

УДК 539.3

КОНТАКТ ЖОРСТКИХ ТІЛ ПІД ДІЄЮ ЗМІННОГО НАВАНТАЖЕННЯ

Олександр ЛЮБІН

*Хмельницький національний університет,
вул. Інститутська, 11 29016 Хмельницький, Україна*

У статті побудовано математичну модель контактної взаємодії жорстких циліндрових тіл з урахуванням тертя. Числовий розв'язок цієї задачі отримано з допомогою MATHCAD 2000.

Ключові слова: контактна взаємодія, циліндричне тіло, тертя, числовий розв'язок.

У працях [1, 2, 4, 7], в яких наведено аналітичні підходи до розв'язання контактних задач зі зносом, накладені на змінне в часі навантаження обмеження пов'язані лише з нехтуванням динамічними ефектами [1] чи необхідністю збільшення розмірів контактної області [7].

У розвитку результатів [6] розглянута можливість керування зносом за рахунок змінного навантаження з метою подовження ресурсу роботи спряження.

Формулювання та розв'язання зносоконтактної задачі. Розглядають контактну взаємодію між жорстким довгим суцільним циліндром D_1 радіуса R_1 , який з радіальним початковим прозором Δ поміщений у жорсткий корпус (обойму) D_2 з внутрішнім радіусом $R_2 = R_1 + \Delta$. Циліндр D_1 обертається навколо осі з постійною кутовою швидкістю ϖ та притиснутий до внутрішньої поверхні корпусу D_2 вертикальним змінним навантаженням $Q(s)$, яке припадає на одиницю довжини циліндра. Осі тіл D_1, D_2 – паралельні, зміщення осі циліндра колінеарне до діючого навантаження.

За припущенням, при контактній взаємодії відбувається зношування внутрішньої поверхні корпусу, силами тертя та зносом циліндра нехтуємо.

Математична модель зносоконтактної задачі (ЗКЗ) містить:

1) умову контакту

$$u_w(\varphi, s) = \Delta \left[\frac{\cos \varphi}{\cos \varphi_0(s)} - 1 \right]; \quad (1)$$

2) умову рівноваги циліндра D_1

$$Q(s) = R_1 \int_{-\varphi_0(s)}^{\varphi_0(s)} \sigma(\varphi, s) \cos \varphi d\varphi; \quad (2)$$

3) закон зношування внутрішньої поверхні корпусу

$$\frac{\partial \mathbf{u}_w(\varphi, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} = k_w \alpha [\sigma(\varphi, \mathbf{s})]^m \mathbf{s}^{\alpha-1}. \quad (3)$$

Тут $\mathbf{u}_w(\varphi, \mathbf{s})$ – лінійний знос; $\sigma(\varphi, \mathbf{s})$ – контактний тиск; φ – кутова координата, відлічувана від лінії дії $\mathbf{Q}(\mathbf{s})$, $-\varphi_0(\mathbf{s}) \leq \varphi \leq \varphi_0(\mathbf{s})$; $\varphi_0(\mathbf{s})$ – змінний напівкут контакту; \mathbf{s} – шлях тертя для точки корпусу з координатою $\varphi = 0$, яка є в контакті з початку процесу; k_w , $m \geq 1$, $0 < \alpha \leq 1$ – числові характеристики зносу матеріалу, які визначають на підставі експериментальних випробовувань.

Закон зношування у формі (3) відповідає зносу за моделлю старіння [5], для $\alpha = 1$ маємо загальний степеневий закон залежності інтенсивності зносу від контактного тиску.

У результаті розв'язання ЗКЗ треба визначити кут $\varphi_0(\mathbf{s})$, контактний тиск $\sigma(\varphi, \mathbf{s})$ та знос $\mathbf{u}_w(\varphi, \mathbf{s})$.

Для розв'язання ЗКЗ виконаємо такі дії.

Продиференціюємо по \mathbf{s} обидві частини (1). Одержимо

$$\frac{\partial \mathbf{u}_w(\varphi, \mathbf{s})}{\partial \mathbf{s}} = \Delta \cos \varphi \frac{\sin \varphi_0(\mathbf{s})}{\cos^2 \varphi_0(\mathbf{s})} \frac{d\varphi_0(\mathbf{s})}{d\mathbf{s}}. \quad (4)$$

Враховуючи закон зношування (3), маємо

$$\sigma(\varphi, \mathbf{s}) = \left[\frac{\Delta}{k_w \alpha \mathbf{s}^{\alpha-1}} \frac{\sin \varphi_0(\mathbf{s})}{\cos^2 \varphi_0(\mathbf{s})} \frac{d\varphi_0(\mathbf{s})}{d\mathbf{s}} \right]^{1/m} \cos^{1/m} \varphi. \quad (5)$$

Підставимо (5) в умову рівноваги (2)

$$\mathbf{Q}(\mathbf{s}) = R_1 \left[\frac{\Delta}{k_w \alpha \mathbf{s}^{\alpha-1}} \frac{\sin \varphi_0(\mathbf{s})}{\cos^2 \varphi_0(\mathbf{s})} \frac{d\varphi_0(\mathbf{s})}{d\mathbf{s}} \right]^{1/m} \mathbf{F}[\varphi_0(\mathbf{s}), m], \quad (6)$$

де $\mathbf{F}[\varphi_0(\mathbf{s}), m] = \int_{-\varphi_0(\mathbf{s})}^{\varphi_0(\mathbf{s})} \cos^{\frac{1}{m}+1} \varphi d\varphi$.

Порівнюючи співвідношення (5) і (6), отримаємо

$$\sigma(\varphi, \mathbf{s}) = \frac{\mathbf{Q}(\mathbf{s}) \cos^{\frac{1}{m}} \varphi}{R_1 \mathbf{F}[\varphi_0(\mathbf{s}), m]}, \quad (7)$$

тобто величина контактного тиску не залежить безпосередньо від параметра α у законі зношування (3).

На підставі диференціального рівняння (6) знаходимо залежність між \mathbf{s} та $\varphi_0(\mathbf{s})$

$$\frac{k_w \alpha}{\Delta R_1^m} \int_0^s \xi^{\alpha-1} [Q(\xi)]^m d\xi = \int_0^{\varphi_0(s)} \frac{\sin z}{\cos^2 z} F^m [z, m] dz. \quad (8)$$

Лінійний знос $u_w(\varphi, s)$ внутрішньої поверхні корпусу за відомими величинами $\varphi_0(s)$ визначаємо за співвідношенням (1).

Для жорстких тіл D_1, D_2 з формули (7) випливає, що контактний тиск не дорівнює нулеві на кінцях області контакту, це збігається з результатом [2, с. 92, формула (2.33)].

Формулювання та розв'язання задачі керування. Технічний ресурс вузла тертя визначають як напрацювання (в одиницях часу чи довжини шляху тертя) від початку експлуатації до переходу його у стан, при якому його подальше використання недоцільне або недопустиме (граничний стан).

Граничний стан зумовлений одним з факторів: а) цілковитим зносом антифрикційного елемента (покриття); б) гранично допустимими значеннями радіального прозору або зносу; в) гранично допустимим кутом контакту.

На підставі (1) максимальний знос поверхні корпусу простежується в точці з координатою $\varphi = 0$, тобто

$$\max u_w(\varphi, s) = u_w(0, s) = \Delta \left(\frac{1}{\cos \varphi_0(s)} - 1 \right). \quad (9)$$

Нехай граничний стан спряження визначають гранично допустимим зносом u_w^{zp} або гранично допустимим кутом контакту $2\varphi_0^{zp}$. З (9) випливає, що ці величини пов'язані співвідношенням

$$u_w^{zp} = \Delta \left(\frac{1}{\cos \varphi_0^{zp}} - 1 \right), \quad (10)$$

або

$$\varphi_0^{zp} = \arccos \frac{\Delta}{u_w^{zp} + \Delta}. \quad (11)$$

Подемо діюче навантаження $Q(s)$ у вигляді такої функції змінної s

$$Q(s) = Q(s, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = \mu_0 + \mu_1 \cdot s + \mu_2 \cdot s^2,$$

при цьому обмежимо $Q(s)$ умовою

$$Q(s) \leq Q_{ep}, \quad (12)$$

де Q_{ep} – задане значення граничного навантаження.

Сформулюємо задачу керування так: треба знайти такі значення параметрів μ_0, μ_1, μ_2 у функції $Q(s)$, щоб забезпечити досягнення

заданих величин \mathbf{u}_w^{zp} або φ_0^{zp} для максимального можливого значення шляху тертя \mathbf{s} .

Математична модель задачі керування полягає у знаходженні максимуму функції

$$V(\mathbf{s}, \mu_0, \mu_1, \mu_2) = \frac{k_w \alpha}{\Delta R_1^m} \int_0^{\mathbf{s}} \xi^{\alpha-1} (\mu_0 + \mu_1 \cdot \xi + \mu_2 \cdot \xi^2)^m d\xi \quad (13)$$

з обмеженнями

$$\begin{aligned} \mu_0 > 1, \quad \mu_1 > 0, \quad \mu_2 > 0, \quad \mathbf{s} > \mathbf{s}_{\min}, \quad \mu_0 + \mu_1 \cdot \mathbf{s} + \mu_2 \cdot \mathbf{s}^2 \leq Q_{zp}, \\ |U(\varphi_0^{zp}) - V(\mathbf{s}, \mu_0, \mu_1, \mu_2)| \leq \varepsilon, \end{aligned} \quad (14)$$

де \mathbf{s}_{\min} – деяке задане мінімальне значення шляху тертя, яке може змінюватись в процесі розв'язання задачі з метою досягнення $\mathbf{s} = \mathbf{s}_{\max}$, ε – точність визначення кореня рівняння (8),

$$U[\varphi_0^{zp}] = \int_0^{\varphi_0^{zp}} \frac{\sin z}{\cos^2 z} \left[\int_{-z}^z (\cos \varphi)^{\frac{1}{m}+1} d\varphi \right]^m dz.$$

Розв'язання задачі (13), (14) проведено чисельним методом засобами системи MathCAD 2000 з використання функції Maximize.

На рис. 1-3 зображено графіки зміни шляху тертя, навантаження та максимального контактного тиску для тих самих геометричних даних і величин $k_w, Q_{zp}, \varphi_0^{zp}$ для низки значень параметрів m, α .

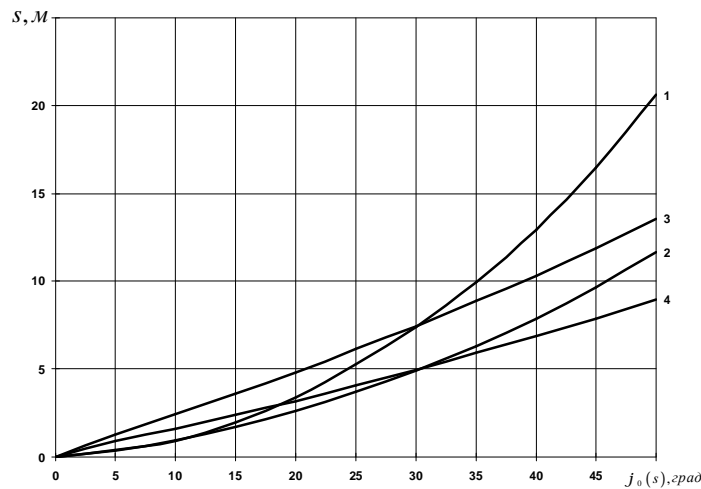
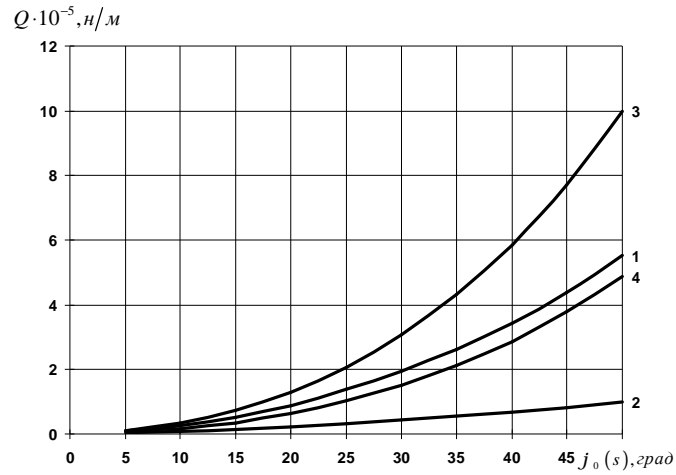
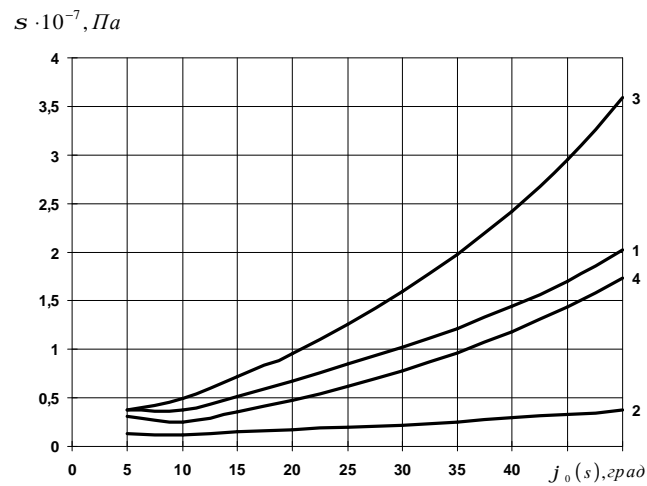


Рис. 1. Залежність $[s, \varphi_0(s)]$

- 1 – $s \cdot 10^{-5}, m = 1, \alpha = 0,7$; 2 – $s \cdot 10^{-4}, m = 1, \alpha = 1$;
 3 – $s \cdot 10^{-3}, m = 1,2; \alpha = 0,7$; 4 – $s \cdot 10^{-3}, m = 1,4; \alpha = 0,5$.

Рис. 2. Графіки навантаження $Q(s)$

- 1 – $m = 1, \alpha = 0,7$; 2 – $m = 1, \alpha = 1$; 3 – $m = 1,2; \alpha = 0,7$; 4 – $m = 1,4; \alpha = 0,5$.

Рис. 3. Графіки зміни максимального контактного тиску $\sigma_{\max} = \sigma(0, s)$

- 1 – $m = 1, \alpha = 0,7$; 2 – $m = 1, \alpha = 1$; 3 – $m = 1,2; \alpha = 0,7$; 4 – $m = 1,4; \alpha = 0,5$.

1. *Александров В.М., Коваленко Е.В.* Аналитическое решение контактной задачи об изнашивании сопряжения вал – втулка // Трение и износ. – 1987. – Т. 8. – № 6. – С. 985–995.
2. *Галахов М.А., Усов П.П.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической теории трения. – М., 1990.
3. *Дьяконов В.* Mathcad 2000: Учебный курс. – СПб: Питер, 2000.
4. *Коваленко Е.В.* К расчету изнашивания сопряжения вал–втулка // Изв. АН СССР. Механика твердого тела. – 1982. – № 6. – С. 66–72.
5. *Кузьменко А.Г., Кузьменко В.А., Насер Гассан Ахмед.* Модели переходных процессов при изнашивании // Проблемы трибології /Problems of Tribology // 1997. – № 3. – С. 81–121.
6. *Любин А.Г.* Об управлении процессом изнашивания вкладыша радиального подшипника скольжения // Проблемы трибології / Problems of Tribology /. – 2003. – № 2. – С. 81–85.
7. *Солдатенков И.А.* Изнашивание покрытий в упругих сопряжениях при изменяющейся площадке контакта // Трение и износ. – 1987. – Т. 8. – № 2. – С. 206–213.

CONTACT PROBLEM FOR RIGID BODIES UNDER VARIABLE LOAD

Alexander Lyubin

*National University of Khmelnytsky,
Instytuyska Str., 11 29016 Khmelnytsky, Ukraine*

The article presents mathematical model of contact interaction of rigid cylindrical bodies with take into consideration for wear. Numerical solution for control problem of wear is obtained by MathCAD 2000.

Key words: contact interaction, cylinder body, wear, numerical solution.

Стаття надійшла до редколегії 15.09.2006

Прийнята до друку 19.11.2008