ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ
Серія мех.-мат. 2010.
Вип. 72. С. 40–46

VISNYK LVIV UNIV.
Ser. Mech. Math. 2010.
Is. 72. P. 40–46

УДК 519.8, 336.761.6

ПРО ОДНУ ЗАДАЧУ ОПТИМІЗАЦІЇ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ АКЦІЙ, ПОКРИТИХ CALL-ОПЦІОНАМИ

Микола БУГРІЙ

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

У рамках нечітко-множинної теорії запропоновано метод розв'язування задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, форсованих call-опціонами європейського стилю.

Ключові слова: розширений фондовий портфель, call-опціони.

Вступ. Звичайною інвестиційною практикою в розвинутих країнах є розміщення коштів на фондовому ринку, оскільки сьогодні це вигідніше, ніж інвестування, наприклад, у нерухомість. Така тенденція притаманна й фондовому ринку України, який, певною мірою, вже сформувався і перебуває в стадії інтенсивного розвитку й удосконалення.

Відомо, що вкладання коштів у цінні папери досить ризикована фінансова операція. Формуючи портфель ризикових цінних паперів, можна практично звести до нуля його несистематичний ризик: якщо деякі типи компонент портфеля матимуть низьку дохідність, то інші типи можуть компенсувати втрати інвестора. Чим більше диверсифікований фондовий портфель ризикових цінних паперів, тим менший його рівень несистематичного ризику. Оптимальну диверсифікацію портфеля можна провести, зокрема, класичними методами Марковіца [1] або Шарпа [2].

Значно складніша задача зменшення систематичного ризику фондового портфеля, який породжується невизначеністю зовнішнього середовища. Цього ризику практично неможливо уникнути, однак зменшити його рівень можна шляхом хеджування (форсування) компонент портфеля ризикових цінних паперів похідними цінними паперами (деривативами), зокрема, опціонами. Такі фондові портфелі умовно називають розширеними. Стосовно таких портфелів можна сформулювати задачу про оптимальний вибір не тільки часткового співвідношення його компонент, а й глибини хеджування (форсування) кожної ризикової компоненти опціонами.

Якщо дохідності компонент портфеля вважати випадковими величинами з відомими ймовірнісними розподілами, то щільність розподілу дохідності портфеля можна знайти, наприклад, відомим чисельним методом Монте-Карло. Однак цей метод передбачає громіздку обчислювальну процедуру – десятки тисяч операцій на одну точку межі ефективності портфеля. Для об'ємних розширених фондових портфелів чисельне розв'язування задачі оптимізації займає невиправдано багато оперативного часу.

Можливим варіантом виходу з цієї ситуації є модельна зміна способу врахування невизначеності під час формулювання задачі оптимізації: перехід від випадкових величин до нечітких величин у рамках нечітко-множинної теорії [3]. Зокрема, в [4] у рамках цієї теорії запропоновано чисельний метод розв'язування задачі про оптимізацію фондового портфеля акцій, форсованих call-опціонами. В основу цього методу покладено ітераційний вибір часткового співвідношення компонент розширеного фондового портфеля з наступним уточненням глибини форсування кожної акції опціонами.

У межах нечітко-множинної теорії пропонуємо один з можливих варіантів зведення задачі про оптимізацію фондового портфеля акцій, форсованих call-опціонами європейського стилю, до еквівалентної задачі математичного програмування. Це дає змогу (в загальному випадку на підставі методу дефазифікації [5]) ефективно використовувати стандартні прикладні пакети для розв'язування таких задач оптимізації.

Формулювання нечіткої задачі оптимізації та схема її розв'язування. Нехай інвестор хоче сформувати фондовий портфель з n типів акцій і не планує змінювати цей портфель впродовж деякого періоду T. Позначимо через x_i $(i = \overline{1,n})$ – відносну частку акції i-го типу в портфелі, а через r_i $(i = \overline{1,n})$ – фінальну дохідність акції i-го типу в момент часу T.

На підставі експертних даних відомо, що ринкова ціна компонент портфеля в межах періоду T може підвищитися, тому інвестор форсує кожну акцію call-опціонами європейського стилю з терміном дії T на глибину $\delta_i \in [0,1]$ $(i = \overline{1,n})$: якщо $\delta_i = 0$, то форсування немає (опціону на акцію i-го типу немає), якщо $\delta_i = 1$, то акція i-го типу форсована повністю (форсована кожна грошова одиниця вартості акції). Якщо інвестор вгадає напрям зміни ринкової ціни компонент портфеля, то він отримує додатковий прибуток на кожній акції завдяки наявності call-опціону на неї.

Отже, в зазначених умовах інвестор формує розширений фондовий портфель, який складається з n типів акцій і n наборів call-опціонів. Позначимо через x_i $(i = \overline{n+1, 2n})$ – відносну частку опціону в портфелі, який форсує відповідну акцію $(i-n)$-го типу, а через r_i $(i = \overline{n+1, 2n})$ – фінальну дохідність цього опціону в момент часу T. Всього розширений портфель містить $2n$ компонент з відносними частками x_i $(i = \overline{1, 2n})$, причому

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 1, \tag{1}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1. \tag{2}$$

Нехай у момент формування розширеного фондового портфеля стосовно основних параметрів, які характеризують кожну його складову, наявна така інформація.

1. Ринкова ціна акції i-го типу становить $S_{i,0}$ $(i = \overline{1,n})$.
2. На підставі експертних даних доведено, що на момент часу T ринкова ціна акції i-го типу перебуватиме в інтервалі $[S_{i,min}, S_{i,max}]$ $(i = \overline{1,n})$, тобто буде нечітким числом прямокутного вигляду [3].
3. Ринкова ціна call-опціону з i-го набору становить $C_{i,c}$ $(i = \overline{n+1,2n})$.
4. Страйк-ціна акції i-го типу (ціна виконання відповідного call-опціону) становить $X_{i,c}$ $(i = \overline{n+1,2n})$, причому $S_{i-n,min} < X_{i,c} < S_{i-n,max}$ $(i = \overline{n+1,2n})$.

На підставі цих даних можна обчислити нечітку дохідність розширеного фондового портфеля в момент часу T.

Справді, якщо форсування акції i-го типу немає $(\delta_i = 0)$, то дохідність цієї акції в момент часу T характеризується нечітким числом r_i^a прямокутного вигляду

$$r_i^a = [r_{i,min}^a, r_{i,max}^a] = \left[\frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}}, \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}}\right] \quad (i = \overline{1,n}). \tag{3}$$

Оскільки абсолютний прибуток $I_{i,c}$ $(i = \overline{n+1,2n})$ від call-опціону європейського стилю з i-го набору в момент часу T за умови 100% форсування відповідної акції $(\delta_i = 1)$ обчислюється за формулою [6]

$$I_{i,c} = \max\{0, S_{i-n} - X_{i,c}\} - C_{i,c} = \begin{cases} S_{i-n} - X_{i,c} - C_{i,c}, & S_{i-n} > X_{i,c}, \\ -C_{i,c}, & S_{i-n} \leqslant X_{i,c}, \end{cases}$$

де S_{i-n} $(i = \overline{n+1,2n})$ – ринкова ціна відповідної акції в момент часу T, то дохідність call-опціону з i-го набору в момент часу T природно описати нечітким числом r_i^o прямокутного вигляду

$$r_i^o = [r_{i,min}^o, r_{i,max}^o] = \left[-\frac{1}{T}, \frac{S_{i-n,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}}\right] \quad (i = \overline{n+1,2n}). \tag{4}$$

Тепер на підставі (3), (4) знайдемо, що дохідність розширеного фондового портфеля в момент часу T характеризується нечітким числом r прямокутного вигляду

$$r = [r_{\min}, r_{max}] =$$
$$= \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_{i,min}^a + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \cdot r_{i,min}^o, \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot r_{i,max}^a + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \cdot r_{i,max}^o\right].$$

У розгорнутому вигляді останню формулу запишемо так:

$$r = [r_{\min}, r_{max}] = \left[\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} - \frac{1}{T}\sum_{i=n+1}^{2n} x_i,\right.$$
$$\left.\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{S_{i-n,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}}\right]. \tag{5}$$

Формуючи розширений фондовий портфель, інвестор передусім обов'язково фіксує нормативний параметр – нижню межу дохідності портфеля. У випадку, який розглядається, нижню межу дохідності портфеля задамо у вигляді нечіткого прямокутного числа

$$r^P = [r_{min}^P, r_{max}^P]. \tag{6}$$

Оскільки ступінь ризику інвестицій у портфель залежатиме від того, наскільки дохідність портфеля буде нижчою від нормативної, то очевидно, що рівень ризику інвестицій у портфель з дохідністю (5) буде визначатися взаємним розміщенням інтервалів (5), (6). З огляду на це ризик того, що дохідність розширеного фондового портфеля, який розглядається, буде нижчою (вищою) від нормативної, можна обчислити за такою формулою [7]:

$$R = \begin{cases} 0, & r^P_{max} \leqslant r_{min}, \\ \dfrac{(r^P_{max} - r_{min})^2}{2(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min})}, & r^P_{min} < r_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max}, \\ \dfrac{r^P_{min} + r^P_{max} - 2r_{min}}{2(r_{max} - r_{min})}, & r_{min} \leqslant r^P_{min} < r^P_{max} \leqslant r_{max}, \\ \dfrac{2r^P_{max} - r_{min} - r_{max}}{2(r^P_{max} - r^P_{min})}, & r^P_{min} \leqslant r_{min} < r_{max} \leqslant r^P_{max}, \\ 1 - \dfrac{(r_{max} - r^P_{min})^2}{2(r^P_{max} - r^P_{min})(r_{max} - r_{min})}, & r_{min} \leqslant r^P_{min} \leqslant r_{max} \leqslant r^P_{max}, \\ 1, & r_{max} \leqslant r^P_{min}. \end{cases} \tag{7}$$

За цільову функцію в задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, форсованих call-опціонами європейського стилю, природно вибрати верхню межу його дохідності. Оптимізувати портфель у такому формулюванні означає максимізувати максимум його дохідності в момент часу T за заданого (фіксованого) значення ризику $R = R_0$. У цьому зв'язку формалізація задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій і call-опціонів європейського стилю виглядатиме так:

$$r_{min}(x_i) = \sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{S_{i-n,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}} \to \max, \tag{8}$$

$$\sum_{i=1}^{2n} x_i = 1, \tag{9}$$

$$0 \leqslant x_i \leqslant 1, \tag{10}$$

$$R(x_1, ..., x_{2n}, r^P_{min}, r^P_{max}) = R_0. \tag{11}$$

Для побудови розв'язку задачі (8)-(11) в загальному випадку треба врахувати те, що умова (11) має нестандартний ("гіллястий") вигляд: за відомої структури розширеного фондового портфеля притаманний йому рівень ризику обчислюють на підставі однієї з гілок формули (7) залежно від взаємного розміщення інтервалів дохідності (5), (6). Якщо ж структуру розширеного фондового портфеля досліджувати шляхом розв'язування задачі оптимізації, то кожну з гілок формули (7) потрібно прийняти за обмеження на шуканий розв'язок. Тоді задача (8)-(11) розбивається на шість задач математичного програмування, для кожної з яких умову (11) треба конкретизувати на підставі співвідношення (7).

Для теоретично безризикового портфеля ($R_0 = 0$) умову, еквівалентну (11), запишемо у вигляді

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,min} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} - \frac{1}{T} \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \geqslant r_{max}^P. \tag{12}$$

Аналогічно, для портфеля з ризиком $R_0 = 1$ замість умови (11) треба розглянути умову

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \frac{S_{i,max} - S_{i,0}}{T \cdot S_{i,0}} + \sum_{i=n+1}^{2n} x_i \frac{S_{i-n,max} - X_{i,c} - C_{i,c}}{T \cdot C_{i,c}} \leqslant r_{min}^P. \tag{13}$$

Для визначення складових оптимального за дохідністю розширеного фондового портфеля у випадку, коли ризик портфеля $R_0 \in (0,1)$, умову (11) в задачі оптимізації варто конкретизувати так.

Якщо

$$r_{min}^P < r_{min} < r_{max}^P \leqslant r_{max},$$

то (11) треба замінити такими умовами:

$$\begin{gathered}(r_{max}^P - r_{min})^2 = 2R_0(r_{max}^P - r_{min}^P)(r_{max} - r_{min}),\\ r_{min} > r_{min}^P, \qquad r_{min} < r_{max}^P, \qquad r_{max} \geqslant r_{max}^P.\end{gathered} \tag{14}$$

Коли

$$r_{min} \leqslant r_{min}^P < r_{max}^P \leqslant r_{max},$$

то замість умови (11) потрібно розглянути такі умови:

$$\begin{gathered}r_{min}^P + r_{max}^P - 2r_{min} = 2R_0(r_{max} - r_{min}),\\ r_{min} \leqslant r_{min}^P, \qquad r_{min}^P < r_{max}^P, \qquad r_{max} \geqslant r_{max}^P.\end{gathered} \tag{15}$$

У випадку

$$r_{min}^P \leqslant r_{min} < r_{max} \leqslant r_{max}^P$$

умова (11) еквівалентна умовам

$$\begin{gathered}2r_{max}^P - r_{min} - r_{max} = 2R_0(r_{max}^P - r_{min}^P),\\ r_{min} \geqslant r_{min}^P, \qquad r_{min} < r_{max}, \qquad r_{max} \leqslant r_{max}^P.\end{gathered} \tag{16}$$

Якщо

$$r_{min} \leqslant r_{min}^P \leqslant r_{max} \leqslant r_{max}^P,$$

то умову (11) варто замінити системою умов

$$\begin{gathered}(r_{max} - r_{min}^P)^2 = 2(1 - R_0)(r_{max}^P - r_{min}^P)(r_{max} - r_{min}),\\ r_{min} \leqslant r_{min}^P, \qquad r_{max} \leqslant r_{max}^P, \qquad r_{max} \geqslant r_{min}^P.\end{gathered} \tag{17}$$

Зауважимо, що співвідношення (12)-(17) явно записуються через невідомі частки x_i ($i = \overline{1,2n}$) відповідних компонент розширеного фондового портфеля, оскільки через ці параметри явно виражаються функції r_{min}, r_{max} з (5).

Отже, за заданих значень параметрів $S_{i,0}$, $S_{i,min}$, $S_{i,max}$ ($i = \overline{1,n}$), $C_{i,c}$ ($i = \overline{n+1,2n}$), r_{min}^P, r_{max}^P, T, R_0, складові x_i ($i = \overline{1,2n}$) розширеного фондового портфеля акцій, форсованих call-опціонами європейського стилю, повинні бути розв'язком однієї з задач (8), (9), (10), (12)-(8), (9), (10), (17) залежно від взаємного розміщення інтервалів (5), (6). Для побудови межі ефективності цього портфеля в системі координат "ризик недопустимо низької дохідності портфеля – максимум очікуваної дохідності портфеля" треба розв'язати відповідну задачу оптимізації, змінюючи параметр R_0 в межах $R_{0,min} \leqslant R_0 \leqslant R_{0,max}$, де $R_{0,min}$ – ризик збірки "акція з найменшим значенням правої межі дохідності – call-опціон, який 100% форсує цю акцію", а $R_{0,max}$ – ризик збірки "акція з найбільшим значенням правої межі дохідності – call-опціон, який 100% форсує цю акцію".

Висновки. Заміна стандартного способу моделювання дохідності активів (як випадкових величин) нечіткими значеннями дохідностей цих активів допомогла сформулювати й описати схему розв'язування задачі оптимізації розширеного фондового портфеля акцій, форсованих call-опціонами європейського стилю. Побудова розв'язку задачі оптимізації зводиться до розв'язування деякої задачі математичного програмування. Це дає змогу не тільки досить легко побудувати межу ефективності портфеля в системі координат "ризик недопустимо низької дохідності портфеля – максимум очікуваної дохідності портфеля", а й ефективно проводити дослідження ролі call-опціонів у розширеному фондовому портфелі.

1. *Markovitz H.M.* Portfolio Selection / *Markovitz H.M.* // Journal of Finance. – 1952. – Vol. 7. – P. 77-91.
2. *Sharpe W.F.* Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium Under Conditions of Risk / *Sharpe W.F.* // Journal of Finance. – 1964. – Vol. 19. – P. 425-442.
3. *Заде Л.А.* Понятие лингвистической переменной и его применение к принятию приближенних решений / *Заде Л.А.* – М., 1976.
4. *Недосекин А.О.* Оптимизация фондового портфеля, содержащего call-опционы / *Недосекин А.О.* // Банки и Риски. – 2005. – № 1. (http://www.hedging.ru/stored/ad/9.pdf).
5. *Сявавко М.* Математичне моделювання за умов невизначеності / *Сявавко М., Рибицька О.* – Львів, 2000.
6. *Іващук Н.Л.* Ринок деривативів: економіко-математичне моделювання процесів ціноутворення / *Іващук Н.Л.* – Львів, 2008.
7. *Недосекин А.О.* Оценка риска инвестиций для произвольно-размытых факторов инвестиционного проекта / *Недосекин А.О., Кокош А.М.* (http://sedok.narod.ru/sc_group_2003.html).

SOME OPTIMIZATION'S PROBLEM OF THE STOCK'S PORTFOLIO, WHICH ARE COVERED BY CALL-OPTIONS

Mykola BUGRIY

Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Using fuzzy-plural theory, we find the method of solving of the optimization's problems for the portfolio of the stocks. This stocks are covered by the call-options of European style.

Key words: extended portfolio, call-option.

ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ ОПТИМИЗАЦИИ ФОНДОВОГО ПОРТФЕЛЯ АКЦИЙ, ПОКРЫТЫХ CALL-ОПЦИОНАМИ

Николай БУГРИЙ

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: ol_buhrii@i.ua

Используя нечётно-множественную теорию предлагается метод решения задачи оптимизации расшыренного фондового портфеля акций, форсированных call-опционами европейского стиля.

Ключевые слова: расшыренный фондовый портфель, call-опцион.

Стаття надійшла до редколегії 22.09.2010

Прийнята до друку 22.12.2010