ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2010.
Вип. 72. С. 47–62

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2010.
Is. 72. P. 47–62

УДК 517.574

ІНТЕГРАЛЬНІ СЕРЕДНІ ФУНКЦІЙ, СПРЯЖЕНИХ ДО СУБГАРМОНІЙНИХ ФУНКЦІЙ

Ярослав ВАСИЛЬКІВ, Любомир ПОЛІТИЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: YaVVasylkiv@gmail.com, Ljupol7@gmail.com

Для пари функцій $\mathcal{F}(z) := u(z) + i\breve{u}(z)$, де $u(z)$ – субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція, гармонійна в деякому околі точки $z = 0$, $u(0) = 0$, а $\breve{u}(z)$ – спряжена до $u(z)$, в термінах неванліннової характеристики $T(r, u)$ задано оцінки модулів коефіцієнтів Фур'є $|c_k(r, \mathcal{F})|$, $0 < r < +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$; знайдено неполіпшувані оцінки q-х інтегральних лебегових середніх $m_q(r, \mathcal{F})$, $0 < r < +\infty$, $1 \leqslant q < +\infty$; оцінено q-ті інтегральні модулі неперервності таких функцій $\mathcal{F}$.

Ключові слова: субгармонійна функція, спряжена функція до субгармонійної функції, метод рядів Фур'є, коефіцієнти Фур'є, лебегові інтегральні середні.

1. Вступ. В теорії цілих і мероморфних функцій лебегові інтегральні середні їхніх логарифмів модуля $m_q(r, \log|f|)$ $(q \geqslant 1)$ відіграють важливу роль. В [1] (див. також [2], [3]) в термінах $m_q(r, \log|f|)$ $(q \geqslant 1)$ подано критерії належності мероморфних функцій f до класів мероморфних функцій скінченного λ-типу.

Д. Майлз і Д. Шей [4] знайшли у певному сенсі неполіпшувану оцінку зверху квадратичних середніх $m_2(r, \log|f|)$ мероморфних в $\mathbb{C}$ функцій f в термінах їхньої неванліннової характеристики $T(r, f)$

$$m_2(r, \log|f|) \leqslant T(R, f)\left\{1 + \frac{8\sqrt{2}}{\sqrt{\log(R/r)}}\right\}, \qquad 0 < r < R. \tag{1}$$

Цю оцінку Л. Сонс в [5] застосувала до вивчення розподілу нулів аналітичних функцій в одиничному крузі. Крім того, Д. Майлз і Д. Шей [4] зазначили, що з (1) випливає таке: для довільного $\alpha > 1/2$ (але не для $\alpha = 1/2$)

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{m_2(r, \log|f|)}{T(r, f)\{\log T(r, f)\}^{\alpha}} = 0.$$

Для цілих функцій $f(z) \not\equiv \text{const}$ і $\alpha > 1$ (але не для $\alpha = 1$) правильною є асимптотична рівність (див. [6], теорема 1.8)

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{\log M(r,f)}{T(r,f)\{\log T(r,f)\}^{\alpha}} = 0.$$

Якщо ж $f(z) \neq 0$ в $\mathbb{C}$, то теорема 1.8 з [6] залишається правильною при $\alpha > 1/2$.

Зростання відношень характеристик $T(r,f)$ і $\log M(r,f)$ для цілих функцій нескінченного порядку досліджували в [7], [8], [9]. Зокрема, в [8] доведено таке: якщо $\varphi(x)$ зростаюча додатна функція при $x \geq x_0 > 0$ така, що

$$\int\limits_{x_0}^{+\infty} \frac{dx}{\varphi(x)} < +\infty,$$

то

$$\liminf_{r\to+\infty} \frac{\log M(r,f)}{T(r,f)\varphi(\log T(r,f))} = 0.$$

В [9] доведено, що

$$\log M(r,f) = o(T(r,f)\varphi(\log T(r,f))) \tag{2}$$

при $r \to +\infty$ зовні множини логарифмічної щільності нуль.

В [10] доведено, що для кожної необмеженої зверху субгармонійної функції u в $\mathbb{R}^m$, $m \geqslant 2$, при $1 \leqslant q \leqslant +\infty$ і будь-яких $\alpha > (m-1)/q'$, $1/q + 1/q' = 1$, виконується

$$\lim_{E\not\ni r\to+\infty} \frac{m_q(r,u^+)}{T(r,u)\{\log T(r,u)\}^{\alpha}} = 0,$$

де E – множина скінченної логарифмічної міри. У цьому разі сталу $(m-1)/q'$ не можна замінити на меншу. Якщо ж w – δ-субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція, $w(0) = 0$, $1 \leqslant q < +\infty$, то для будь-якого $\alpha > 1/q'$ виконується ([11])

$$\lim_{E\not\ni r\to+\infty} \frac{m_q(r,w)}{T(r,w)\{\log T(r,w)\}^{\alpha}} = 0.$$

Тут E – множина скінченної логарифмічної міри.

У [12] на підставі методу рядів Фур'є для повного логарифма мероморфної в $\mathbb{C}$ функції f в термінах неванліннової характеристики $T(r,f)$ знайдено неполіпшувані оцінки інтегральних середніх $m_q(r, \log f)$, $(1 \leqslant q < +\infty)$ і подано оцінки інтегральних модулів неперервності повних логарифмів таких функцій.

В цій статті, ґрунтуючись на результатах [13], результати з [4], [10], [11], [12] поширено й уточнено на випадок функцій $\mathcal{F} = u + i\breve{u}$, де u – довільна субгармонійна в $\mathbb{C}$ функція, гармонійна в деякому околі нуля, $u(0) = 0$, а $\breve{u}$ – спряжена до u функція. Оцінки ми подаємо в термінах функцій $T((1+\varepsilon(r))^2 r, u)$, де $T(r,u)$ – неванліннова характеристика u, а $\varepsilon(r)$ – довільна незростаюча на $(0,+\infty)$ функція, $0 < \varepsilon(r) \leqslant 1$ і $\varepsilon(0) = 1$, що, на наш погляд, є суттєвим, коли функція $T(r,u)$ має нескінченний порядок у розумінні Пойя (див. [14]).

2. Означення та допоміжні твердження. У [13] введено поняття функції $\breve{u}$, спряженої до субгармонійної функції u в зірковій стосовно початку координат області; знайдено зображення та вивчено деякі властивості таких функцій, зокрема, показано, що у випадку, коли $u = \log|f|$, f – голоморфна, спряжена $\breve{u}$ до u є деякою гілкою $\operatorname{Arg} f$.

Якщо $z \in \mathbb{C},\ a \neq 0,\ t \geqslant 1$, то приймемо

$$l(z,a) = \begin{cases} \int_0^z (\zeta - a)^{-1} d\,\zeta, & z \neq ta; \\ \log\left|1 - \dfrac{z}{a}\right| + i\,\pi, & z = ta. \end{cases}$$

Нагадаємо, що множина G в $\mathbb{C}$ називається зірковою множиною стосовно початку координат, якщо разом з точкою z вона містить відрізок $[0,z] \subset \mathbb{C}$. Через E^o позначатимемо внутрішність множини E.

Нехай u субгармонійна функція в області $G,\ \mu[u]$ – її міра Ріса, $0 \notin \operatorname{supp}\,\mu[u]$, де $\operatorname{supp}\,\mu[u]$ – носій міри $\mu[u]$. За теоремою Ріса про зображення (див., наприклад, [15]) для довільної компактної підмножини $K \subset G$ з непорожньою внутрішністю K^o і довільної точки $z \in K^o$, виконується

$$u(z) = h_K(z) + \int\limits_K \log\left|1 - \frac{z}{a}\right|\, d\,\mu_a[u],$$

де функція h_K гармонійна в K^o.

Означення 1. *Нехай G – зіркова область в $\mathbb{C}$, u – субгармонійна в G функція, $u(0) = 0,\ 0 \notin \operatorname{supp}\,\mu[u]$. Спряжена функція $\breve{u}$ до u в G визначається співвідношенням*

$$\breve{u}(z) = \widetilde{h}_K(z) + \int\limits_K \operatorname{Im}\{l(z,a)\}\, d\mu_a[u],$$

де K – компактна підмножина в G із зірковою внутрішністю K^o, $\widetilde{h}_K$ – гармонійно спряжена до h_K в K^o функція, $\widetilde{h}_K(0) = 0$.

Нехай $\mathbb{D}_t = \{z \in \mathbb{C} : |z| < t\},\ t > 0,\ G = \mathbb{D}_{R_0},\ R_0 \leqslant +\infty$. Для довільних $z,\, a \in \mathbb{D}_R,\ a \neq 0,\ 0 < R < R_0$ приймемо

$$l_R(z,a) = l(z,a) - l(z, R^2/\bar{a}).$$

Нехай u субгармонійна функція в $\mathbb{D}_{R_0},\ u(0) = 0,\ 0 \notin \operatorname{supp}\mu[u],\ 0 < R < R_0$. В [13] доведено таке узагальнення формули Шварца

$$\mathcal{F}(z) := u(z) + i\breve{u}(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} u(Re^{i\theta})\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\, d\,\theta +$$

$$+ \int\limits_{|a| \leqslant R} l_R(z,a)\, d\,\mu_a[u] + \int\limits_{|a| \leqslant R} \log\frac{|a|}{R}\, d\mu_a[u]. \tag{3}$$

Приймемо

$$c_k(r,\mathcal{F}) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-ik\theta}\mathcal{F}(re^{i\theta})\, d\theta, \qquad k \in \mathbb{Z};$$

$$m_q(r,\mathcal{F}) = \left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |\mathcal{F}(re^{i\theta})|^q\, d\theta\right)^{1/q}, \qquad q \geqslant 1;$$

$$T(r,u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u^+(re^{i\theta})\,d\theta,\qquad N(r,u)=\int\limits_0^r\int\limits_{|a|\leqslant t}d\,\mu_a[u]\,\frac{d\,t}{t},\qquad r>0.$$

Правильні такі леми.

Лема 1. [16] *Нехай u – субгармонійна функція в $\mathbb{D}_R$, $0\notin\operatorname{supp}\mu[u]$, $u(0)=0$, $0<r<R$, $k\in\mathbb{N}$. Тоді*

$$c_0(r,u)=N(r,u),\tag{4}$$

$$c_k(r,u)=\frac{1}{2}\gamma_k r^k+\frac{1}{2}\int\limits_0^r\left(\left(\frac{r}{t}\right)^k+\left(\frac{t}{r}\right)^k\right)\frac{n_k(t,u)}{t}\,dt,\tag{5}$$

$$c_{-k}(r,u)=\overline{c_k(r,u)},\tag{6}$$

де

$$c_k(r,u)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-ik\theta}u(re^{i\theta})\,d\,\theta,\ \ n_k(r,u)=\int\limits_{|a|\leqslant r}\left(\frac{\overline{a}}{|a|}\right)^k d\mu_a[u],\ \ \gamma_k=\frac{1}{k!}\frac{d^k}{dz^k}\mathcal{F}(z)\Big|_{z=0}.$$

Лема 2. [13] *Нехай u – субгармонійна функція в $\mathbb{D}_R$, $0\notin\operatorname{supp}\mu[u]$, $u(0)=0$, $0<r<R$, $k\in\mathbb{N}$. Тоді*

$$c_0(r,\mathcal{F})=N(r,u),\tag{7}$$

$$c_k(r,\mathcal{F})=\gamma_k r^k+\int\limits_0^r\left(\frac{r}{t}\right)^k\frac{n_k(t,u)}{t}\,dt,\tag{8}$$

$$c_{-k}(r,\mathcal{F})=\int\limits_0^r\left(\frac{t}{r}\right)^k\frac{n_{-k}(t,u)}{t}\,dt.\tag{9}$$

М. Л. Содін [17] поставив у відповідність довільній субгармонійній функції $u(z)$ функцію

$$q(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(Re^{i\theta})\frac{2\,R\,e^{i\theta}}{(Re^{i\theta}-z)^2}\,d\,\theta+\int\limits_{|a|<R}\frac{R^2-|a|^2}{(z-a)(R^2-\bar{a}z)}d\,\mu_a[u],\quad 0<|z|<R.\tag{10}$$

Зауважимо таке: якщо $u=\log|f|$, де f – ціла функція, то $q=f'/f$.

Лема 3. *Нехай $0<r_1<r_2<R<+\infty$, $\sigma>1$. Нехай також u – субгармонійна функція в $\overline{\mathbb{D}}_{\sigma R}$, $u(0)=0$; $E(t)$ ($t\in[r_1,r_2]$) – вимірна підмножина $[0,2\pi]$, міра якої не перевищує η, $0<\eta\leqslant 2\pi$. Тоді*

$$\int\limits_{r_1}^{r_2}dt\int\limits_{E(t)}|q(te^{i\theta})|\,d\theta\leqslant 4\left(\frac{(r_2-r_1)\,\eta\,R}{(R-r_2)^2}+\frac{\sqrt{2}\pi\sigma}{\sigma-1}\psi\left(r_1,r_2;\eta\right)\right)T(\sigma R,u),\tag{11}$$

де

$$\psi(r_1,r_2;\eta)=\frac{r_2-r_1}{r_1}\log\left(1+\frac{r_1\eta}{r_2-r_1}\right)+\eta\log\left(1+\frac{r_2-r_1}{r_1\eta}\right),$$

а $q(re^{i\theta})$ означена співвідношенням (10), при $0<r<R$, $\theta\in[0,2\pi]$.

Доведення. Доведення цієї леми проведемо за схемою, близькою до запропонованої для доведення теореми 7 з [18]. Нехай $0 < r < R < +\infty,\ |a| < R$. Тоді, зважаючи на (10), одержуємо

$$\Big|q(z)\Big| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \big|u(Re^{i\theta})\big| \, \frac{2R}{|R-|z||^2}\, d\theta + \int\limits_{|a|<R} \left| \frac{R^2-|a|^2}{(z-a)(R^2-\overline{a}z)} \right| d\mu_a[u].$$

Зауважимо, що

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Big|u(Re^{i\theta})\Big|\, d\theta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \Big(2u^+(Re^{i\theta}) - u(Re^{i\theta})\Big)\, d\theta \leqslant 2T(R,u),$$

і, також $|\frac{R^2-|a|^2}{(R^2-\overline{a}z)(z-a)}| \leqslant \frac{2}{|z-a|}$ при $|a| < R$. Тому

$$|q(z)| \leqslant \frac{4\,R\,T(R,u)}{(R-|z|)^2} + 2\int\limits_{|a|<R} \frac{d\mu_a[u]}{|z-a|}.$$

Враховуючи лему 7.2 з ([19], с. 52), отримуємо ($t \in [r_1, r_2]$)

$$\int\limits_{E(t)} \Big|q(te^{i\theta})\Big|\, d\theta \leqslant \frac{4R\eta T(R,u)}{(R-t)^2} + 4\int\limits_{|a|<R}\int\limits_0^{\eta/2} \frac{d\phi}{|te^{i\phi}-|a||}\, d\mu_a[u]. \tag{12}$$

В [18] доведено, що для всіх a, $0 < |a| < R$ правильна оцінка

$$\int\limits_0^{\eta/2} \frac{d\phi}{|te^{i\phi}-|a||} \leqslant \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1}\log\left(1+\frac{r_1\eta}{2|t-|a||}\right).$$

Отже,

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} dt \int\limits_0^{\eta/2} \frac{d\phi}{|te^{i\phi}-|a||} \leqslant \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2} \log\left(1+\frac{r_1\eta}{2|t-|a||}\right) dt.$$

Розглянемо спочатку випадок $|a| \in [r_1, r_2]$. Тоді

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\log\left(1+\frac{r_1\eta}{2|t-|a||}\right) dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1}\Bigg(\int\limits_0^{|a|-r_1}\log\left(1+\frac{r_1\eta}{2x}\right) dx + \int\limits_0^{r_2-|a|}\log\left(1+\frac{r_1\eta}{2x}\right) dx\Bigg).$$

Позначимо $k = \min\{|a|-r_1, r_2-|a|\}, K = \max\{|a|-r_1, r_2-|a|\}$. Зауважимо, що $k+K = r_2-r_1$. Звідси $K = r_2-r_1-k = \frac{r_2-r_1}{2}+\frac{r_2-r_1}{2}-k$ і, тому,

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\log\left(1+\frac{+}{r_1\eta}2|t-|a||\right) dt = \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1}\left(2\int\limits_0^{k}\log\left(1+\frac{r_1\eta}{2x}\right) dx + \int\limits_k^{K}\log\left(1+\frac{r_1\eta}{2x}\right) dx\right) =$$

$$= \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1}\left(2\int\limits_0^k \log\left(1+\frac{r_1\eta}{2x}\right)dx + \int\limits_k^{\frac{r_2-r_1}{2}} \log\left(1+\frac{r_1\eta}{2x}\right)dx + \int\limits_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{K} \log\left(1+\frac{r_1\eta}{2x}\right)dx\right).$$

Оскільки функція $\log(1+\frac{r_1\eta}{2x})$ монотонно спадна на $(0,+\infty)$, а $K-\frac{r_2-r_1}{2}=\frac{r_2-r_1}{2}-k$, то

$$\int\limits_{\frac{r_2-r_1}{2}}^{K} \log\left(1+\frac{r_1\eta}{2x}\right)dx \leqslant \int\limits_k^{\frac{r_2-r_1}{2}} \log\left(1+\frac{r_1\eta}{2x}\right)dx.$$

Тоді

$$\frac{\pi\sqrt{2}}{r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\log\left(1+\frac{r_1\eta}{2|t-|a||}\right)dt \leqslant \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1}\left(2\int\limits_0^k \log\left(1+\frac{r_1\eta}{2x}\right)dx+\right.$$

$$\left.+2\int\limits_k^{\frac{r_2-r_1}{2}} \log\left(1+\frac{r_1\eta}{2x}\right)dx\right) = \frac{\pi\sqrt{2}}{r_1}\int\limits_{r_1}^{r_2}\log\left(1+\frac{r_1\eta}{2|t-\frac{r_2+r_1}{2}|}\right)dt.$$

Для випадку, коли $|a|\notin[r_1,r_2]$ можна провести аналогічні міркування. Застосовуючи знову лему 7.2 з [19], отримуємо

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} dt \int\limits_0^{\eta/2} \frac{d\phi}{|te^{i\phi}-|a||} \leqslant \frac{2\sqrt{2}\pi}{r_1}\int\limits_0^{(r_2-r_1)/2}\log\left(1+\frac{r_1\eta}{2t}\right)dt =$$

$$= \sqrt{2}\pi\left(\frac{r_2-r_1}{r_1}\log\left(1+\frac{r_1\eta}{r_2-r_1}\right)+\eta\log\left(1+\frac{r_2-r_1}{r_1\eta}\right)\right) = \sqrt{2}\,\pi\,\psi(r_1,r_2;\eta). \quad (13)$$

З (12) і (13) випливає, що

$$\int\limits_{r_1}^{r_2} dt \int\limits_{E(t)} \left|q(te^{i\theta})\right| d\theta \leqslant \frac{4(r_2-r_1)\,\eta\, R\, T(R,u)}{(R-r_2)^2} + 2\sqrt{2}\pi\psi(r_1,r_2;\eta)\, n(R,u) \leqslant$$

$$\leqslant \frac{4(r_2-r_1)\,\eta\, R\, T(R,u)}{(R-r_2)^2} + \frac{4\sqrt{2}\pi\sigma T(\sigma R,u)}{\sigma-1}\psi(r_1,r_2;\eta) \leqslant$$

$$\leqslant 4\left(\frac{(r_2-r_1)\,\eta\, R}{(R-r_2)^2} + \frac{\sqrt{2}\pi\sigma}{\sigma-1}\psi(r_1,r_2;\eta)\right)T(\sigma R,u),$$

звідки одразу випливає (11). □

3. Основні результати.

Теорема 1. *Нехай* u *– субгармонійна в* $\overline{\mathbb{D}}_{4r}$ *функція,* $u(0)=0$, $0<r<+\infty$, $\gamma(r)=1+\varepsilon(r)$, $0<\varepsilon(r)\leqslant 1$, $\varepsilon(r)$ *– незростаюча функція на* $(0,+\infty)$, $\varepsilon(0)=1$. *Тоді для всіх* $k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$

$$|c_k(r,\mathcal{F})| \leqslant 4T(\gamma^2(r)r,u)\left(\frac{1}{\gamma^{|k|}(r)}+\frac{1-\gamma^{-|k|}(r)}{|k|\,\varepsilon(r)}\right). \quad (14)$$

Доведення. Зіставляючи (8) та (5), одержимо

$$c_k(r,\mathcal{F}) = 2c_k(r,u) - \int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n_k(t,u)}{t}\,dt.$$

Звідси

$$|c_k(r,\mathcal{F})| \leqslant |2c_k(r,u)| + \int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^k \frac{n(t,u)}{t}\,dt \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |u(re^{i\theta})|\,d\theta + N(r,u) =$$

$$= 4T(r,u) - 2N(r,u) + N(r,u) = 4T(r,u) - N(r,u) \leqslant 4T(r,u). \tag{15}$$

З урахуванням співвідношень

$$c_k(r,\mathcal{F}) - \frac{c_k(\gamma(r)r,\mathcal{F})}{\gamma^k(r)} = \gamma_k r^k + \int\limits_0^r \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_k(t,u)}{t}\,dt - \frac{\gamma_k}{\gamma^k(r)}\cdot\gamma^k(r) -$$

$$-\frac{1}{\gamma^k(r)}\int\limits_0^{\gamma(r)r} \left(\frac{\gamma(r)r}{t}\right)^k \frac{n_k(t,u)}{t}\,dt = \int\limits_r^{\gamma(r)r} \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_k(t,u)}{t}\,dt$$

та нерівностей (15) і $N(r,u) \leqslant T(r,u)$, одержимо

$$\Big|c_k(r,\mathcal{F})\Big| \leqslant \left|\frac{c_k(\gamma(r)r,\mathcal{F})}{\gamma^k(r)}\right| + \left|\int\limits_r^{\gamma(r)r} \left(\frac{r}{t}\right)^k \frac{n_k(t,u)}{t}\,dt\right| \leqslant \frac{4T(\gamma^2(r)r,u)}{\gamma^k(r)} +$$

$$+ n(\gamma(r)r,u)r^k \int\limits_r^{\gamma(r)r} \frac{dt}{t^{k+1}} = \frac{4T(\gamma^2(r)r,u)}{\gamma^k(r)} + \frac{n(\gamma(r)r,u)}{k}(1-\gamma^{-k}(r)).$$

Оскільки

$$\frac{\varepsilon(r)n(\gamma(r)r,u)}{\gamma(r)} \leqslant n(\gamma(r)r,u)\log\gamma(r) \leqslant N(\gamma^2(r)r,u) \leqslant T(\gamma^2(r)r,u),$$

то остання нерівність набуде вигляду

$$\Big|c_k(r,\mathcal{F})\Big| \leqslant \frac{4T(\gamma^2(r)r,u)}{\gamma^k(r)} + (1-\gamma^{-k}(r))\frac{2T(\gamma^2(r)r,u)}{k\,\varepsilon(r)} \leqslant$$

$$\leqslant 4T(\gamma^2(r)r,u)\left(\frac{1}{\gamma^k(r)} + \frac{1-\gamma^{-k}(r)}{k\,\varepsilon(r)}\right).$$

Нехай тепер $k \leqslant -1$. З огляду на співвідношення (9) отримаємо

$$|c_k(r,\mathcal{F})| = \left|\int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} \frac{n_k(t,u)}{t}\,dt\right| \leqslant \int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} \frac{n(t,u)}{t}\,dt \leqslant N(r,u).$$

Враховуючи співвідношення

$$c_k(r,\mathcal{F}) - \gamma^{-|k|}(r)c_k(r/\gamma(r),\mathcal{F}) = \int\limits_0^r \left(\frac{t}{r}\right)^{|k|} \frac{n_k(t,u)}{t}\,dt -$$

$$-\frac{1}{\gamma^{|k|}(r)}\int\limits_0^{r/\gamma(r)}\left(\frac{\gamma(r)t}{r}\right)^{|k|}\frac{n_k(t,u)}{t}\,dt=\int\limits_{r/\gamma(r)}^{r}\left(\frac{t}{r}\right)^{|k|}\frac{n_k(t,u)}{t}\,dt,$$

аналогічно, як і в попередньому випадку, одержуємо

$$|c_k(r,\mathcal{F})|\leqslant\left|\frac{c_k\left(\frac{r}{\gamma(r)},\mathcal{F}\right)}{\gamma^{|k|}(r)}\right|+\left|\int\limits_{r/\gamma(r)}^{r}\left(\frac{t}{r}\right)^{|k|}\frac{n_k(t,u)}{t}\,dt\right|\leqslant\frac{N\left(\frac{r}{\gamma(r)},u\right)}{\gamma^{|k|}(r)}+$$

$$+\frac{n(r,u)}{r^{|k|}}\int\limits_{r/\gamma(r)}^{r}t^{|k|-1}\,dt\leqslant\frac{N\left(\frac{r}{\gamma(r)},u\right)}{\gamma^{|k|}(r)}+\frac{n(r,u)}{|k|}\left(1-\frac{1}{\gamma^{|k|}(r)}\right)\leqslant$$

$$\leqslant 2N(\gamma(r)r,u)\left(\frac{1}{\gamma^{|k|}(r)}+\frac{1-\gamma^{-|k|}(r)}{|k|\,\varepsilon(r)}\right)\leqslant 4T(\gamma^2(r)r,u)\left(\frac{1}{\gamma^{|k|}(r)}+\frac{1-\gamma^{-|k|}(r)}{|k|\,\varepsilon(r)}\right).$$

Теорему 1 доведено. □

Теорема 2. *Нехай* $0<r<+\infty$, $0<\varepsilon(r)\leqslant 1$, $\varepsilon(r)$ *– незростаюча на* $(0,+\infty)$ *функція,* $\varepsilon(0)=1$, $\gamma(r)=1+\varepsilon(r)$, u *– субгармонійна в* $\overline{\mathbb{D}}_{4r}$ *функція,* $u(0)=0$. *Тоді*

$$m_q(r,\mathcal{F})\leqslant A(q)\,\frac{T(\gamma^2(r)r,u)}{\sqrt[q]{\varepsilon(r)}},\qquad 1\leqslant q\leqslant 2,$$

$$m_q(r,\mathcal{F})\leqslant A(q)\,\frac{\sqrt[q]{\varepsilon(r)}\,T(\gamma^2(r)r,u)}{\varepsilon(r)},\qquad 2\leqslant q<+\infty;$$

де $A(q)=17\cdot 2^{1-1/q}$ *при* $1\leqslant q\leqslant 2$ *і* $A(q)=17\,q^{1-1/q}$ *при* $2\leqslant q<+\infty$.

Доведення. Спочатку розглянемо випадок $q=1$. Оскільки

$$\frac{Re^{i\theta}+z}{Re^{i\theta}-z}=\frac{2z}{Re^{i\theta}-z}+1,$$

то з узагальненої формули Шварца (3) отримаємо

$$\mathcal{F}(z)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}u(Re^{i\theta})\frac{2z}{Re^{i\theta}-z}\,d\theta+\int\limits_{|a|\leqslant R}\log\frac{R^2(a-z)}{a(R^2-\overline{a}z)}\,d\mu_a[u],$$

звідси при $R=\gamma(r)r$

$$m_1(r,\mathcal{F})=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\mathcal{F}(re^{i\varphi})|\,d\varphi\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|u(Re^{i\theta})\right|\left|\frac{2re^{i\varphi}}{Re^{i\theta}-re^{i\varphi}}\right|\,d\theta\right)\,d\varphi+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\int\limits_{|a|\leqslant R}\log\frac{R^2(a-re^{i\varphi})}{a(R^2-\overline{a}re^{i\varphi})}\,d\mu_a[u]\right|d\varphi\leqslant\frac{4r}{R-r}T(R,u)+$$

$$+\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\int\limits_{|a|\leqslant R}\log\frac{R^2(a-re^{i\varphi})}{a(R^2-\overline{a}re^{i\varphi})}\,d\mu_a[u]\right|d\varphi\leqslant$$

$$\leqslant \frac{4T(\gamma(r)r,u)}{\varepsilon(r)} + \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\int\limits_{|a|\leqslant R}\log\frac{R^2(a-re^{i\varphi})}{a(R^2-\overline{a}re^{i\varphi})}\,d\mu_a[u]\right|d\varphi. \tag{16}$$

Оцінимо тепер

$$\int\limits_0^{2\pi}\left|\int\limits_{|a|\leqslant R}\log\frac{R^2(a-re^{i\varphi})}{a(R^2-\overline{a}re^{i\varphi})}\,d\mu_a[u]\right|\frac{d\varphi}{2\pi} \leqslant \int\limits_{|a|\leqslant R} d\mu_a[u]\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\int\limits_0^{r}\frac{(R^2-|a|^2)\,dt}{|te^{i\varphi}-|a||(R^2-r|a|)}.$$

У статті [12] (див. доведення теореми 2, с.13) доведено, що

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{r}\frac{dt}{|te^{i\varphi}-|a||} \leqslant \log\frac{r}{|a|}+\log(2e^2) \qquad (|a|\leqslant r), \tag{17}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}d\varphi\int\limits_0^{r}\frac{dt}{|te^{i\varphi}-|a||} \leqslant \log(2e^2) \qquad (r<|a|). \tag{18}$$

Далі, враховуючи (17) та (18), одержимо

$$\int\limits_{|a|\leqslant R} d\mu_a[u]\int\limits_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{2\pi}\int\limits_0^{r}\frac{(R^2-|a|^2)\,dt}{|te^{i\varphi}-|a||(R^2-r|a|)} \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_0^{r}\frac{R^2-x^2}{R^2-rx}\left(\log\frac{r}{x}+\log(2e^2)\right)dn(x,u)+\log(2e^2)\int\limits_r^{R}\frac{R^2-x^2}{R^2-rx}\,dn(x,u)\leqslant$$

$$\leqslant 2\int\limits_0^{r}\log\left(\frac{r}{x}\right)dn(x,u)+\log(2e^2)\int\limits_0^{R}\frac{R^2-x^2}{R^2-rx}\,dn(x,u)\leqslant 2N(r,u)+$$

$$+\log(2e^2)\left(\frac{R^2-x^2}{R^2-rx}n(x,u)\Bigg|_0^R+\int\limits_0^{R}\frac{2R^2x-rR^2-rx^2}{(R^2-rx)^2}n(x,u)\,dx\right)\leqslant 2N(r,u)+$$

$$+2\log(2e^2)\frac{R}{R-r}\int\limits_0^{R}\frac{n(x,u)}{x}\,dx\leqslant 2N(r,u)+4\log(2e^2)\frac{N(\gamma^2(r)r,u)}{\varepsilon(r)}.$$

Підставивши цю нерівність в (16) та врахувавши, що $N(\gamma^2(r)r,u)\leqslant T(\gamma^2(r)r,u)$, одержимо

$$m_1(r,\mathcal{F})\leqslant\frac{17\,T(\gamma^2(r)r,u)}{\varepsilon(r)}. \tag{19}$$

Нехай тепер $q\in[2,+\infty)$. Приймемо $p=q/(q-1)$. Застосувавши нерівності Хаусдорфа-Юнга та Мінковського, одержуємо

$$m_q(r,\mathcal{F})\leqslant\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty}|c_k(r,\mathcal{F})|^p\right)^{1/p}\leqslant|c_0(r,\mathcal{F})|+$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|c_k(r,\mathcal{F})|^p\right)^{1/p}+\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}|c_k(r,\mathcal{F})|^p\right)^{1/p}. \tag{20}$$

Маємо

$$c_0(r,\mathcal{F})=N(r,u)\leqslant T(r,u)\leqslant T(\gamma^2(r)r,u). \tag{21}$$

Далі з урахуванням (14) та нерівності Мінковського одержимо

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|c_k(r,\mathcal{F})|^p\right)^{1/p}\leqslant 4T(\gamma^2(r)r,u)\left(\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\gamma^{-pk}(r)\right)^{1/p}+\frac{1}{\varepsilon(r)}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\Bigl(\frac{1-\gamma^{-k}(r)}{k}\Bigr)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Оскільки

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\gamma^{-pk}(r)=\frac{1}{\gamma^p(r)-1}\leqslant\frac{1}{p\,\varepsilon(r)}\leqslant\frac{q}{\varepsilon(r)},$$

а також

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\Bigl(\frac{1-\gamma^{-k}(r)}{k}\Bigr)^p\leqslant\int\limits_1^{+\infty}\Bigl(\frac{1-e^{-t\log\gamma(r)}}{t}\Bigr)^p dt=(\log\gamma(r))^{p-1}\times$$

$$\times\int\limits_{\log\gamma(r)}^{+\infty}\Bigl(\frac{1-e^{-x}}{x}\Bigr)^p dx\leqslant\varepsilon^{p-1}(r)\int\limits_0^1\Bigl(\frac{1-e^{-x}}{x}\Bigr)^p dx+$$

$$+\varepsilon^{p-1}(r)\int\limits_1^{+\infty}\Bigl(\frac{1-e^{-x}}{x}\Bigr)^p dx\leqslant q\,\varepsilon^{p-1}(r),$$

то отримаємо нерівність

$$\left(\sum_{k=1}^{+\infty}|c_k(r,\mathcal{F})|^p\right)^{1/p}\leqslant\frac{8\,q^{1-1/q}\,T(\gamma^2(r)r,u)}{(\varepsilon(r))^{1-1/q}}. \tag{22}$$

Враховуючи (14), як і у попередньому випадку, одержимо

$$\left(\sum_{k=-\infty}^{-1}|c_k(r,\mathcal{F})|^p\right)^{1/p}\leqslant\frac{8\,q^{1-1/q}T(\gamma^2(r)r,u)}{(\varepsilon(r))^{1-1/q}}. \tag{23}$$

Підставивши (21)-(23) в (20), отримуємо

$$m_q(r,\mathcal{F})\leqslant 17\left(\frac{q}{\varepsilon(r)}\right)^{1-1/q}T(\gamma^2(r)r,u),\qquad 2\leqslant q<+\infty. \tag{24}$$

Зрештою, нехай $1\leqslant q\leqslant 2$. Тоді твердження теореми 10.12 з [20]

$$m_q(r,\mathcal{F})\leqslant\Bigl(m_1(r,\mathcal{F})\Bigr)^{(2-q)/q}\Bigl(m_2(r,\mathcal{F})\Bigr)^{2(1-1/q)}$$

і нерівності (19) та (24) негайно приводять нас до потрібного результату. □

Лема 4. *Нехай* $0 < r_1 < +\infty$, $r_2 = \gamma(r_1)r_1$, $R = \gamma(r_2)r_2$, *де* $\gamma(t) = 1 + \varepsilon(t)$, $0 < \varepsilon(t) \leqslant 1$, $\varepsilon(t)$ *– незростаюча функція на* $(0, +\infty)$, $\varepsilon(0) = 1$. *Нехай* u *– субгармонійна функція в* $\overline{\mathbb{D}}_{8r_1}$, $u(0) = 0$. *Тоді для довільного* $k \neq 0$

$$\Big|c_k(r_2, \mathcal{F}) - c_k(r_1, \mathcal{F})\Big| \leqslant \Big(1 - \gamma^{-|k|}(r_1)\Big) \frac{7\, T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u)}{|k|\, \varepsilon(r_2)},$$

$$\Big|c_0(r_2, \mathcal{F}) - c_0(r_1, \mathcal{F})\Big| \leqslant \frac{\varepsilon(r_1) T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u)}{\varepsilon(r_2)}.$$

Доведення. Нехай $k \in \mathbb{N}$. Зі співвідношень (8) одержуємо

$$c_k(r_2, \mathcal{F}) - c_k(r_1, \mathcal{F}) = \gamma_k r_2^k + \int\limits_0^{r_2} \Big(\frac{r_2}{t}\Big)^k \frac{n_k(t, u)}{t}\, dt - \gamma_k r_1^k - \int\limits_0^{r_1} \Big(\frac{r_1}{t}\Big)^k \frac{n_k(t, u)}{t}\, dt =$$

$$= \gamma_k r_2^k (1 - \gamma^{-k}(r_1)) + (1 - \gamma^{-k}(r_1)) \int\limits_0^{r_2} \Big(\frac{r_2}{t}\Big)^k \frac{n_k(t, u)}{t}\, dt + \int\limits_{r_1}^{r_2} \Big(\frac{r_1}{t}\Big)^k \frac{n_k(t, u)}{t}\, dt,$$

тому

$$\Big|c_k(r_2, \mathcal{F}) - c_k(r_1, \mathcal{F})\Big| \leqslant (1 - \gamma^{-k}(r_1))|c_k(r_2, \mathcal{F})| + \int\limits_{r_1}^{r_2} \Big(\frac{r_1}{t}\Big)^k \frac{n(t, u)}{t}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant (1 - \gamma^{-k}(r_1))|c_k(r_2, \mathcal{F})| + (1 - \gamma^{-k}(r_1)) \frac{n(r_2, u)}{k} =$$

$$= (1 - \gamma^{-k}(r_1)) \Big(|c_k(r_2, \mathcal{F})| + \frac{n(r_2, u)}{k}\Big). \tag{25}$$

З урахуванням нерівностей

$$\frac{2\varepsilon(r_2) n(r_2, u)}{\gamma(r_2)} \leqslant 2n(r_2, u) \log \gamma(r_2) \leqslant N(\gamma^2(r_2)r_2, u) \leqslant T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u),$$

також співвідношень (14) та (25), маємо

$$|c_k(r_2, \mathcal{F}) - c_k(r_1, \mathcal{F})| \leqslant \Big(1 - \gamma^{-|k|}(r_1)\Big) \bigg(\frac{6\, T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u)}{k\, \varepsilon(r_2)} +$$

$$+ \frac{T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u)}{k\, \varepsilon(r_2)} \bigg) = \Big(1 - \gamma^{-|k|}(r_1)\Big) \frac{7\, T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1, u)}{k\, \varepsilon(r_2)}.$$

Для $k \leqslant -1$ зі співвідношень (9) одержуємо

$$c_k(r_2, \mathcal{F}) - c_k(r_1, \mathcal{F}) = c_k(r_2, \mathcal{F}) - \gamma^k(r_1) c_k(r_1, \mathcal{F}) -$$

$$-(1 - \gamma^k(r_1))\, c_k(r_1, \mathcal{F}) = \int\limits_0^{r_2} \Big(\frac{t}{r_2}\Big)^{|k|} \frac{n_k(t, u)}{t}\, dt - \int\limits_0^{r_1} \Big(\frac{t}{r_2}\Big)^{|k|} \frac{n_k(t, u)}{t}\, dt -$$

$$-(1 - \gamma^k(r_1)) c_k(r_1, \mathcal{F}) = \int\limits_{r_1}^{r_2} \Big(\frac{t}{r_2}\Big)^{|k|} \frac{n_k(t, u)}{t}\, dt - (1 - \gamma^k(r_1))\, c_k(r_1, \mathcal{F}),$$

тому

$$|c_k(r_2,\mathcal{F})-c_k(r_1,\mathcal{F})|\leqslant(1-\gamma^k(r_1))\Big(\frac{n(r_2,u)}{|k|}+|c_k(r_2,\mathcal{F})|\Big)\leqslant$$
$$\leqslant\big(1-\gamma^k(r_1)\big)\,T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1,u)\left(\frac{1}{|k|\,\varepsilon(r_2)}+\frac{3}{|k|\,\varepsilon(r_2)}\right)\leqslant$$
$$\leqslant\big(1-\gamma^k(r_1)\big)\,\frac{4\,T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1,u)}{|k|\,\varepsilon(r_2)}.$$

Нехай $k=0$. Тоді

$$|c_0(r_2,\mathcal{F})-c_0(r_1,\mathcal{F})|=\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{n(t,u)}{t}\,dt\leqslant n(r_2,u)\,\log\gamma(r_1)\leqslant$$
$$\leqslant\frac{\varepsilon(r_1)\gamma(r_2)}{2\,\varepsilon(r_2)}\,N(\gamma^2(r_2)r_2,u)\leqslant\frac{\varepsilon(r_1)\,T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1,u)}{\varepsilon(r_2)}.$$

□

Теорема 3. *Нехай* $0<r_1<+\infty$, $r_2=\gamma(r_1)r_1$, *де* $\gamma(t)=1+\varepsilon(t)$, $0<\varepsilon(t)\leqslant 1$, $\varepsilon(t)$ *– неспадна на* $(0,+\infty)$ *функція; u – субгармонійна в* $\overline{\mathbb{D}}_{8r_1}$; $u(0)=0$. *Тоді*

$$|m_q(r_2,\mathcal{F})-m_q(r_1,\mathcal{F})|\leqslant B(q)\,\sqrt[q]{\frac{\varepsilon(r_1)}{\varepsilon^2(r_2)}}T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1,u),\quad 1\leqslant q\leqslant 2;$$
$$|m_q(r_2,\mathcal{F})-m_q(r_1,\mathcal{F})|\leqslant B(q)\,\frac{\sqrt[q]{\varepsilon(r_1)}}{\varepsilon(r_2)}T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1,u),\quad 2\leqslant q<+\infty;$$

де $B(q)=16\sqrt[q]{9}/3$ *при* $1\leqslant q\leqslant 2$ *і* $B(q)=8(2q)^{1-1/q}$ *при* $2\leqslant q<+\infty$.

Доведення. З нерівності трикутника випливає, що для $p\in[1,+\infty)$

$$|m_p(r_2,\mathcal{F})-m_p(r_1,\mathcal{F})|\leqslant\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\mathcal{F}(r_2e^{i\theta})-\mathcal{F}(r_1e^{i\theta})\right|^p\,d\theta\right\}^{1/p}. \tag{26}$$

Нехай $p=1$. Тоді, з огляду на (11), одержимо

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\mathcal{F}(r_1e^{i\theta})-\mathcal{F}(r_2e^{i\theta})\right|d\theta=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\int\limits_{r_1}^{r_2}\frac{\partial\mathcal{F}(te^{i\theta})}{\partial t}\,d\,t\right|d\theta\leqslant$$
$$\leqslant\frac{1}{2\pi}\,dt\int\limits_{r_1}^{r_2}\int\limits_0^{2\pi}\left|q(te^{i\theta})\right|\,d\theta. \tag{27}$$

Застосуємо до оцінки останнього інтеграла лему 3 з $E(t)=[0,2\pi]$ $(t\in[r_1,r_2])$, $r_2=\gamma(r_1)r_1$, $R=\gamma(r_1)\gamma(r_2)r_1$ і $\sigma=\gamma(r_2)$. Тоді співвідношення (27) набуде вигляду

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\left|\mathcal{F}(r_1e^{i\theta})-\mathcal{F}(r_2e^{i\theta})\right|d\theta\leqslant$$

$$\leqslant 4\frac{\varepsilon(r_1)}{\varepsilon(r_2)}\left(\frac{\gamma(r_2)}{\gamma(r_1)\,\varepsilon(r_2)}+\frac{\gamma(r_2)}{\sqrt{2}\varepsilon(r_1)}\left(\varepsilon(r_1)\log\left(1+\frac{2\pi}{\varepsilon(r_1)}\right)+2\pi\log\left(1+\frac{\varepsilon(r_1)}{2\pi}\right)\right)\right)\times$$
$$\times T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1,u)\leqslant 48\frac{\varepsilon(r_1)}{\varepsilon^2(r_2)}\,T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1,u). \tag{28}$$

Нехай $p\geqslant 2,\ \ q=p/(p-1)$. Тоді з урахуванням леми 4 і нерівностей Хаусдорфа-Юнга та Мінковського, одержимо

$$\left\{\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\mathcal{F}(r_2e^{i\theta})-\mathcal{F}(r_1e^{i\theta})|^q\,d\,\theta\right\}^{1/q}\leqslant|c_0(r_2,\mathcal{F})-c_0(r_1,\mathcal{F})|+$$
$$+\left\{2\sum_{k=1}^{+\infty}|c_k(r_2,\mathcal{F})-c_k(r_1,\mathcal{F})|^p\right\}^{1/p}\leqslant\frac{\varepsilon(r_1)\,T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_1)r_1,u)}{\varepsilon(r_2)}+$$
$$+\frac{7\,\sqrt[p]{2}\,T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1,u)}{\varepsilon(r_2)}\left\{\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-\gamma^{-k}(r_1)}{k}\right)^p\right\}^{1/p}. \tag{29}$$

Маємо

$$\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1-\gamma^{-k}(r_1)}{k}\right)^p\leqslant\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{1-e^{-t\log\gamma(r_1)}}{t}\right)^p\,d\,t=$$
$$=(\log\gamma(r_1))^{p-1}\int\limits_{\log(\gamma(r_1))}^{+\infty}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^p d\,x\leqslant(\log\gamma(r_1))^{p-1}\int\limits_0^1\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^p d\,x+$$
$$+(\log\gamma(r_1))^{p-1}\int\limits_1^{+\infty}\left(\frac{1-e^{-x}}{x}\right)^p d\,x\leqslant q\,(\log\gamma(r_1))^{p-1}.$$

Підставивши цю нерівність в (29), одержуємо

$$\left\{\frac{1}{2\,\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\mathcal{F}(r_2e^{i\theta})-\mathcal{F}(r_1e^{i\theta})|^q\,d\,\theta\right\}^{1/q}\leqslant\left(\frac{\varepsilon(r_1)}{\varepsilon(r_2)}+\frac{7(2\,q)^{1-1/q}(\log\gamma(r_1))^{1/q}}{\varepsilon(r_2)}\right)\times$$
$$\times\,T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1,u)\leqslant 8\,(2q)^{1-1/q}\frac{\sqrt[q]{\varepsilon(r_1)}}{\varepsilon(r_2)}\,T(\gamma(r_1)\gamma^2(r_2)r_1,u). \tag{30}$$

Зрештою, для $1\leqslant q\leqslant 2$ необхідна нерівність випливає з нерівностей (28), (30), та нерівності (див. теорему 10.12 з [20])

$$\left\{\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|\mathcal{F}(r_2e^{i\theta})-\mathcal{F}(r_1e^{i\theta})|^q\,d\theta\right\}^{1/q}\leqslant$$
$$\leqslant\left\{\int\limits_0^{2\pi}|\mathcal{F}(r_2e^{i\theta})-\mathcal{F}(r_1e^{i\theta})|\frac{d\theta}{2\pi}\right\}^{(2-q)/q}\left\{\left[\int\limits_0^{2\pi}|\mathcal{F}(r_2e^{i\theta})-\mathcal{F}(r_1e^{i\theta})|^2\frac{d\theta}{2\pi}\right]^{1/2}\right\}^{2(1-1/q)}.$$

□

Зауваження 1. Нагадаємо, що множина $E \subset [1, +\infty)$ називається множиною скінченної логарифмічної міри, якщо інтеграл $\int_E d(\log t)$ збігається. Під час доведення леми 2 з [12] доведено таке твердження.

Лема 5. *Нехай $\varphi(t)$ – неперервна, додатна функція, задана на $[t_0, +\infty)$, неспадна, $\varphi(t) \to +\infty$ при $t \to +\infty$, причому $\int_{t_0}^{+\infty} dt/\varphi(t) < +\infty$. Тоді для всіх $r \geqslant r_0^*$, крім, можливо, множини скінченної логарифмічної міри*

$$T((1 + 1/\varphi(\log(T(r,u))))r, u) < e\,T(r,u).$$

Із леми 5 та теореми 2 випливає такий наслідок.

Наслідок 1. *Нехай функція $\varphi(r)$ така, як в лемі 5. Нехай також виконуються умови теореми 2. Тоді для всіх $r \geqslant r_0^*$, крім, можливо, множини скінченної логарифмічної міри при $r \to +\infty$*

$$m_q(r, \mathcal{F}) = o\left(T(r,u)\varphi^{1-\alpha}(\log T(r,u))\right), \quad 0 \leqslant \alpha < 1 - 1/q, \quad 1 \leqslant q \leqslant 2,$$

$$m_q(r, \mathcal{F}) = o\left(T(r,u)\varphi^{1-\alpha}(\log T(r,u))\right), \quad 0 \leqslant \alpha < 1/q, \quad 2 \leqslant q + \infty.$$

Доведення. За теоремою 2

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leqslant 17 \cdot 2^{1-1/q}\, \frac{T(\gamma^2(r)r, u)}{\sqrt[q]{\varepsilon(r)}}, \qquad 1 \leqslant q \leqslant 2;$$

$$m_q(r, \mathcal{F}) \leqslant 17\, q^{1-1/q}\, \frac{\sqrt[q]{\varepsilon(r)}\, T(\gamma^2(r)r, u)}{\varepsilon(r)}, \qquad 2 \leqslant q < +\infty.$$

Для завершення доведення цього наслідку достатньо застосувати лему 5 з $\gamma^2(r) = (1 + 1/\varphi(\log(T(r,u))))$, звідси $\varepsilon(r) = \sqrt{1 + 1/\varphi(\log T(r,u))} - 1$, і врахувати асимптотичну рівність $\log(1 + \varepsilon(r)) \sim 1/(2\,\varphi(\log(T(r,u))))$, $r \to +\infty$. □

Автори висловлюють щиру подяку проф. О. Б. Скасківу за низку суттєвих зауважень і пропозицій, які допомогли усунути наявні в попередньому варіанті цієї статті недоліки і зробити викладення результатів логічнішими та послідовнішими.

1. *Rubel L.A.* A Fourier series method for meromorphic and entire functions / *Rubel L.A., Taylor B.A.* // Bull. Soc. Math. France. – 1968. – Vol. 96. – P. 53-96.
2. *Rubel L.A.* Entire and meromorphic functions / *Rubel L.A.* – New York, Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 1996.
3. *Кондратюк А.А.* Ряды Фурье и мероморфные функции / *Кондратюк А.А.* – Львов, 1988.
4. *Miles J.B.* On the growth of meromorphic functions having at least one deficient value / *Miles J.B., Shea D.F.* // Duke. Math. J. – 1976. – Vol. 43, №1. – P. 171-186.
5. *Sons L.R.* Zeros distribution of functions with slow or moderate growth in the unit disc / *Sons L.R.* // Pacific. J. Math. – 1982. – Vol. 99. – P. 473-481.
6. *Хейман У.* Мероморфные функции / *Хейман У.* – М., 1966.
7. *Chuang C.T.* Sur la croissance des fonctions / *Chuang C.T.* // Kexue Tongbao. – 1981. – Vol. 26. – P. 677-684.

8. *Марченко И.И.* Возрастание целых функций / *Марченко И.И., Щерба А.И.* // Сиб. мат. журн. – 1984. – Т. 25. – С. 598-605.
9. *Dai C.J.* On the growth of entire and meromorphic functions of infinite order / *Dai C.J., Drasin D., Li B.Q.* // J. Analyse Math. – 1990. – Vol. 55. – P. 217-228.
10. *Тарасюк С.І.* Інтегральні середні δ-субгармонійних в $\mathbb{R}^n$ функцій і класи цілком регулярного зростання / *Тарасюк С.І.* // Укр. мат. журн. – 1992. – Т. 44, №3. – С. 408-416.
11. *Кондратюк А.А.* Порівняння лебегових середніх і неванліннівської характеристики субгармонійних функцій / *Кондратюк А.А., Тарасюк С.І.* // Мат. студії. – 1992. – Т. 1. – С. 74-80.
12. *Васильків Я.В.* Асимптотична поведінка логарифмічних похідних та логарифмів мероморфних функцій цілком регулярного зростання в $L^p[0, 2\pi]$-метриці. Ч. 1 / *Васильків Я.В.* // Мат. студії. – 1999. – Т. 12, №1. – С. 37-58.
13. *Kondratyuk A.A.* Conjugate of subhfrmonic function / *Kondratyuk A.A., Vasyl'kiv Ya.V.* // Mat. Stud. – 2000. – Vol. 13, №2. – P. 173-180.
14. *Drasin D.* Polya peaks and oscilation of positive functions / *Drasin D., Shea D. F.* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1972. – Vol. 34, №2. – P. 403-411.
15. *Хейман У.* Субгармонические функции / *Хейман У., Кеннеди П.* – М., 1980.
16. *Кондратюк А.А.* О методе сферических гармоник для субгармонических функций / *Кондратюк А.А.* // Матем. сб. – 1981. – Т. 116, №2. – С. 147-165.
17. *Содин М.Л.* Об асимптотической регулярности роста субгармонических функций конечного порядка / *Содин М.Л.* // Укр. мат. журн. – 1984. – Т. 36, №5. – С. 646-650.
18. *Гольдберг А.А.* Асимптотическое поведение мероморфных функций вполне регулярного роста и их логарифмических производных / *Гольдберг А.А., Строчик Н.Н.* // Сиб. мат. журн. – 1985. – Т. 26, №6. – С. 29-38.
19. *Гольдберг А.А.* Распределение значений мероморфных функций / *Гольдберг А.А., Островкий И.В.* – М., 1970.
20. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды: в 2 т. / *Зигмунд А.* – М., 1965.

INTEGRAL MEANS OF FUNCTIONS CONJUGATE TO SUBHARMONIC FUNCTIONS

Yaroslav VASYLKIV, Lyubomyr POLITYLO

Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: YaVVasylkiv@gmail.com, Ljupol7@gmail.com

For the pair of functions $\mathcal{F}(z) := u(z) + i\breve{u}(z)$, where $u(z)$ – subharmonic in $\mathbb{C}$ function, harmonic in some neighbourhood of $z = 0$, $u(0) = 0$, and $\breve{u}(z)$ – conjugate to $u(z)$, it is obtained estimation of modulus of Fourier coefficients $|c_k(r, \mathcal{F})|$, $0 < r < +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$, in the terms of Nevanlinna characteristic $T(r, u)$; established unimprovable estimates of q-th Lebesgue integral means $m_q(r, \mathcal{F})$, $0 < r < +\infty$, $1 \leqslant q < +\infty$; evaluated the q-th integral modulus of continuity for function $\mathcal{F}$.

Key words: subharmonic function, function conjugate to subharmonic function, Fourier series method, Fourier coefficients, Lebesgue integral means.

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СРЕДНИЕ ФУНКЦИЙ, СОПРЯЖЕННЫХ К СУБГАРМОНИЧЕСКИМ ФУНКЦИЯМ

Ярослав ВАСИЛЬКИВ, Любомир ПОЛИТЫЛО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: YaVVasylkiv@gmail.com, Ljupol7@gmail.com

Для пары функций $\mathcal{F}(z) := u(z) + i\breve{u}(z)$, где $u(z)$ – субгармоническая в $\mathbb{C}$ функция, гармоническая в некоторой окрестности точки $z = 0$, $u(0) = 0$, и $\breve{u}(z)$ – сопряженная функция к $u(z)$, получены оценки модулей коэффициентов Фурьє $|c_k(r, \mathcal{F})|$, $0 < r < +\infty$, $k \in \mathbb{Z}$ в терминах неванлинновской характеристики $T(r, u)$; установлены неулучшаемые оценки q-х лебеговских интегральных средних $m_q(r, \mathcal{F})$, $0 < r < +\infty$, $1 \leqslant q < +\infty$; оценены q-е интегральные модули непрерывности функции $\mathcal{F}$.

Ключевые слова: субгармоническая функция, функция сопряженная к субгармонической функциии, метод рядов Фурье, коэффициенты Фурье, лебеговские интегральные средние.

Стаття надійшла до редколегії 25.03.2010

Прийнята до друку 22.12.2010