностями (22). Уведемо лінійне відображення  $\pi: \mathcal{M} \rightarrow V_\lambda(\hat{T}_1)$ , яке діє за правилом

$$\pi(\hat{v}) = \hat{v}(b_1) \frac{du_1}{d\gamma_1}(a) u_1 + \dots + \hat{v}(b_n) \frac{du_n}{d\gamma_n}(a) u_n.$$

З (20) безпосередньо одержуємо, що  $\ker \pi = 0$ . Крім того,  $\dim \mathcal{M} \leq \dim V_\lambda(\hat{T}_1)$ . Справді, за припущенням  $\dim \mathcal{M} = m - s$  і  $\dim V_\lambda(\hat{T}_1) = n$ . З нерівності (18) маємо  $n + s \geq \max\{n, m\} \geq m$ , тому  $m - s \leq n$ . З ін'єктивності відображення  $\pi$  випливає існування  $m - s$  лінійно незалежних власних функцій  $(U_1, 0), \dots, (U_{m-s}, 0)$  оператора  $T$ , яким відповідають приєднані вектори  $(\hat{u}_1, \hat{v}_1), \dots, (\hat{u}_{m-s}, \hat{v}_{m-s})$ . Отже,  $\dim \ker(T - \lambda E)^2 = k_g(\lambda, T) + m - s = n + s + m - s = n + m$ .

Залишилось зауважити, що ланцюгів довжини 3 в жордановій структурі кореневих просторів оператора  $T$  немає. Кожна з систем

$$(T_1 - \lambda E)u = \hat{u}_k, \quad (T_2 - \lambda E)v = \hat{v}_k, \quad \ell_a(u) = \ell^b(v),$$

де  $k = 1, \dots, m - s$ , є несумісною. Причиною несумісності є друге рівняння, в правій частині якого є власний вектор  $\hat{v}_k$  оператора  $T_2$ .  $\square$

З лем 1, 2 випливає твердження

**Наслідок 1.** Алгебрична кратність власного значення  $\lambda$  оператора  $T$  не перевищує  $2l - 1$ , де  $l$  – кількість ребер графа  $\Gamma$ .

- 
1. Покорний Ю.В. Дифференциальные уравнения на геометрических графах / Покорный Ю.В., Пенкин О.М., Прядиев В.Л., Боровских А.В., Лазарев К.П., Шабров С.А. – М., 2004.
  2. Kuchment P. Graphs models of wave propagation in thin structures / Kuchment P. // Waves in Random Media. – 2002. – Vol. 12, №4. – P. 1-24.
  3. Головатий Ю.Д. Асимптотика спектра задачі Штурма-Ліувілья на геометричному графі із збуренням густини в околі вузлів / Головатий Ю.Д., Грабчак Г.Є. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип.67. – С. 66-83.
  4. Oleinik O.A. Homogenization problems in elasticity. Spectrum of singularly perturbed operators / Oleinik O.A. // Non-classical continuum mechanics. – 1987. – Lecture Notes series, 122. Cambridge University Press. – P. 188-205.
  5. Олейник О.А. О собственных колебаниях тел с концентрированными массами / Олейник О.А. // Современные проблемы прикладной мат. и мат. физики. – 1988. – С. 101-128.
  6. Головатий Ю.Д. О собственных колебаниях струны с присоединенной массой / Головатий Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А., Соболева Т.С. // Сиб. мат. журн. – 1988. – Т. 29, №5. – С. 71-91.
  7. Головатий Ю.Д. Спектральные свойства колебательных систем с присоединенными массами / Головатий Ю.Д. // Труды Моск. мат. об-ва. – 1992. – Т. 54. – С. 29-72.

8. *Mercier D.* Spectrum of a network of beams with interior point masses / *Mercier D., Régnier V.* – Prepublications. Laboratoire de Math. et de leurs Appl., 2006. ([www.univ-valenciennes.fr/lamav/preprints/lamav-06.13.pdf](http://www.univ-valenciennes.fr/lamav/preprints/lamav-06.13.pdf))
9. Головатий Ю.Д. Асимптотическое разложение собственных значений и собственных функций задач о колебаниях среды с концентрированными возмущениями / Головатий Ю.Д., Назаров С.А., Олейник О.А. // Труды Мат. ин-та им. В.А. Стеклова. – 1990. – Т. 192. – С. 42-60.
10. *Mel'nyk T.A.* Vibrations of a thick periodic junction with concentrated masses / *Mel'nyk T.A.* // *Math. Models Meth. Appl. Sci.* – 2001. – Vol. 11, №6. – P. 1001–1029.
11. Грабчак Г.Є. Спектральна задача Неймана для системи рівнянь лінійної теорії пружності із сингулярним збуренням густини / Грабчак Г.Є. // Вісн. Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 1996. – Вип.45. – С. 124-140.
12. *Lobo M.* Local problems for vibrating systems with concentrated masses: a review / *Lobo M., Pérez M.E.* // *C. R. Mecanique.* – 2003. – Vol. 331. – P. 303-317.
13. *Babych N.* Asymptotic analysis of a vibrating system containing stiff-heavy and flexible-light parts / *Babych N., Golovaty Yu.* // Нелинейные граничные задачи. – 2008. – Т. 18. – С. 194-217.

## ON STURM-LIOUVILLE PROBLEM ON STARLIKE GRAPHS WITH “HEAVY” NODES

**Yurij GOLOVATY, Hennadij HRABCHAK**

*Ivan Franko National University of L'viv,  
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1  
e-mail: [yu\\_holovaty@franko.lviv.ua](mailto:yu_holovaty@franko.lviv.ua), [h\\_hrabchak@franko.lviv.ua](mailto:h_hrabchak@franko.lviv.ua)*

We consider a singular perturbed spectral problem for a second order differential operator on a starlike geometrical graph. It models eigenoscillations of a bundle of flexible strings connecting by heavy node. We study the spectral properties of the corresponding limit problem. The case of the mass density perturbation such that this problem may be nonself-adjoint is considered. The structures of the spectrum and of the root spaces of the limit problem are investigated. The systems of its eigenfunctions and of its adjointed functions are constructed. The geometrical and algebraic multiplicity of eigenvalues is analyzed.

*Key words:* differential equations on graphs, singular perturbation, adjoint mass, spectrum, eigenvalue, eigenvector, adjointed vector, asymptotic expansion.

**О ЗАДАЧЕ ШТУРМА-ЛИУВИЛЛЯ НА ЗВЕЗДНЫХ ГРАФАХ  
С “ТЯЖЕЛЫМИ” УЗЛАМИ****Юрий ГОЛОВАТИЙ, Геннадий ГРАБЧАК**

*Львовский национальный университет имени Ивана Франко,  
79000 Львов, ул. Университетская, 1  
e-mail: yu\_holovaty@franko.lviv.ua, h\_hrabchak@franko.lviv.ua*

Изучены спектральные свойства предельной задачи для сингулярно возмущенной задачи на звездном графе, моделирующей собственные колебания пучка струн с возмущением плотности в окрестности точки их соединения. Рассмотрен случай силы возмущения, при котором предельная задача может быть несамоспряженной. Изучены структуры ее спектра и корневых подпространств, построены системы собственных и присоединенных функций, исследованы вопросы геометрической и алгебраической кратностей собственных значений.

*Ключевые слова:* дифференциальные уравнения на графах, сингулярное возмущение, присоединенная масса, спектр, собственное значение, собственный вектор, присоединенный вектор, асимптотика.

Стаття надійшла до редколегії 18.11.2009

Після остаточної правки 01.07.2010

Прийнята до друку 22.12.2010