ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ | *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2010. | *Ser. Mech. Math. 2010.*
Вип. 72. С. 10–25 | *Is. 72. P. 10–25*

УДК 517.95

ОДНОЗНАЧНА РОЗВ'ЯЗНІСТЬ ЗАДАЧІ БЕЗ ПОЧАТКОВИХ УМОВ ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛІНІЙНИХ ЕЛІПТИКО-ПАРАБОЛІЧНИХ РІВНЯНЬ

Микола БОКАЛО

Львівський національний університет імені Івана Франка,
79000 Львів, вул. Університетська, 1
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

Доведено існування єдиного узагальненого розв'язку задачі без початкових умов для нелінійних анізотропних еліптико-параболічних рівнянь другого порядку в необмежених за просторовими змінними областях. Рівняння мають показники нелінійності, які залежать від точок області визначення рівнянь та напряму диференціювання, а їхні узагальнені розв'язки беруться з узагальнених просторів Лебега-Соболєва. У цьому разі не накладаються умови на поведінку розв'язків і зростання вихідних даних на нескінченності.

Ключові слова: нелінійне рівняння, еліптико-параболічне рівняння, вироджене параболічне рівняння, задача без початкових умов, узагальнений простір Лебега-Соболєва, необмежена область.

Вступ. Нехай Ω – необмежена область в арифметичному просторі $\mathbb{R}^n$ ($n \in \mathbb{N}$) з евклідовою нормою $|\cdot|$ ($|x| := (|x_1|^2 + ... + x_n|^2)^{1/2}$ для $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$). Припускаємо, що межа $\partial\Omega$ області Ω є C^1 многовидом розмірності $n-1$. Нехай Γ_0 – замикання відкритої множини на $\partial\Omega$ (зокрема, Γ_0 може бути порожньою множиною або збігатися з $\partial\Omega$), $\Gamma_1 := \partial\Omega \setminus \Gamma_0; \nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ – одиничний вектор зовнішньої до $\partial\Omega$ нормалі. Позначаємо $S := (-\infty, 0]$, $Q := \Omega \times S$, $\Sigma_0 := \Gamma_0 \times S$, $\Sigma_1 := \Gamma_1 \times S$.

У цій праці досліджують однозначну розв'язність задачі: знайти функцію $u : \overline{\Omega} \times S \to \mathbb{R}$ таку, що

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \sum_{i=1}^{n} \frac{d}{dx_i} a_i(x, t, u, \nabla u) + a_0(x, t, u, \nabla u) = f(x, t), \quad (x, t) \in Q, \tag{1}$$

$$u(y, t) = 0, \quad (y, t) \in \Sigma_0, \tag{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i(y, t, u, \nabla u)\, \nu_i(y) = 0, \quad (y, t) \in \Sigma_1. \tag{3}$$

Далі цю задачу коротко називатимемо *задачею (1)-(3)*. У цьому разі вважаємо, що $b \geqslant 0$ на Ω і рівність $b = 0$ може виконуватися на підмножині Ω ненульової міри, а просторова частина диференціального виразу в лівій частині рівняння (1) є еліптичною. Отож, рівняння (1) можна назвати *еліптико-параболічним*.

Прикладами рівнянь типу (1), які тут вивчають, є

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \sum_{i=1}^{n}\Big(\widehat{a}_i(x,t)|u_{x_i}|^{p_i(x)-2}u_{x_i}\Big)_{x_i} + \widehat{a}_0(x,t)|u|^{p_0(x)-2}u = f(x,t), \qquad (4)$$

де $\widehat{a}_i$ $(i=\overline{0,n})$ – деякі вимірні додатні та відділені від нуля функції, $p_i > 1$ $(i = \overline{0,n})$ – вимірні обмежені функції (так звані показники нелінійності), f, u – відповідно задана і невідома функції.

В останні десятиліття дуже активно вивчають нелінійні диференціальні рівняння зі змінними показниками нелінійності, прикладами яких є рівняння (4). Це пов'язано з тим, що такі рівняння виникають при математичному моделюванні різних типів фізичних процесів, зокрема, описують потоки електрореологічних речовин, процеси відновлення зображень, електричний струм у кондукторі під впливом змінного температурного поля [18].

Як добре відомо, крайові задачі для лінійних еліптичних і параболічних рівнянь в необмежених областях є коректними, якщо на їхні розв'язки та вихідні дані додатково до крайових умов накладені певні обмеження на зростання на нескінченності. Така ж ситуація з крайовими задачами в необмежених областях і для нелінійних еліптичних та параболічних рівнянь з певних класів [1], [7], [12]. Проте є рівняння, крайові задачі для яких однозначно розв'язні без будь-яких умов на нескінченності [3, 4, 6, 8, 13, 14, 15, 16]. У [14] вперше отримано такий результат для рівняння (4) при $p_0 = \mathrm{const} > 2$ і $p_1 = \ldots = p_n = 2$. Нові класи рівнянь з таким ефектом отримали в багатьох працях. Зокрема, це було зроблено завдяки рівнянням зі змінними показниками нелінійності. У праці [2] розглянуто крайові задачі для квазілінійних еліптичних рівнянь та їхніх систем другого порядку, що є узагальненням рівняння (1) з $b = 0$, $p_i = 2$ $(i = \overline{1,n})$, $p_0(\cdot) > 2$ і доведено коректність таких задач у класах функцій без умов на нескінченності. У праці [4] такий самий результат отримано стосовно узагальнень рівняння (1) з $b = 0$, $1 < p_i(\cdot) \leqslant 2$ $(i = \overline{1,n})$, $p_0(\cdot) \geqslant 2$. Подібні результати отримані і для параболічних рівнянь [3] (див. також бібліографію).

У цій статті, зробивши додаткові припущення на вихідні дані, доведено однозначну розв'язність задач без початкових умов без обмежень на нескінченності для одного класу нелінійних анізотропних еліптико-параболічних рівнянь. Отримані тут результати є узагальненням і доповненням результатів [3] стосовно рівнянь другого порядку.

Ми розглядатимемо узагальнені розв'язки задачі (1)-(3), а для їхнього означення та дослідження нам будуть потрібні деякі лінійні локально опуклі простори, які ми й введемо зараз.

Нехай G – довільна область в $\mathbb{R}^m$, де $m = n$ або $m = n+1$, а $r \in L_\infty(G)$ і $r(z) \geqslant 1$ для м.в. $z \in G$. На просторі $C_{\mathrm{c}}(\overline{G}) := \{v \in C(\overline{G}) \,|\, \operatorname{supp} v$ – обмежена множина$\}$ вводимо норму

$$\|v\|_{L_{r(\cdot)}} := \inf\{\lambda > 0 \ : \ \rho_{G,r}(v/\lambda) \leqslant 1\},$$

де $\rho_{G,r}(v) := \int\limits_G |v(z)|^{r(z)}\,dz$. (Зауважимо таке: коли $r(z) = r_0 \equiv \mathrm{const} \geqslant 1$ для м.в. $z \in G$, то $\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(G)} = \|\cdot\|_{L_{r_0}(G)}$.) Поповнення отриманого нормованого лінійного простору позначимо через $L_{r(\cdot)}(G)$ і назвемо його *узагальненим простором Лебега* (див., наприклад, [17]). Зауважимо таке: якщо $\operatorname*{ess\,inf}\limits_{z\in\Omega} r(z) > 1$, то спряжений до $L_{r(\cdot)}(G)$ можна ототожнити з $L_{r^*(\cdot)}(G)$, де $r^*(z)$, $z \in G$, – функція, яка визначена рівністю $\frac{1}{r(z)} + \frac{1}{r^*(z)} = 1$, $z \in G$.

Якщо G є необмеженою областю, то через $L_{r(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{G})$ позначимо поповнення $C(\overline{G})$ в топології, що породжена системою півнорм: $\{\|\cdot\|_{L_{r(\cdot)}(G')}\,|\,G' \in Bd(G)\}$, де $Bd(G)$ – множина всіляких можливих обмежених підобластей G.

Нехай $p = (p_0,\ldots,p_n)$ – вектор-функція, яка задовольняє умову:

$\mathbf{P_1}$) для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція $p_i : \Omega \to \mathbb{R}$ – вимірна,
$\operatorname*{ess\,inf}\limits_{x\in\Omega} p_i(x) > 1, \quad \operatorname*{ess\,sup}\limits_{x\in\Omega} p_i(x) < \infty.$

Позначимо через $W^1_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_0)$ поповнення простору $C^1(\overline{\Omega},\Gamma_0) := \big\{v \in C^1(\overline{\Omega})\big|\; v\big|_{\Gamma_0} = 0\big\}$ в топології, яка породжена системою півнорм

$$\big\{\|v\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega')} + \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega')} \;\;|\;\; \Omega' \in Bd(\Omega)\big\}.$$

Нехай $W^1_{p(\cdot),\,\mathrm{c}}(\Omega,\Gamma_0)$ – підпростір простору $W^1_{p(\cdot),\,loc}(\overline{\Omega},\Gamma_0)$, складений з функцій з обмеженими носіями.

Нехай

$$C(S;L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})) := \{v : S \to L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})\,|\,v \in C([-l,0];L_2(\Omega'))\;\forall\,l \in \mathbb{N},\;\forall\,\Omega' \in Bd(\Omega)\}$$

з системою півнорм $\{\|\cdot\|_{C([-l,0];L_2(\Omega'))}\,|\;l \in \mathbb{N},\;\Omega' \in Bd(\Omega)\,\}$.

Введемо лінійний локально опуклий простір

$$\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}} := \big\{u \in (S \to W^1_{p(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega},\Gamma_0)) \;\;|$$

$$u \in L_{p_0(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}),\quad u_{x_i} \in L_{p_i(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}) \quad (i = \overline{1,n}),\quad b^{1/2}u \in C(S;L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))\big\}$$

з топологією, яка породжена системою півнорм

$$\big\{\|u\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega'\times(-l,0))} + \sum_{i=1}^{n} \|u_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega'\times(-l,0))} + \sup_{t\in[-l,0]} \|b^{1/2}(\cdot)u(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega')} \;\;|$$

$$l \in \mathbb{N},\;\Omega' \in Bd(\Omega)\,\big\}.$$

1. Формулювання задачі й основних результатів. Спочатку дамо означення узагальненого розв'язку задачі (1)-(3), а для цього введемо відповідні обмеження на вихідні дані (класи вихідних даних).

Нехай $\mathbb{B}$ – множина визначених на Ω функцій b, які задовольняють умову

B) $\quad b \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}),\;\; b \geq 0$ на Ω.

Нехай $p = (p_0,\ldots,p_n)$ – вектор-функція, яка задовольняє умову $\mathbf{P_1}$. Під $\mathbb{A}_p$ розумітимемо множину впорядкованих наборів дійснозначних функцій $(a_0,a_1,\ldots,a_n)$, які визначені на $\Omega\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ і задовольняють умови:

$\mathbf{A_1}$) для кожного $i \in \{0,1,\ldots,n\}$ функція $a_i(x,t,s,\xi)$, $(x,t,s,\xi) \in Q\times\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$, є каратеодорівською, тобто для майже всіх $(x,t) \in Q$ функція $a_i(x,t,\cdot,\cdot) : \mathbb{R}^{1+n} \equiv$

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ є неперервною і для будь-яких $(s,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}$ функція $a_i(\cdot,\cdot,s,\xi):Q\to\mathbb{R}$ – вимірна;

$\mathbf{A_1^*}$) $a_i(x,t,0,0)=0$ $(i=\overline{0,n})$ для майже всіх $(x,t)\in\overline{Q}$;

$\mathbf{A_2}$) для кожного $i\in\{0,1,\dots,n\}$, майже всіх $(x,t)\in Q$ і будь-яких $(s,\xi)\in\mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$|a_i(x,t,s,\xi)|\leqslant h^a_{1,i}(x,t)\big(|s|^{p_0(x)/p_i^*(x)}+\sum_{j=1}^n|\xi_j|^{p_j(x)/p_i^*(x)}\big)+h^a_{2,i}(x,t),$$

де $h^a_{1,i}\in L_{\infty,\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $h^a_{2,i}\in L_{p\,^*_i(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $\;1/p_i(x)+1/p_i^*(x)=1$.

Нехай

$$\mathbb{F}_{p,\mathrm{loc}}\;:=\;L_{p_0^*(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}).$$

Означення 1. *Нехай $b\in\mathbb{B}$, $(a_0,a_1,...,a_n)\in\mathbb{A}_p$, $f\in\mathbb{F}_{p,loc}$. Скажемо, що функція $u\in\mathbb{U}_{p,loc}$ є узагальненим розв'язком задачі (1)–(3), якщо виконується інтегральна рівність*

$$\iint\limits_Q\Big\{\sum_{i=1}^n a_i(x,t,u,\nabla u)\,\psi_{x_i}\,\varphi+a_0(x,t,u,\nabla u)\,\psi\,\varphi-b(x)\,u\,\psi\,\varphi'\Big\}\,dxdt=\iint\limits_Q f\,\psi\,\varphi\,dxdt \tag{5}$$

для будь-яких $\psi\in W^1_{p(\cdot),\,c}(\Omega,\Gamma_0)$, $\varphi\in C^1_0(-\infty,0)$.

Мета нашої праці – за додаткових умов на вихідні дані довести однозначну розв'язність задачі (1)-(3).

Нехай $k\in\{1,\dots,n\}$ – число таке, що множина $\Omega\cap\{x\in\mathbb{R}^n:x_1^2+\ldots+x_k^2<R^2\}$ обмежена для будь-якого $R>0$. Зокрема, коли $\Omega=\Omega_1\times\Omega_2$, де Ω_1 – необмежена область в $\mathbb{R}^k$; Ω_2 – обмежена область в $\mathbb{R}^{n-k}$, то k – саме те, про яке тільки що говорилося.

Вважатимемо, що $0\in\Omega$ і позначимо для будь-якого $R>0$ через Ω_R зв'язну компоненту множини $\Omega\cap\{x\in\mathbb{R}^n:x_1^2+\ldots+x_k^2<R^2\}$, що містить 0. Нехай $\alpha>0$, $\beta\geqslant0$ – найменші з чисел, для яких виконуються, відповідно, нерівності

$$\mathrm{mes}_n\,\{\Omega_R\}\leqslant c_1R^\alpha,\quad R>0, \tag{6}$$

$$\mathrm{mes}_n\{\Omega_R\cap\mathrm{supp}\,b\}\leqslant c_2R^\beta,\quad R>0, \tag{7}$$

де через $\mathrm{mes}_n\{G\}$ позначається міра Лебега множини G в $\mathbb{R}^n$, $c_1\geqslant0,c_2\geqslant0$ – деякі сталі.

Стосовно вектор-функції $p=(p_0,\dots,p_n)$ додатково до умови $\mathbf{P_1}$ зробимо ще таке припущення:

$\mathbf{P_2}$) $\;p_0(x)\geqslant2$ та $\max\limits_{i\in\{1,\dots,k\}}p_i(x)\leqslant2$ для майже всіх $x\in\Omega$;

$$\min_{i\in\{1,\dots,k\}}\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega}\big[p_0(x)-p_i(x)\big]>0.$$

Позначимо через $\mathbb{A}_p^*$ підмножину $\mathbb{A}_p$, елементи якої задовольняють ще такі умови:

$\mathbf{A_3}$) для майже всіх $(x,t)\in Q$ та довільних $(s_1,\xi^1),(s_2,\xi^2)\in\mathbb{R}^{1+n}$

$$\sum_{i=1}^n(a_i(x,t,s_1,\xi^1)-a_i(x,t,s_2,\xi^2))(\xi_i^1-\xi_i^2)+(a_0(x,t,s_1,\xi^1)-a_0(x,t,s_2,\xi^2))(s_1-s_2)\geqslant$$
$$\geqslant K_1|s_1-s_2|^{q(x)},$$

де $K_1 > 0$ – деяка стала; q – вимірна функція така, що $2 \leqslant q(x) \leqslant p_0(x)$ для майже всіх $x \in \Omega$, $q_b^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in \Omega\cap \operatorname{supp} b} q(x) > 2$, $q_b^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in \Omega\cap \operatorname{supp} b} q(x) < 2(\beta-1)/\beta$ та, крім того, для кожного $i \in \{1,\dots,k\}$ $\quad r_i^- := \operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} r_i(x) > \alpha+1$, $r_i^+ := \operatorname*{ess\,sup}_{x\in\Omega} r_i(x) < +\infty$, де α, β – сталі відповідно з умов (6) та (7), $r_i(x) := \frac{q(x)p_i(x)}{q(x)-p_i(x)}$, $x \in \Omega$;

A$_4$) для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(s,\xi) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\sum_{i=1}^n a_i(x,t,s,\xi)\,\xi_i + a_0(x,t,s,\xi)\,s \geqslant K_2\Big(\sum_{i=1}^n |\xi_i|^{p_i(x)} + |s|^{p_0(x)}\Big) - h_3^a(x,t),$$

де $K_2 > 0$ – деяка стала, $h_3^a \in L_{1,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $h_3^a \geqslant 0$;

A$_5$) для майже всіх $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(s_1,\xi^1),(s_2,\xi^2) \in \mathbb{R}^{1+n}$

$$\sum_{i=1}^k |a_i(x,t,s_1,\xi^1) - a_i(x,t,s_2,\xi^2)|^{p_i^*(x)} \leqslant$$

$$\leqslant K_3\Big[\sum_{i=1}^k (a_i(x,t,s_1,\xi^1) - a_i(x,t,s_2,\xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) +$$

$$+(a_0(x,t,s_1,\xi^1) - a_0(x,t,s_2,\xi^2))(s_1 - s_2)\Big],$$

де $K_3 > 0$ – деяка стала.

Зауваження 1. Опираючись на результати [4], неважко переконатися, що підмножиною $\mathbb{A}_p^*$ є множина $\mathbb{A}_p^1$ тих елементів $(a_0,\dots,a_n)$ з $\mathbb{A}_p$, які задовольняють умови

A$'_3$) для кожного $i \in \{1,\dots,n\}$ $a_i(x,t,s,\xi) \equiv a_i(x,t,\xi_i)$, $(x,t,s,\xi) \in Q\times\mathbb{R}^{1+n}$, та для майже всіх $(x,t) \in Q$ існує похідна $\partial a_i(x,t,\xi_i)/\partial\xi_i$, $\xi_i \neq 0$, і виконуються нерівності

$$A_i|\xi_i|^{p_i(x)-2} \leqslant \partial a_i(x,t,\xi_i)/\partial\xi_i \leqslant \widetilde{A}_i|\xi_i|^{p_i(x)-2}, \qquad \xi_i \neq 0,$$

якщо $i \in \{1,\dots,k\}$, якщо $i \in \{k+1,\dots,n\}$, то

$$\partial a_i(x,\xi_i)/\partial\xi_i \geqslant A_i|\xi_i|^{p_i(x)-2},\ \xi_i \neq 0, \qquad |a_i(x,\xi_i)| \leqslant \widetilde{A}_i|\xi_i|^{p_i(x)-1} + h_i^a(x,t),\ \xi_i \in \mathbb{R},$$

де $A_i > 0$, $\widetilde{A}_i > 0$, $\sigma_i \geqslant 0$ – деякі сталі, $h_i^a \in L_{p_i^*(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$;

A$'_4$) $a_0(x,t,s,\xi) \equiv a_0(x,t,s), (x,t,s,\xi) \in Q\times\mathbb{R}^{1+n}$, і для майже всіх $(x,t) \in Q$ існує похідна $\partial a_0(x,s)/\partial s$, $s \neq 0$, та виконуються нерівності

$$\partial a_0(x,t,s)/\partial s \geqslant A_0|s|^{p_0(x)-2} + A'_0,\ s \neq 0, \quad |a_0(x,t,s)| \leqslant \widetilde{A}_0|s|^{p_0(x)-1} + h_0^a(x,t),\ s \in \mathbb{R},$$

де A_0, $\widetilde{A}_0$ – додатні сталі; A'_0 – невід'ємна стала, причому $A'_0 = 0$ тільки в тому випадку, коли $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega\cap\operatorname{supp} b} p_0(x) > 2$, $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega\cap\operatorname{supp} b} p_0(x) < 2(\beta+1)/\beta$ та $\operatorname*{ess\,inf}_{x\in\Omega} \frac{p_0(x)p_i(x)}{p_0(x)-p_i(x)} > \alpha+1$ (α,β – сталі відповідно з умов (6)), (7)), а h_0^a – функція з $L_{p_0^*(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})$.

Прикладом елемента з класу $\mathbb{A}_p^1$ є набір функцій $(\widehat{a}_0(x,t)\,|s|^{p_0(x)-2}\,s$, $\widehat{a}_1(x,t)\,|\xi_1|^{p_1(x)-2}\,\xi_1,\ \dots,\ \widehat{a}_n(x,t)\,|\xi_n|^{p_n(x)-2}\,\xi_n)$, де $\widehat{a}_i \in L_\infty(Q)$ – додатні і відділені від нуля функції. Тоді рівняння (1) набуде вигляду (4).

Зауваження 2. Іншою підмножиною $\mathbb{A}_p^*$ є множина $\mathbb{A}_p^2$ тих елементів $(a_0, \ldots, a_n)$ з $\mathbb{A}_p$ при $p_1(x) = \ldots = p_k(x) = 2$ для м.в. $x \in \Omega$, які задовольняють умову $\mathbf{A_4}$ та умови

$\mathbf{A_3''}$) для м.в. $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{i=1}^{k} |a_i(x,t,s_1,\xi_1) - a_i(x,t,s_2,\xi_2)| \leq D_1 \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^1 - \xi_i^2| + D_2 |s_1 - s_2|,$$

де D_1, D_2 – невід'ємні сталі;

$\mathbf{A_4''}$) для м.в. $(x,t) \in Q$ і будь-яких $(s_1, \xi^1), (s_2, \xi_2) \in \mathbb{R}^{1+n}$ виконується нерівність

$$\sum_{j=1}^{n}(a_i(x,t,s_1,\xi^1) - a_i(x,t,s_2,\xi^2))(\xi_i^1 - \xi_i^2) + (a_0(x,t,s_1,\xi^1) - a_0(x,t,s_2,\xi^2))(s_1 - s_2) \geq$$

$$\geq K_4 \sum_{i=1}^{k} |\xi_i^1 - \xi_i^2|^2 + K_5 |s_1 - s_2|^2 + K_6 |s_1 - s_2|^{p_0(x)},$$

де $K_4 > 0, K_5 \geqslant 0, K_6 > 0$ – деякі сталі, причому $K_5 = 0$ тільки в тому випадку, коли $D_2 = 0$, $\operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega \cap \operatorname{supp} b} p_0(x) > 2$, $\operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega \cap \operatorname{supp} b} p_0(x) < 2(\beta+1)/\beta$ та $\operatorname*{ess\,inf}_{x \in \Omega} \frac{p_0(x) p_i(x)}{p_0(x) - p_i(x)} > \alpha + 1$ (α, β – сталі, відповідно, з умов (6)), (7)).

Прикладом рівнянь вигляду (1), для якого коефіцієнти $(a_0, \ldots, a_n)$ належать класу $\mathbb{A}_p^2$, є рівняння

$$\frac{\partial}{\partial t}(b(x)u) - \sum_{i,j=1}^{k} \left(\widehat{a}_{ij}(x,t) u_{x_j}\right)_{x_i} + \sum_{i=k+1}^{n} \left(\widehat{a}_i(x,t) |u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i}\right)_{x_i} +$$

$$+ \widehat{a}_*(x,t) u + \widehat{a}_0(x,t) |u|^{p_0(x)-2} u = f(x,t), \tag{8}$$

де $\widehat{a}_{ij}$ $(i,j = \overline{1,k})$ – обмежені функції, які задовольняють умову: існує $\lambda > 0$ таке, що $\sum\limits_{i,j=1}^{k} \widehat{a}_{ij}(x,t) \xi_i \xi_j \geqslant \lambda \sum_{i=1}^{k} \xi_i^2$ для м.в. $(x,t) \in Q$ і будь-яких $\xi_i \in \mathbb{R}$ $(i = \overline{1,k})$.

Теорема 1. *Нехай $b \in \mathbb{B}, a \in \mathbb{A}_p^*$, $f \in \mathbb{F}_{loc}$. Тоді існує єдиний узагальнений розв'язок задачі (1)-(3), причому для будь-яких R, R_0 таких, що $R > R_0 > 0, R \geqslant 1$, виконується оцінка*

$$\max_{t \in [-R_0, 0]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} b(x) |u(x,t)|^2 \, dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{x_i}(x,t)|^{p_i(x)} + |u(x,t)|^{p_0(x)} \Big] \, dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_1 \Big(R/(R - R_0) \Big)^{\mu} \Big\{ R^{\alpha+1-\theta} + \varkappa R^{\beta+1-q_b^+/(q_b^+-2)} +$$

$$+ \iint\limits_{Q_R} |f(x,t)|^{p_0^*(x)} \, dxdt + \iint\limits_{Q_R} h_3^a(x,t) \, dxdt \Big\}, \tag{9}$$

де $\varkappa := \max \Big\{ \big(\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} b(x) \big)^{q_b^-/(q_b^- - 2)}, \big(\operatorname*{ess\,sup}_{x \in \Omega} b(x) \big)^{q_b^+/(q_b^+ - 2)} \Big\}$,

$\mu := \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} r_i^+ + q_b^-/(q_b^- - 2)$, $\theta := \min\limits_{1 \leqslant i \leqslant k} r_i^-$,

C_1 *– стала, яка залежать тільки від* $K_1, K_2, K_3, c_1, c_2, r_i^+$ $(i = \overline{1,k})$, q_b^-.

2. Допоміжні твердження.

Зауваження 3. Для довільних $a \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, $\nu > 1$ правильна нерівність

$$a\,c \leqslant \varepsilon a^{\nu} + \varepsilon^{1-\nu^*}\, c^{\nu^*}, \tag{10}$$

яка легко випливає з нерівності Юнга [9]: $a\,c \leqslant \frac{a^{\nu}}{\nu} + \frac{c^{\nu^*}}{\nu^*}$, $\nu^* = \frac{\nu}{\nu-1}$.

Зауваження 4. Для будь-яких $a \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, $d \geqslant 0$, $\varepsilon > 0$, $\nu_1 > 1$, $\nu_2 > 1$, $\nu_3 > 1$, $\frac{1}{\nu_1} + \frac{1}{\nu_2} + \frac{1}{\nu_3} = 1$ правильна нерівність

$$a\,c\,d \leqslant \varepsilon a^{\nu_1} + \varepsilon c^{\nu_2} + \varepsilon^{1-\nu_3}\, d^{\nu_3}, \tag{11}$$

яка легко випливає з нерівності Юнга [9]: $a\,c\,d \leqslant \frac{a^{\nu_1}}{\nu_1} + \frac{c^{\nu_2}}{\nu_2} + \frac{d^{\nu_3}}{\nu_3}$.

Лема 1. *Нехай $R > 0$, τ_1, τ_2 $(\tau_1 < \tau_2)$ – довільні фіксовані числа, $b \in \mathbb{B}$. Припустимо, що функція $v \in \big((\tau_1,\tau_2) \to W^1_{p(\cdot),\,loc}(\overline{\Omega},\Gamma_0)\big) \cap L_{p_0(\cdot),loc}\big(\overline{\Omega \times (\tau_1,\tau_2)}\big)$, $v_{x_i} \in L_{p_i(\cdot),loc}\big(\overline{\Omega \times (\tau_1,\tau_2)}\big)$ $(i = \overline{1,n})$, така, що для деяких функцій $g_0 \in L_{p_0^*(\cdot),loc}\big(\overline{\Omega \times (\tau_1,\tau_2)}\big)$, $g_i \in L_{p_i^*(\cdot),loc}\big(\overline{\Omega \times (\tau_1,\tau_2)}\big)$ $(i = \overline{1,n})$ виконується рівність*

$$\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\int\limits_{\Omega_R} \Big\{\sum_{i=1}^n g_i\,\psi_{x_i}\,\varphi + g_0\,\psi\,\varphi - b\,v\,\psi\,\varphi'\Big\}\,dxdt = 0 \tag{12}$$

для всіх $\varphi \in C_0^1(\tau_1,\tau_2)$, $\psi \in W^1_{p(\cdot),\,loc}(\overline{\Omega},\Gamma_0)$, $supp\,\psi \subset \overline{\Omega_R}$.

Тоді $b^{1/2}v \in C([\tau_1,\tau_2]; L_2(\Omega_{R'}))$ для кожного $R' \in (0,R)$. Крім того, для довільних функцій $\theta \in C^1([\tau_1,\tau_2])$, $w \in C^1(\overline{\Omega})$, $supp\,w \subset \overline{\Omega_R}$, $w \geqslant 0$ і будь-яких чисел t_1, t_2 таких, що $\tau_1 \le t_1 < t_2 \le \tau_2$, виконується рівність

$$\theta(t)\int\limits_{\Omega_R} b(x)|v(x,t)|^2 w(x)\,dx\Big|_{t=t_1}^{t=t_2} - \int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R} b(x)\,|v(x,t)|^2 w(x)\,\theta'(t)\,dxdt +$$

$$+2\int\limits_{t_1}^{t_2}\int\limits_{\Omega_R}\Big\{\sum_{i=1}^n g_i(vw)_{x_i} + g_0\,v\,w\Big\}\theta\,dxdt = 0. \tag{13}$$

Таке твердження доводиться аналогічно, як лема 1 [3].

Лема 2. *Нехай $a \in \mathbb{A}_p^*$, і для кожного $l \in \{1,2\}$ функції $u_l \in \mathbb{U}_{p,loc}$, $f_l \in \mathbb{F}_{p,loc}$ такі, що для деякого числа $R > 1$ виконується рівність (5) з $u = u_l$ для будь-яких $\psi \in W^1_{p(\cdot),c}(\Omega,\Gamma_0)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \overline{\Omega_R}$, $\varphi \in C_0^1(-R,0)$.*

Тоді для будь-якого числа $R_0 \in (0,R)$ правильна нерівність

$$\iint\limits_{Q_{R_0}}\Big[\sum_{i=1}^n \big(a_i(x,t,u_1,\nabla u_1) - a_i(x,t,u_2,\nabla u_2)\big)\big(u_{1,x_i} - u_{2,x_i}\big) +$$

$$+\big(a_0(x,t,u_1,\nabla u_1) - a_0(x,t,u_2,\nabla u_2)\big)\big(u_1 - u_2\big) + |u_1(x) - u_2(x)|^{q(x)}\Big]\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_2\Big(\frac{R}{R-R_0}\Big)^{\mu}\Big\{R^{\alpha+1-\theta} + \varkappa R^{\beta+1-q_b^+/(q_b^+-2)} + \iint\limits_{Q_R} |f_1(x,t) - f_2(x,t)|^{q^*(x)}\,dxdt\Big\}, \tag{14}$$

де $\mu, \alpha, \varkappa$ – такі ж як в теоремі 1, а C_2 – додатна стала, яка залежить тільки від $K_1, K_3, c_1, c_2,\ r_i^+\ (i=\overline{1,k}),\ q_b^-$.

Доведення. Введемо в розгляд такі дві зрізувальні функції:

$$\zeta(x') = \begin{cases} (R^2-|x'|^2)/R, & |x'|<R, \\ 0, & |x'|\geqslant R, \end{cases} \qquad \eta(t) = \begin{cases} t+R, & -R\leqslant t\leqslant 0, \\ 0, & t<-R, \end{cases}$$

де $x'=(x_1,\dots,x_k)$, $|x'|=(x_1^2+\ldots+x_k^2)^{1/2}$.

Для заданих $\psi \in W^1_{p(\cdot),c}(\Omega,\Gamma_0)$, $\operatorname{supp}\psi\subset\overline{\Omega_R}, \varphi\in C_0^1(-R,0)$ розглянемо рівність (5) при $u=u_1$ та цю ж рівність при $u=u_2$ і віднімемо ці рівності. У підсумку, прийнявши

$$u_{12}(x,t):=u_1(x,t)-u_2(x,t), \quad f_{12}(x,t):=f_1(x,t)-f_2(x,t),$$

$$a_{i,12}(x,t):=a_i(x,t,u_1(x,t),\nabla u_1(x,t))-a_i(x,t,u_1(x,t),\nabla u_1(x,t)),\ (x,t)\in Q,\ i=\overline{0,n},$$

отримаємо рівність, до якої застосуємо лему 1 з $g_0:=a_{0,12}-f_{12}$, $g_i=a_{i,12}$ $(i=\overline{1,n})$, $w=\zeta^s$, $\theta=\chi^r$, де $s:=\max\limits_{1\leqslant i\leqslant k} r_i^+$, $r:=q_b^-/(q_b^--2)$, $t_1=-R$, $t_2=\tau\in(-R,0]$ – довільне число. Внаслідок простих перетворень отримаємо рівність

$$\eta^r(\tau)\int\limits_{\Omega_R} b(x)|u_{12}(x,\tau)|^2\zeta^s(x)dx + 2\iint\limits_{Q_R^\tau}\Big\{\sum_{i=1}^n a_{i,12}(u_{12})_{x_i}+a_{0,12}u_{12}\Big\}\zeta^s\eta^r\,dxdt =$$

$$= r\iint\limits_{Q_R^\tau} b|u_{12}|^2\zeta^s\eta^{r-1}\,dxdt - 2s\iint\limits_{Q_R^\tau}\Big(\sum_{i=1}^k a_{i,12}\,\zeta_{x_i}\Big)u_{12}\,\zeta^{s-1}\eta^r dxdt +$$

$$+2\iint\limits_{Q_R^\tau} f_{12}\,u_{12}\,\zeta^s\chi^r\,dxdt, \tag{15}$$

де $Q_R^\tau:=\Omega_R\times(-R,\tau)$ при $\tau\in(-R,0]$.

Зробимо відповідні оцінки інтегралів рівності (15).

З умови $\mathbf{A_3}$ маємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau}\Big\{\sum_{i=1}^n a_{i,12}(u_{12})_{x_i}+a_{0,12}\,u_{12}\Big\}\zeta^s\eta^r dxdt \geqslant K_1\iint\limits_{Q_R^\tau}|u_{12}|^{q(x)}\,\zeta^s\eta^r dxdt. \tag{16}$$

Вибравши для майже кожного $x\in\Omega$ $\nu=q(x)/2$ $(\nu'=q(x)/(q(x)-2))$, $a=|u_{12}|^2\zeta^{s/\nu}\eta^{r/\nu}$, $c=b\zeta^{s/\nu'}\eta^{r/\nu'-1}$, $\varepsilon=\varepsilon_1>0$, на підставі (10) отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} b|u_{12}|^2\zeta^s\eta^{r-1}dxdt \leqslant \varepsilon_1\iint\limits_{Q_R^\tau}|u_{12}|^{q(x)}\zeta^s\eta^r dxdt +$$

$$+\varepsilon_1^{-2/(q_b^--2)}\iint\limits_{Q_R^\tau} b^{q(x)/(q(x)-2)}\zeta^s\eta^{r-q(x)/(q(x)-2)}\,dxdt, \tag{17}$$

де $\varepsilon_1\in(0,1)$ – довільне число.

Аналогічно на підставі нерівності (11), врахувавши оцінку $|\zeta_{x_i}(x')| \leqslant 2$ $(i=\overline{1,k})$ для довільних $x' \in \mathbb{R}^k$, отримаємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^{k} |a_{i,12}|\,|u_{12}|\,|\zeta_{x_i}|\,\zeta^{s-1}\eta^r\,dxdt \leqslant 2\varepsilon_2 \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^{k} |a_{i,12}|^{p_i^*(x)}\zeta^s\eta^r\,dxdt+$$

$$+2\varepsilon_2 k \iint\limits_{Q_R^\tau} |u_{12}|^{q(x)}\zeta^s\eta^r\,dxdt + 2\varepsilon_2^{1-r_i^+} \iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^{k} \zeta^{\,s-r_i(x)}\eta^r\,dxdt, \tag{18}$$

де $\varepsilon_2 \in (0,1)$ – довільне число.

Згідно з умовою $\mathbf{A_5}$ маємо

$$\iint\limits_{Q_R^\tau} \sum_{i=1}^{k} |a_{i,12}|^{p_i^*(x)}\zeta^s\eta^r\,dxdt \leqslant K_3 \iint\limits_{Q_R^\tau} \Big[\sum_{i=1}^{k} a_{i,12}\,(u_{12})_{x_i} + a_{0,12}\,u_{12}\Big]\zeta^s\eta^r\,dxdt. \tag{19}$$

На підставі нерівності (10) та умов на q одержуємо

$$\Big|\iint\limits_{Q_R^\tau} f_{12}u_{12}\zeta^s\eta^r dxdt\Big| \leqslant \varepsilon_3 \iint\limits_{Q_R^\tau} |u_{12}|^{q(x)}\zeta^s\eta^r dxdt + \varepsilon_3^{-1} \iint\limits_{Q_R^\tau} |f_{12}|^{q^*(x)}\zeta^s\eta^r dxdt, \tag{20}$$

де $\varepsilon_3 \in (0,1)$ – довільне число.

З (15) на підставі (16)-(20) за достатньо малих значень $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ отримаємо

$$\eta^r(\tau)\int\limits_{\Omega_R} b(x)|u_{12}(x,\tau)|^2\zeta^s(x)dx + \iint\limits_{Q_R^\tau}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_{i,12}(u_{12})_{x_i} + a_{0,12}\,u_{12} + |u_{12}|^{q(x)}\Big\}\zeta^s\eta^r\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_3\Big[\iint\limits_{Q_R^\tau}\sum_{i=1}^{k}\zeta^{\,s-r_i(x)}\eta^r\,dxdt + \iint\limits_{Q_R^\tau} b^{q(x)/(q(x)-2)}\zeta^s\eta^{r-q(x)/(q(x)-2)}\,dxdt+$$

$$+\iint\limits_{Q_R^\tau}|f_{12}|^{q^*(x)}\zeta^s\eta^r\,dxdt\Big], \tag{21}$$

де C_3 – додатна стала, яка залежить тільки від K_1, K_3, r_i^+ $(i=\overline{1,k}), q_b^-$, а $\tau \in [-R,0]$ – довільне число.

Зауважимо, що $0 \leqslant \zeta(x') \leqslant R$, коли $x' \in \mathbb{R}^k$, $\zeta(x') \geqslant R - R_0$ при $|x'| \leqslant R_0$, $0 \leqslant \eta(t) \leqslant R$, коли $t \leqslant 0$, $\eta(t) \geqslant R - R_0$ при $R_0 \leqslant t \leqslant 0$, де $R_0 \in (0,R)$ – яке-небудь число. Враховуючи це, а також умови (6), (7) та те, що $R \geqslant 1$, з (21) отримаємо потрібне твердження. $\square$

Наслідок 1. *Нехай* $a \in \mathbb{A}_p^*$ *і функції* $\widetilde{u} \in \mathbb{U}_{p,loc}$, $f \in \mathbb{F}_{p,loc}$ *такі, що для деякого числа* $R > 1$ *виконується рівність (5) з* $u = \widetilde{u}$ *для будь-яких* $\psi \in W^1_{p(\cdot),c}(\Omega,\Gamma_0)$, $\operatorname{supp}\psi \subset \subset \overline{\Omega_R}$, $\varphi \in C_0^1(-R,0)$. *Тоді для будь-якого числа* $R_0 \in (0,R)$ *правильна нерівність (9) з* $u = \widetilde{u}$.

Доведення. Доведення цього твердження повторює доведення леми 2, якщо прийняти $u_1 := \widetilde{u}$, $u_2 := 0$. У цьому разі треба замінити нерівність (20) на нерівність

$$\Big|\iint\limits_{Q_R^\tau} f\widetilde{u}\zeta^s\eta^r\,dxdt\Big| \leqslant \varepsilon_3 \iint\limits_{Q_R^\tau} |\widetilde{u}|^{p_0(x)}\zeta^s\eta^r\,dxdt + \varepsilon_3^{-1}\iint\limits_{Q_R^\tau} |f|^{p_0^*(x)}\zeta^s\eta^r\,dxdt,$$

де $\varepsilon_3 \in (0,1)$ – довільне число, та використати умову $\mathbf{A_4}$. □

3. Доведення основного результату. *Перший етап (єдиність розв'язку).* Покажемо, що задача (1)-(3) має не більше одного узагальненого розв'язку. Припустимо протилежне. Нехай u_1, u_2 – (різні) узагальнені розв'язки заданої задачі. З леми 2 одержуємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} |u_1(x,t) - u_2(x,t)|^{q(x)}\,dxdt \leqslant C_2\left(\frac{R}{R-R_0}\right)^{\mu}\Big\{R^{\alpha+1-\theta} + \varkappa\, R^{\beta+1-q_b^+/(q_b^+-2)}\Big\}, \quad (22)$$

де R_0, R – довільні числа такі, що $0 < R_0 < R$, $R \geqslant 1$, та $\alpha + 1 - \theta < 0$, $\beta + 1 - q_b^+/(q_b^+ - 2) < 0$.

Зафіксуємо $R_0 > 0$ і перейдемо в (22) до границі при $R \to +\infty$. У підсумку отримаємо, що $u_1 = u_2$ на Q_{R_0}. Оскільки $R_0 > 0$ – довільне число, то звідси одержуємо, що $u_1 = u_2$ майже всюди на Q.

Другий етап (наближення розв'язку). Нехай $R > 0$ – довільне число. Позначимо $\Gamma_{0,R} := \overline{\partial\Omega_R \setminus \Gamma_1}$, $\Gamma_{1,R} := \partial\Omega_R \setminus \Gamma_{0,R}$. Під $W^1_{p(\cdot)}(\Omega_R, \Gamma_{0,R})$ розумітимемо замикання простору $C^1(\overline{\Omega_R}, \Gamma_{0,R}) := \{v \in C^1(\overline{\Omega_R})\,|\, v|_{\Gamma_{0,R}} = 0\}$ за нормою $\|v\|_{W^1_{p(\cdot)}(\Omega_R)} := \sum\limits_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(\Omega_R)} + \|v\|_{L_{p_0(\cdot)}(\Omega_R)}$. Введемо в розгляд також простір $U_R := \{w \in (-R,0) \to W^1_{p(\cdot)}(\Omega_R, \Gamma_{0,R})\,|\, w \in L_{p_0(\cdot)}(Q_R), w_{x_i} \in L_{p_i(\cdot)}(Q_R)\ (i = \overline{1,n}),$ $b^{1/2}w \in C([-R,0]; L_2(\Omega_R))\}$ з нормою
$\|w\|_{U_R} := \sum\limits_{i=1}^{n} \|w_{x_i}\|_{L_{p_i(\cdot)}(Q_R)} + \|w\|_{L_{p_0(\cdot)}(Q_R)} + \max\limits_{t\in[-R,0]} \|b^{1/2}(\cdot)w(\cdot,t)\|_{L_2(\Omega_R)}$.

Для кожного $l \in \mathbb{N}$ розглянемо задачу: знайти функцію $u_l \in U_l$, яка задовольняє інтегральну рівність

$$\iint\limits_{Q_R}\Big\{\sum_{i=1}^{n} a_i(x,t,u_l,\nabla u_l)\,\psi_{x_i}\,\varphi + a_0(x,t,u_l,\nabla u_l)\,\psi\,\varphi - b(x)\,u_l\,\psi\,\varphi'\Big\}\,dxdt = \iint\limits_{Q_R} f\,\psi\,\varphi\,dxdt \quad (23)$$

для будь-яких $\psi \in W^1_{p(\cdot)}(\Omega_R, \Gamma_{0,R})$, $\varphi \in C_0^1(-R,0)$.

Доведення існування розв'язку $u_l \in U_l$ цієї задачі проводимо методом Гальоркіна з використанням методу параболічної регуляризації (див., наприклад, [5, 11, 10]). Єдиність функції u_l випливає з умови $\mathbf{A_3}$.

Третій етап (збіжність послідовності наближень розв'язку). Для кожного $l \in \mathbb{N}$ функцію u_l продовжимо нулем на Q, залишивши за цим продовженням позначення u_l. Очевидно, що $u_l \in \mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}$. Покажемо, що послідовність $\{u_l\}_{l=1}^{\infty}$ містить підпослідовність, яка збігається в певному сенсі до розв'язку задачі (1)-(3).

Нехай l і m – довільні натуральні числа, причому $1 < l < m$, R_0, R – будь-які дійсні числа такі, що $0 < R_0 < R \leqslant l-1$, $R \geqslant 1$. Тоді з леми 2 отримаємо

$$\max_{t\in[-R_0,0]} \int\limits_{\Omega_{R_0}} b(x)|u_l(x,t)-u_m(x,t)|^2\,dx + \iint\limits_{Q_{R_0}} |u_l(x,t)-u_m(x,t)|^{q(x)}\,dxdt \leqslant$$

$$\leqslant C_2\Big(R/(R-R_0)\Big)^{\mu}\Big\{R^{\alpha+1-\theta} + \varkappa R^{\beta+1-q_b^+/(q_b^+-2)}\Big\}. \tag{24}$$

Нехай $\varepsilon>0$ – яке-небудь число. Зафіксуємо довільно вибране значення $R_0>0$ і виберемо $R>\max\{1;R_0\}$ настільки великим, щоби права частина нерівності (24) була меншою за ε. Це можна зробити, оскільки показники степенів R в правій частині нерівності (24) від'ємні. Тоді для будь-яких $l \geqslant R+1$ і $m > l$ ліва частина нерівності (24) менша за ε. Це означає, що послідовності $\big\{u_l\big|_{Q_{R_0}}\big\}_{l=1}^{\infty}$, $\big\{b^{1/2}u_l\big|_{Q_{R_0}}\big\}_{l=1}^{\infty}$ є фундаментальними відповідно в $L_{q(\cdot)}(Q_{R_0})$ і $C([-R_0,0];L^2(\Omega_{R_0}))$. Оскільки $R_0 > 0$ – довільне число, то звідси випливає існування функції $u \in L_{q(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ такої, що $b^{1/2}u \in C(S;L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$ і

$$u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{сильно в} \quad L_{q(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \tag{25}$$

$$b^{1/2}u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} b^{1/2}u \quad \text{в} \quad C(S;L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega})). \tag{26}$$

Покажемо обмеженість послідовностей $\big\{u_l\big\}_{l=1}^{\infty}$, $\big\{u_{l,x_j}\big\}_{l=1}^{\infty}$ $(j=\overline{1,n})$, $\big\{a_i(u_l)\big\}_{l=1}^{\infty}$ $(i=\overline{0,n})$ відповідно в $L_{p_0(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$, $L_{p_j(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(j=\overline{1,n})$, $L_{p_i^*(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i=\overline{0,n})$. Справді, нехай R_0 – будь-яке дійсне число, а $R := R_0+1$. На підставі наслідку з леми 2 для довільного натурального числа $l > R+1$ отримаємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} \Big[\sum_{i=1}^{n} |u_{l,x_i}(x,t)|^{p_i(x)} + |u_l(x,t)|^{p_0(x)}\Big]dxdt \leqslant C_4(R_0), \tag{27}$$

де $C_4(R_0) > 0$ – деяка стала, яка від l не залежить.

Згідно з умовою $\mathbf{A_2}$ та оцінкою (27) для кожного $i \in \{0,1,\dots,n\}$ отримаємо

$$\iint\limits_{Q_{R_0}} |a_i(x,t,u_l,\nabla u_l)|^{p_i^*(x)}\,dxdt \leqslant C_5 \iint\limits_{Q_R} \Big[\sum_{j=1}^{n} |u_{l,x_j}(x,t)|^{p_j(x)} + |u_l(x,t)|^{p_0(x)}\Big]\,dxdt +$$

$$+C_6 \iint\limits_{Q_R} |h_{2,i}^a(x,t)|^{p_i^*(x)}\,dxdt < C_7(R_0), \tag{28}$$

де C_5, C_6, C_7 – деякі додатні сталі, які від l не залежать.

З (25),(27),(28), використовуючи рефлексивність просторів $L_{p_i^*(\cdot)}(Q_{R_0})$ $(i=\overline{0,n})$ для довільного $R_0 > 0$, отримаємо існування підпослідовності послідовності $\big\{u_l\big\}_{l=1}^{\infty}$, за якою залишимо те саме позначення, та функцій $\chi_i \in L_{p_i^*(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i=\overline{0,n})$ таких, що

$$u_l \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u \quad \text{слабо в} \quad L_{p_0(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \qquad u_{l,x_i} \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} u_{x_i} \quad \text{слабо в} \quad L_{p_i(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \tag{29}$$

$$a_i(\cdot,\cdot,u_l(\cdot,\cdot),\nabla u_l(\cdot,\cdot)) \underset{l\to\infty}{\longrightarrow} \chi_i(\cdot,\cdot) \quad \text{слабо в} \quad L_{p_i^*(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q}), \quad i=\overline{0,n}. \tag{30}$$

Залишилося довести, що

$$\chi_i(\cdot,\cdot) = a_i(\cdot,\cdot,u(\cdot,\cdot),\nabla u(\cdot,\cdot)), \qquad i=\overline{0,n}. \tag{31}$$

Четвертий етап (правильність рівностей (31)). Використаємо метод монотонності [10]. Нехай $v \in L_{p_0(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ – довільна функція така, що $v_{x_i} \in L_{p_i(\cdot),\,\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i=\overline{1,n})$, а $w(x')$, $x'=(x_1,\dots,x_k)\in\mathbb{R}^k$, – невід'ємна, неперервно диференційовна функція з обмеженим носієм і $\theta\in C_0^1(-\infty,0), \theta\geqslant 0$.

На підставі умови $\mathbf{A_3}$ для всіх $l\in\mathbb{N}$ отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n (a_i(u_l)-a_i(v))(u_{l,x_i}-v_{x_i}) + (a_0(u_l)-a_0(v))(u_l-v)\Big] w\theta\,dxdt \geqslant 0, \tag{32}$$

де тут і далі використовується позначення: $a_i(v) := a_i(x,t,v,\nabla v)$ $(i=\overline{0,n})$. Тоді

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n a_i(u_l)u_{l,x_i} + a_0(u_l)u_l\Big] w\theta\,dxdt -$$

$$-\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n (a_i(u_l)v_{x_i} + a_i(v)(u_{l,x_i}-v_{x_i})) + a_0(u_l)v + a_0(v)(u_l-v)\Big] w\theta\,dxdt \geqslant 0 \tag{33}$$

для всіх $l\in\mathbb{N}$. За означенням функції u_l $(l\in\mathbb{N})$ одержимо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n a_i(u_l)\psi_{x_i}\varphi + \big(a_0(u_l)-f\big)\psi\varphi - bu_l\psi\varphi'\Big]\,dxdt = 0 \tag{34}$$

для довільних $\psi\in W^1_{p(\cdot),c}(\Omega,\Gamma_0)$, $\operatorname{supp}\psi\subset\overline{\Omega}_l$, $\varphi\in C_0^1(-l,0)$.

Нехай m таке, що $\operatorname{supp} w\subset\{x' \mid |x'|\leqslant m\}$, $\operatorname{supp}\theta\subset[-m,0]$. На підставі леми 1 з тотожності (34) при $l>m$ отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n a_i(u_l)u_{l,x_i} + a_0(u_l)u_l\Big] w\theta\,dxdt = \frac{1}{2}\iint\limits_Q b|u_l|^2 w\theta'\,dxdt -$$

$$-\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^k a_i(u_l)\,u_l\,w_{x_i} - f\,u_l\,w\Big]\theta\,dxdt. \tag{35}$$

З (33) та (35) одержимо

$$\frac{1}{2}\iint\limits_Q b|u_l|^2 w\theta'\,dxdt - \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^k a_i(u_l)\,u_l\,w_{x_i} - f\,u_l\,w\Big]\theta\,dxdt -$$

$$-\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^n (a_i(u_l)v_{x_i} + a_i(v)(u_{l,x_i}-v_{x_i})) + a_0(u_l)v + a_0(v)(u_l-v)\Big] w\theta\,dxdt \geqslant 0. \tag{36}$$

Перейдемо в (36) до границі при $l\to\infty$. На підставі (25), (29), (30) і того, що $L_{q(\cdot)}(G)\subset L_2(G)\subset L_{p_i(\cdot)}(G)$ для будь-яких $i\in\{1,\dots,k\}$ та довільної обмеженої області G в $\mathbb{R}^{n+1}$, отримаємо

$$\frac{1}{2}\iint\limits_Q b|u|^2 w\theta'\,dxdt - \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^{k}\chi_i\,u\,w_{x_i} - f\,u\,w\Big]\,dxdt-$$

$$-\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^{n}(\chi_i v_{x_i} + a_i(v)(u_{x_i} - v_{x_i})) + \chi_0 v + a_0(v)(u-v)\Big] w\theta\,dxdt \geqslant 0. \qquad (37)$$

Тепер в (34) перейдемо до границі при $l \to \infty$. На підставі (29), (30) отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^{n}\chi_i\psi_{x_i}\varphi + \big(\chi_0 - f\big)\psi\varphi - bu\psi\varphi'\Big]\,dxdt = 0 \qquad (38)$$

для довільних $\psi \in W^1_{p(\cdot),\mathrm{c}}(\Omega,\Gamma_0)$, $\varphi \in C^1_0(-\infty,0)$. Звідси на підставі леми 1 одержуємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^{n}\chi_i\,u_{x_i} + \chi_0\,u\Big]\,w\theta\,dxdt = \frac{1}{2}\iint\limits_Q b|u|^2 w\theta'\,dxdt - \iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^{k}\chi_i\,u\,w_{x_i} - f\,u\,w\Big]\theta\,dxdt. \qquad (39)$$

З (37) та (39) отримаємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^{n}\chi_i\,u_{x_i} + \chi_0\,u\Big] w\theta\,dxdt-$$

$$-\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^{n}\big(\chi_i v_{x_i} + a_i(v)(u_{x_i} - v_{x_i})\big) + \chi_0 v + a_0(v)(u-v)\Big] w\theta\,dxdt \geqslant 0,$$

тобто

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^{n}(\chi_i - a_i(v))(u_{x_i} - v_{x_i}) + (\chi_0 - a_0(v))(u-v)\Big]\,w\theta\,dxdt \geqslant 0. \qquad (40)$$

Візьмемо в (40) $v = u - \lambda g$, де $\lambda > 0$ – довільне число, $g \in L_{p_0(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ – будь-яка функція така, що $g_{x_i} \in L_{p_i(\cdot),\mathrm{loc}}(\overline{Q})$ $(i = \overline{1,n})$. У підсумку після ділення на λ і врахування довільності функції g одержуємо

$$\iint\limits_Q \Big[\sum_{i=1}^{n}\big(\chi_i - a_i(u-\lambda g)\big)g_{x_i} + (\chi_0 - a_0(u-\lambda g))g\Big]\,w\theta\,dxdt = 0. \qquad (41)$$

В цій рівності спрямуємо λ до 0

$$\iint\limits_Q \Big\{\sum_{i=1}^{n}\big(a_i(u) - \chi_i\big)g_{x_i} + (a_0(u) - \chi_0)g\Big\}\,w\theta\,dxdt = 0. \qquad (42)$$

Тепер приймемо в (42) спочатку $g(x,t) = 1$, а потім $g(x,t) = x_i$ для кожного $i \in \{1,\ldots,n\}$. Внаслідок отримаємо

$$\iint\limits_Q \big(a_0(u)-\chi_0\big)w\theta\,dxdt=0,\quad \iint\limits_Q \big(a_i(u)-\chi_i\big)w\theta\,dxdt=0,\ i=\overline{1,n}. \qquad (43)$$

Оскільки рівності (43) виконуються для довільних неперервно-диференційовних невід'ємних фінітних функцій w,θ, то правильними є рівності (31).

П'ятий етап (завершення доведення теореми 1). З (38), врахувавши (31), отримаємо інтегральну тотожність (5) для функції u, звідки, зокрема, на підставі леми 1 маємо, що $b^{1/2}u\in C(S;L_{2,\mathrm{loc}}(\overline{\Omega}))$. Отже, функція u належить $\mathbb{U}_{p,\mathrm{loc}}$ і задовольняє інтегральну тотожність (5), тобто є узагальненим розв'язком задачі (1)-(3). □

1. *Бокало Н.М.* Энергетические оценки решений и однозначная разрешимость задачи Фурье для линейных и квазилинейных параболических уравнений / *Бокало Н.М.* // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, №8. – С. 1325-1334.
2. *Бокало М.М.* Про коректність крайових задач для квазілінійних еліптичних систем в необмежених областях / *Бокало М.М., Кушнір О.В.* // Мат. студії. – 2005. – Т. 24, №1. – С. 69-82.
3. *Бокало М.М.* Про коректність задачі Фур'є для нелінійних параболічних рівнянь вищих порядків зі змінними показниками нелінійності / *Бокало М.М., Паучок І.Б.* // Мат. студії. – 2006. – Т. 24, №1. – С. 25-48.
4. *Bokalo M.* On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces / *Bokalo M., Domanska O.* // Math. studii. – 2007. – Vol. 28, №1. – P. 77-91.
5. *Бугрій О.М.* Мішана задача для параболічного рівняння, яке узагальнює рівняння політропної фільтрації / *Бугрій О.М., Лавренюк С.П.* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2000. – Вип. 56. – С. 33-43.
6. *Бугрій О.М.* Задача з початковою умовою для нелінійної параболічної варіаційної нерівності в необмеженій за просторовими змінними області / *Бугрій О.М.* // Вісник Львів. ун-ту. Сер. мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 30-52.
7. *Доманська О.В.* Нелінійні еліптичні рівняння в квазіциліндричних областях / *Доманська О.В.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2007. – Вип. 67. – С. 104-118.
8. *Медвідь І.* Задачі для нелінійних еліптичних і параболічних рівнянь в анізотропних просторах / *Медвідь І.* // Вісник Львів. ун-ту. Серія мех.-мат. – 2005. – Вип. 64. – С. 149-166.
9. *Ладыженская О.А.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа / *Ладыженская О.А., Уральцева Н.Н.* – М., 1964.
10. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач / *Лионс Ж.-Л.* – М., 1972.
11. *Самохин В.Н.* Об одном классе уравнений, обобщающих уравнения политропной фильтрации / *Самохин В.Н.* // Дифференциальные уравнения. – 1996. – Т. 32, №5. – С. 643-651.
12. *Шишков А.Е.* Разрешимость граничных задач для квазилинейных эллиптических и параболических уравнений в неограниченных областях в классах функций, растущих на бесконечности / *Шишков А.Є.* // Укр. мат. журн. – 1995. – Т. 47, №2. – С. 277-289.
13. *Boccardo L.* Nonlinear elliptic equations in $\mathbb{R}^n$ without growth restrictions on the data / *Boccardo L., Gallouët T., Vázquez J. L.* // J. Differential Equations. – 1993. – Vol. 105, №2. – P. 334-363.

14. *Brézis H.* Semilinear equations in $\mathbb{R}^N$ without condition at infinity / *Brézis H.* // Appl. Math. Optim. – 1984. – Vol. 12, №3. – P. 271-282.
15. *Bernis F.* Elliptic and parabolic semilinear problems without conditions at infinity / *Bernis F.* // Arch. Rational Mech. Anal. – 1989. – Vol. 106, №3. – P. 217-241.
16. *Gladkov A.* Diffusion-absorption equation without growth restridtions on the data at infinity / *Gladkov A., Guedda M.* // J. Math. Anal. Appl. – 2002. – Vol. 269, №. 1. – P. 16-37.
17. *Kováčik O.* On spaces $L^{p(x)}(Q)$ and $W^{1,\,p(x)}$ / *Kováčik O., Rákosníc J.* // Czechosl. Math. J. – 1991. – Vol. 41, №4. – P. 592-618.
18. *Růžička M.* Electroreological fluids: modeling and mathematical theory / *Růžička M.* – Berlin: Springer-Verl., 2000.

UNIQUE SOLVABILITY OF PROBLEM WITHOUT INITIAL CONDITIONS FOR STRONGLY NONLINEAR ELLIPTIC-PARABOLIC EQUATIONS

Mykola BOKALO

Ivan Franko National University of L'viv,
79000 L'viv, Universytets'ka Str., 1
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

Existence and uniqueness of weak solutions of a problem without initial conditions for second order nonlinear anisotropic elliptic-parabolic equations in spatial unbounded domains are obtained. Nonlinearity exponents of the equations depends on the points of domains and differentiation direction. The weak solutions are from Lebesgue-Sobolev spaces. There are no restrictions for solutions and initial data at infinity.

Key words: nonlinear equation, elliptic-parabolic equation, degenerate parabolic equations, problem without initial condition, generalized Lebesgue-Sobolev space, unbounded domain.

ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ ЗАДАЧИ БЕЗ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ СИЛЬНО НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЛИПТИКО-ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Николай БОКАЛО

Львовский национальный университет имени Ивана Франко,
79000 Львов, ул. Университетская, 1
e-mail: mm.bokalo@gmail.com

Получены условия существования единственного обобщённого решения задачи без начальных условий для нелинейных анизотропных еллиптико-параболических уравнений второго порядка в неограниченных по пространственным переменным областях. Уравнения имеют показатели нелинейности, зависящие от точек области определения уравнений и направления дифференцирования, а их обобщённые решения берутся из обобщённых анизотропных пространств Лебега-Соболева. При этом не налагаются условия на поведение решений и возрастание исходных данных на бесконечности.

Ключевые слова: нелинейное уравнение, еллиптико-параболическое уравнение, обобщённое параболическое уравнение, задача без начальных условий, обобщённое анизотропное пространство Лебега-Соболева, неограниченная область.

Стаття надійшла до редколегії 10.09.2010

Прийнята до друку 22.12.2010