ВІСНИК ЛЬВІВ. УН-ТУ *VISNYK LVIV UNIV.*
Серія мех.-мат. 2008. Вип. 69. С. 245–255 *Ser. Mech.-Mat. 2008. Vol. 69. P. 245–255*

УДК 539.3:519.6

ЕКСПЕРИМЕНТАЛЬНЕ ДОСЛІДЖЕННЯ ПЛАСТИНИ З ОТВОРОМ НА ОСНОВІ ПОЛЯРІЗАЦІЙНО-ОПТИЧНОГО МЕТОДУ

Етері ГАРТ, **Олена ЛИСИЦИНА**, **Євген ПРОКОПАЛО**

Дніпропетровський національний університет,
просп. Гагаріна 72 49050 Дніпропетровськ, Україна

Експериментально досліджено напружено-деформований стан поздовжньо навантаженої пластини з прямокутним отвором для перевірки вірогідності результатів числових розрахунків, виконаних із використанням проекційно-ітераційної модифікації методу скінченних елементів. Проведено контроль рівномірної деформації у відповідних перерізах пластини за допомогою індикаторів годинникового типу.

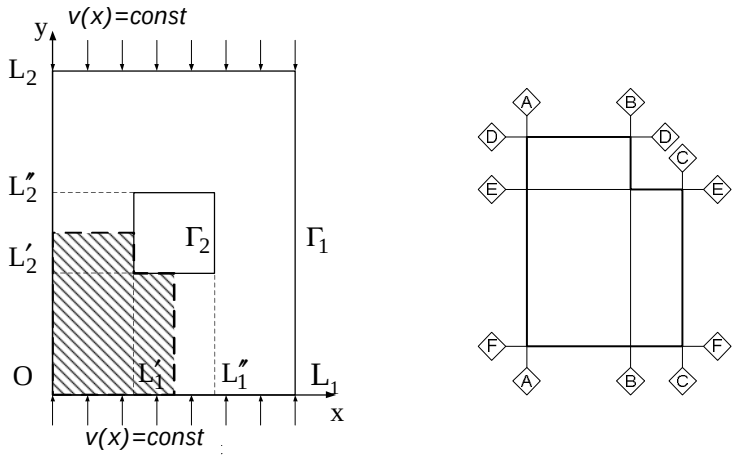
Ключові слова: пластина з отвором, метод скінченних елементів, поляризаційно-оптичний метод, проекційно-ітераційний метод.

Під час проектування пластинчастих і оболонкових конструкцій у різних галузях техніки досить часто їхнім елементам надають складні форми, отвори різних конфігурацій, припускають зміни поперечних перетинів і т. ін. Ці чинники сприяють виникненню концентрації напружень [5, 6]. У таких випадках постає необхідність в уточнених розрахунках міцності і оптимізації параметрів цих конструкцій. Для інженерної практики важливе значення мають наближені методи розв'язування таких задач. Найбільш ефективними числовими методами розв'язування крайових і варіаційних задач вважають проекційно-ітераційні методи [1–3]. Для задач механіки дуже важливими є питання перевірки вірогідності отриманих числових розв'язків.

Для експериментального підтвердження вірогідності одержаних на підставі проекційно-ітераційного методу числових результатів розв'язування задачі про напружено-деформований стан навантаженої у поздовжньому напрямі пластини з прямокутним отвором [2–4] використовували поляризаційно-оптичний метод (метод фотопружності).

Формулювання експерименту. Зразок у вигляді прямокутної пластини (рис. 1) завдовжки $L_1 = 0,08$ м, завширшки $L_2 = 0,06$ м, завтовшки $h = 0,0073$ *м* із квадратним отвором $(L_1'' - L_1') \times (L_2'' - L_2') = 0,02 \times 0,02$ м виготовили з оптично-чутливого матеріалу на основі епоксидної смоли ЭД-20 і мали такі механічні характеристики: модуль пружності $E = 3300$ МПа; межа пропорційності $\sigma_B = 55$ МПа; коефіцієнт Пуассона $\nu = 0,37$.

© Гарт Е., Лисицина О., Прокопало Є., 2008



а *б*

Рис. 1.
а – геометрія і схема навантаження пластини;
б – характерні перерізи моделі.

Експеримент виконували на поляризаційному устаткуванні ППУ-5 (рис. 2), зразок розміщували у приладі так, щоб забезпечувалася його рівновага під дією осьового навантаження $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{x}) = 6{,}153$ МПа .

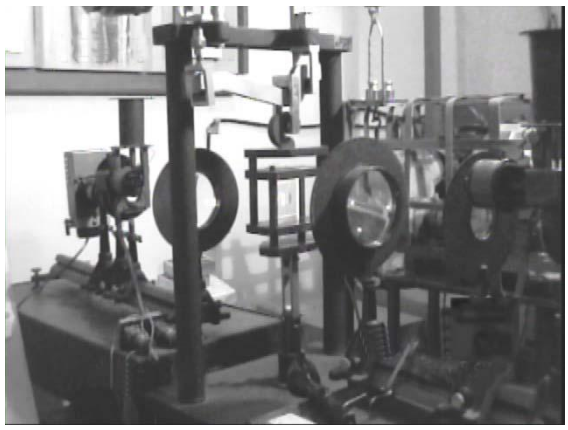


Рис. 2. Поляризаційно-проекційний прилад ППУ-5

Аналіз напружено-деформованого стану проводили на підставі побудови картин ізохром для порівняння з числовими результатами аналізу відповідної математичної моделі, які отримали за допомогою проекційно-ітераційного методу.

Принцип роботи кругового полярископа (рис. 3) полягає у тому, що промені, які виходять із джерела світла (S), зводяться конденсатором у пучок, який після проходження призми поляризатора (P) поляризується. В ході подальшого розповсюдження поляризовані промені, проходячи крізь матеріал моделі (M) і аналізатор (A), потрапляють на екран.

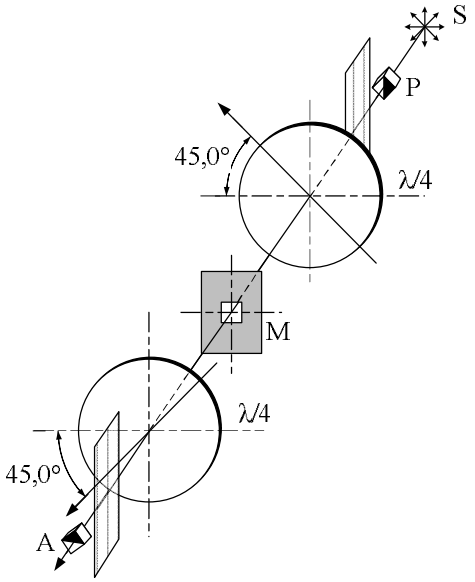
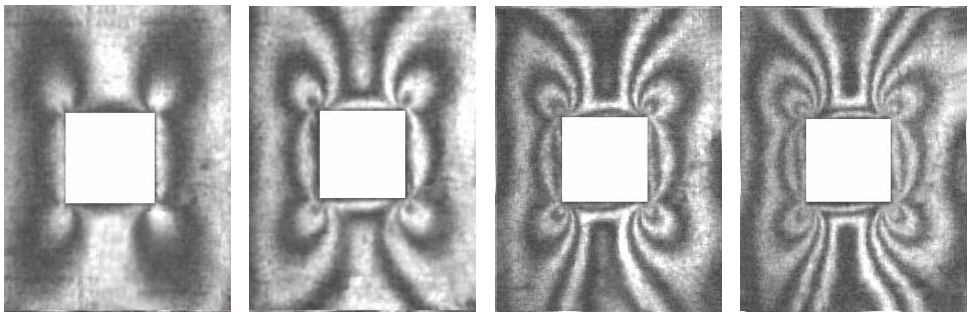


Рис. 3. Схема поляризаційно-оптичного приладу

Виявлені на шляху променів чвертьхвильові пластинки з матеріалу, який має властивості подвійного заломлення променів, виконують кругову поляризацію світлового пучка. Їхні параметри і розташування підібрано так, що вплив першої пластини компенсується дією другої. Отож, в аналізатор потрапляють промені, які змінили фазу внаслідок впливу оптичної анізотропії напруженого матеріалу. Як джерело білого світла (S) використали ртутну лампу, що приводить до кольорової картини ізохром.

Безпосередньо перед отриманням картини ізохром та ізоклін проводили визначення ціни смуги моделі. Для цього використовували тарувальний зразок, який досліджували за умов чистого згину при просвічуванні поляризованим світлом. Отримані значення ціни смуги моделі $\sigma_0^{(t)} = 2{,}16$ МПа та ціни смуги матеріалу $\sigma_0^{(1)} = 2{,}9\,\text{МПа}/\text{м}$ застосовували для відновлення картини напружень за методикою, що описана, зокрема в [9]. Крім того, перед виконанням експерименту зробили розрахунки, які підтвердили міцність зразка на всьому проміжку зміни навантаження.

Результати експерименту. Під час експерименту одержали картини ізоклін (рис. 4), ізохром, результати тарування та відновлені після обробки експериментальних даних поля переміщень і напружень.



$0,25\boldsymbol{P}$ $0,50\boldsymbol{P}$ $0,75\boldsymbol{P}$ $1,0\boldsymbol{P}$

Рис. 4. Ізокліни, отримані при послідовному навантаженні зразка з кроком $0,25\boldsymbol{P}$

Під час виконання експерименту навантаження прикладали квазістатично, документування проводили через однакові прирости тиску на гранях зразка, а переміщення $v(x)$ визначали за допомогою індикатора годинникового типу з ціною поділки шкали 0,001 мм, що підтвердило рівномірність прикладання зусиль і збереження планарності зразка. Відновлення полів напружень проводили за методикою, викладеною в [9].

Математичне формулювання задачі. Розглядаємо задачу про напружено-деформований стан ізотропної пластини, послабленої прямокутним отвором в її центрі, для якої на частині γ зовнішньої межі Γ_1 (при $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{L}_2,\ 0 \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{L}_1$; при $\boldsymbol{y} = 0,\ 0 \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{L}_1$) задано переміщення $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \text{const}$, а на решті зовнішньої межі і на внутрішній частині Γ_2 – нормальні й дотичні напруження дорівнюють нулю (див. рис. 1). Враховуючи варіаційний принцип мінімуму потенціальної енергії, математична модель цієї задачі має такий вигляд [7]. У класі функцій, які мають кусково-неперервну похідну в області $\bar{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$, де $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ межа області

$$\Omega = \left\{0 < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{L}_1',\ \ 0 < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{L}_2\right\} \cup \left\{\boldsymbol{L}_1' \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{L}_1'',\ \ 0 < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{L}_2'\right\} \cup$$
$$\cup \left\{\boldsymbol{L}_1' \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{L}_1'',\ \ \boldsymbol{L}_2'' < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{L}_2\right\} \cup \left\{\boldsymbol{L}_1'' < \boldsymbol{x} < \boldsymbol{L}_1,\ \ 0 < \boldsymbol{y} < \boldsymbol{L}_2\right\},$$

і задовольняють умови

$$u(x)=0,\ \ \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \text{const}\ \ (\boldsymbol{y} = \boldsymbol{L}_2,\ \ 0 \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{L}_1;\ \boldsymbol{y} = 0,\ \ 0 \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{L}_1),$$

треба знайти функції $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}), \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, які забезпечують мінімум функціонала

$$\boldsymbol{I}[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}] = \int_{\Omega} \left\{2\mu\left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^2 + \left(\frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^2\right] + \lambda\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)^2 + \mu\left(\frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{y}} + \frac{\partial \boldsymbol{v}}{\partial \boldsymbol{x}}\right)^2\right\} \boldsymbol{dxdy}, \quad (1)$$

де $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$, $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ - проекції вектора переміщень відповідно на осі $\boldsymbol{Ox}$ та $\boldsymbol{Oy}$; $\lambda, \mu > 0$ - константи Ляме.

Деформації $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$ і напруження $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$ визначають за відомими формулами [7].

Задача знаходження мінімуму функціонала (1) є задачею умовної мінімізації у гільбертовому просторі

$$\boldsymbol{I}[\boldsymbol{z}] \to \inf, \quad \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{Z}, \tag{2}$$

де $\boldsymbol{I}[\boldsymbol{z}]$ – лінійний неперервний функціонал, обмежений знизу на множині кінематично припустимих переміщень Z дійсного гільбертового простору $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{W}_2^{(1)}(\Omega)$.

Метод розв'язування. Наближений розв'язок задачі мінімізації (2) шукатимемо за допомогою проекційно-ітераційного методу, який поєднує ідеї методу скінченних елементів (МСЕ) як методу проекційного типу, а також ітераційного методу верхньої релаксації [8]. За проекційно-ітераційним варіантом МСЕ [3] апроксимуємо задачу (2) послідовністю задач умовної мінімізації в скінченновимірних просторах, які ізоморфні підпросторам простору H

$$\boldsymbol{I}_{\boldsymbol{h}}[\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h}}] \to \inf, \quad \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h}} \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{h}} \subset \boldsymbol{H}_{\boldsymbol{h}}, \tag{3}$$

де $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1, \boldsymbol{h}_2, \ldots \left(\boldsymbol{h}_{\boldsymbol{n}+1} < \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{n}}, \ \boldsymbol{n} = 1, 2, \ldots\right)$ – характерний розмір n-ї скінченно-елементної сітки, утвореної прямокутними лагранжевими елементами першого ступеня; $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h}} = \left(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h}}^{(1)}, \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h}}^{(2)}\right)^{\boldsymbol{T}}$ – вектор вузлових переміщень з компонентами $\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h}}^{(1)}, \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h}}^{(2)}$, які відповідають проекціям переміщень $\boldsymbol{u}$ і $\boldsymbol{v}$ на осі $\boldsymbol{Ox}$ та $\boldsymbol{Oy}$; $\boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{h}}$ – множина кінематично припустимих вузлових переміщень (дискретний аналог множини $\boldsymbol{Z} \subset \boldsymbol{H}$); $\boldsymbol{H}_{\boldsymbol{h}}$ – скінченновимірний простір векторних сіткових функцій, які визначено на сітці з кроком $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{n}}$.

Для кожної з отриманих дискретних задач (3), починаючи з задачі, яка визначена на найгрубшій сітці, методом верхньої релаксації будуватимемо лише декілька наближень, останнє з яких з використанням лінійної інтерполяції приймаємо за початкове наближення до розв'язку такої $(\boldsymbol{n}+1)$-ї задачі мінімізації. В результаті отримаємо такий ітераційний процес:

$$\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{k}+1)} = \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{k})} + \omega\left(\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}}^{(*)} - \boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h},\boldsymbol{i}}^{(\boldsymbol{k})}\right), \ \boldsymbol{k} = 0, 1, \ldots, \boldsymbol{k}_{\boldsymbol{n}} - 1, \ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{n}}, \ \boldsymbol{n} = 1, 2, \ldots, \ \boldsymbol{i} = \overline{1, \boldsymbol{N}}_{\boldsymbol{n}},$$
$$\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h}}^{(0)} = \Phi_{\boldsymbol{n}+1}\Phi_{\boldsymbol{n}}^{-1}\boldsymbol{z}_{\tau}^{(\boldsymbol{k}_{\boldsymbol{n}})}, \ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{n}+1}, \ \tau = \boldsymbol{h}_{\boldsymbol{n}}, \ \boldsymbol{n} = 1, 2, \ldots; \ (\boldsymbol{z}_{\boldsymbol{h}}^{(0)} \in \boldsymbol{Z}_{\boldsymbol{h}}, \ \boldsymbol{h} = \boldsymbol{h}_1), \tag{4}$$

де $0 < \omega < 2$ – параметр релаксації; N_n – загальна кількість кроків на n-й сітці; $z_h^{(0)}$, $h = h_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, – початкове наближення до точки мінімуму функції $I_h[z_h]$, $h = h_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$, яке одержали при інтерполяції $z_h^{(k_n)}$, $h = h_n$, $n = 1, 2, \ldots$, на дрібнішу триангуляцію, при $h = h_1$ $z_h^{(0)}$ – довільна сіткова функція із Z_h; Φ_n^{-1} – лінійний інтерполювальний оператор, що ставить у взаємно однозначну відповідність кожній сітковій функції $z_h \in H_h$ її неперервний в області $\overline{\Omega}$ інтерполянт; Φ_n – лінійний оператор, який виконує обернене відображення; $z_{h,i}^{(*)}$ – точка мінімуму функції

$$I_i^{(k)}\left[z_{h,i}\right] = I_h\left[z_{h,1}^{(k)}, z_{h,2}^{(k)}, \ldots, z_{h,i}, z_{h,i+1}^{(k-1)}, \ldots, z_{h,N}^{(k-1)}\right].$$

Так само, як у [1], можна перевірити виконання умов теореми про збіжність проекційно-ітераційного методу (4) для задачі (2).

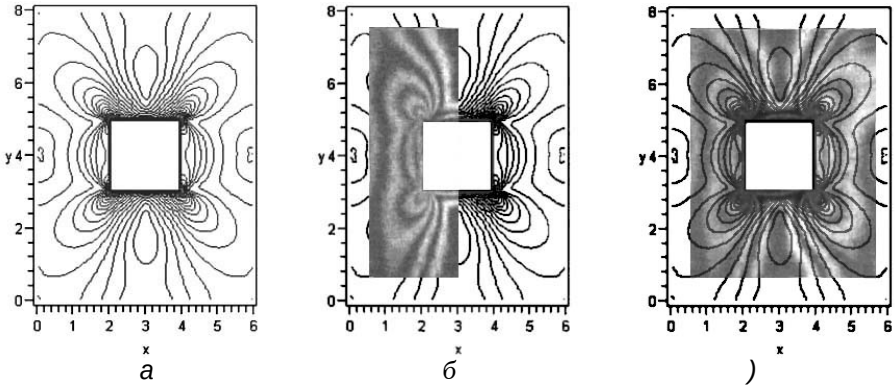
Числовий аналіз. Проекційно-ітераційний варіант МСЕ зреалізували на вкладених вдвічі скінченно-елементних сітках (13–17, 25–33, 49–65, 97–129, 193–257), сформованих прямокутними лагранжевими елементами першого ступеня ($h_{n+1} = h_n / 2$) з точністю розрахунків 10^{-5}, при параметрі релаксації $\omega = 1,75$. Кількість k_n наближень, які будують на n-му кроці ($n = 1, 2, \ldots$) проекційно-ітераційного процесу обирали, враховуючи похибки визначення наближеного розв'язку $z_h^{(k)}$ n-ї скінченновимірної задачі, зумовленої похибкою дискретизації, тобто якнайменше ціле k, яке задовольняє нерівність

$$\left\| z_h^{(k)} - z_h^{(k-1)} \right\| \le \varepsilon_n, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

де e_n – задана точність обчислень на кожній сітці.

Номер сітки	Сітка	Параметр e_n	Проекційно-ітераційний МСЕ	
			k_n	час розахунку, с
1	13–17	$0,1–10^{-5}$	26	0,01
2	25–33	$0,8–10^{-5}$	37	0,04
3	49–65	$0,4–10^{-5}$	103	0,24
4	97–129	$0,2–10^{-5}$	273	2,49
5	193–257	$0,1–10^{-5}$	690	26,3
5	193–257	$0,1–10^{-5}$	6646	261,69

У таблиці для прикладу подано результати числової реалізації традиційного МСЕ і його проекційно-ітераційного варіанту на комп'ютері Pentium III, 933 MHz, з 512 Mb оперативної пам'яті. Помітно, що враховуючи нульове початкове наближення, яке задається на найгрубшій сітці з кількістю вузлів 13–17, наближений розв'язок вихідної задачі проекційно-ітераційним МСЕ отримали за 26+37+103+273+690=1129 ітерацій. Під час розв'язування цієї задачі традиційним МСЕ на одній останній сітці з нульовим початковим наближенням розв'язок знайшли за 6646 ітерацій. З погляду витрат часу розрахунків на комп'ютері проекційно-ітераційний варіант МСЕ виявився у 9 разів ефективнішим від звичайного МСЕ. На рис. 5 показано результати розрахунку різниці головних нормальних напружень $\sigma_1 - \sigma_2$ для зіставлення з картиною ізохром, яку отримали в експерименті при дії тиску P.



а *б* *)*

Рис. 5. Результати розрахунку $\sigma_1 - \sigma_2$ на сітці 193–257:
а – лінії однакового рівня;
б, *в* – результат зіставлення фотографій ізоклін і ліній рівня

Після відновлення полів напружень числові результати порівняно з експериментальними даними для характерних перерізів, зображених на заштрихованій частині моделі (див. рис. 1, *б*): A–A $(\boldsymbol{x} = 0,\ 0 \le \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{L}_2 / 2)$; B–B $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}_1',\ 0 \le \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{L}_2 / 2)$; C–C $(\boldsymbol{x} = \boldsymbol{L}_1 / 2,\ 0 \le \boldsymbol{y} \le \boldsymbol{L}_2 / 2)$; D–D $(0 \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{L}_1',\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{L}_2 / 2)$; E–E $(0 \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{L}_1 / 2,\ \boldsymbol{y} = \boldsymbol{L}_2')$; F–F $(0 \le \boldsymbol{x} \le \boldsymbol{L}_1 / 2,\ \boldsymbol{y} = 0)$.

На рис. 6–11 зображено розподіл головних напружень, отриманих у експерименті (пунктирна лінія) і числово (суцільна лінія) зі застосуванням проекційно-ітераційного алгоритму. Помітний хороший збіг значень головних і дотичних напружень у межах точності експерименту.

Варто зазначити, що експериментальні дані для перерізу F–F одержали під час екстраполяції поліномами 6-го ступеня значень напружень у прилеглих зонах моделі, оскільки картина ізохром і ізоклін в цьому перерізі

внаслідок конструктивних особливостей приладу, в якому навантажується зразок, немає.

Деякі локальні збурення у місцях концентрації напружень пов'язані зі спотвореннями оптики і високою мірою густини ізохром у кутах отвору, що створює труднощі під час визначення напружень.

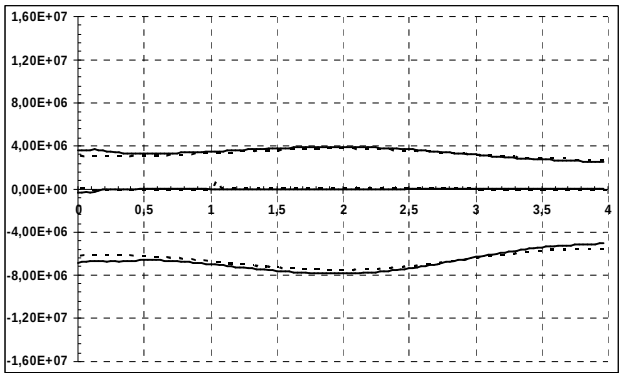


Рис. 6. Напруження в перерізі A–A

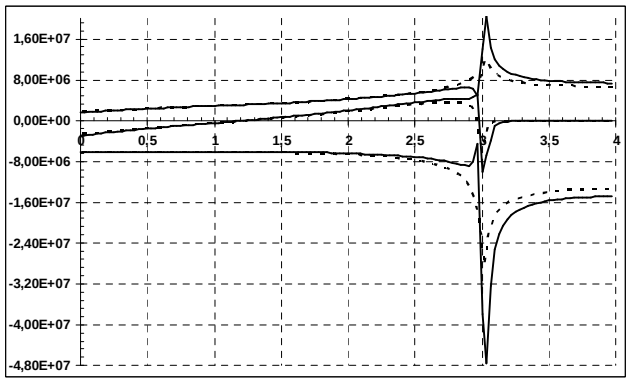


Рис. 7. Напруження перерізі B–B

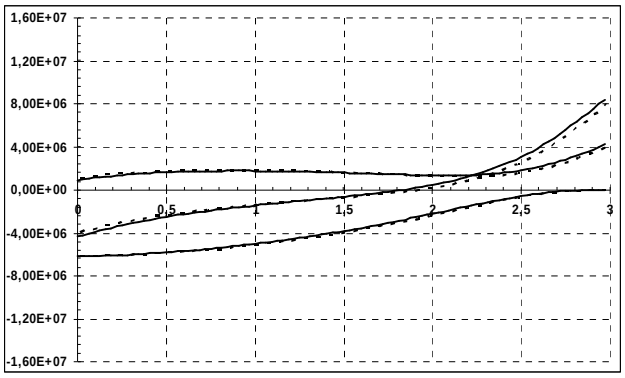


Рис. 8. Напруження в перерізі C–C

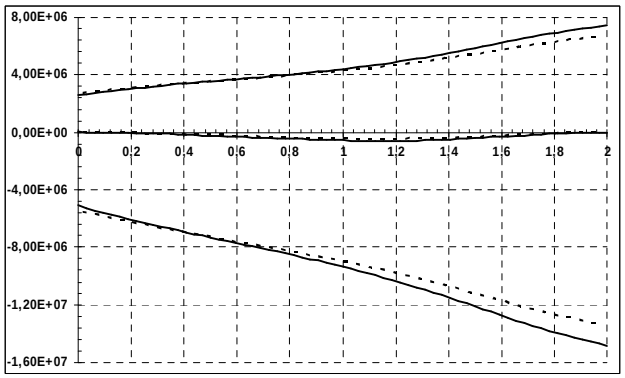


Рис. 9. Напруження в перерізі D–D

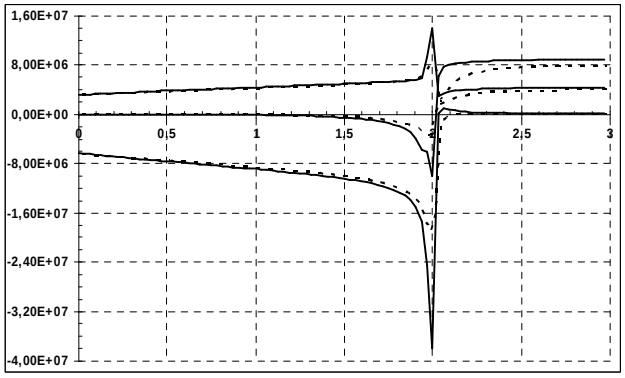


Рис. 10. Напруження в перерізі E–E

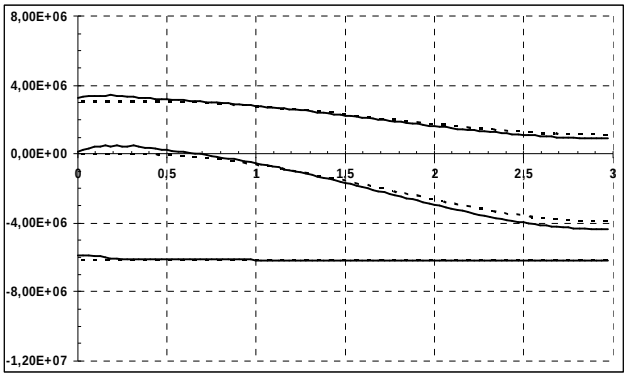


Рис. 11. Напруження в перерізі F–F

Висновки. Внаслідок експериментальних досліджень напружено-деформованого стану пластини з прямокутним отвором на підставі поляризаційно-оптичного методу отримано картини ізохром, ізоклін і відновлено поля переміщень і напружень. Експериментальні дані використали для оцінки коректності створеної математичної моделі та ефективності обчислювального алгоритму проекційно-ітераційного МСЕ. Проведене дослідження дає змогу зробити висновок про значні переваги з погляду зменшення витрат машинного часу застосування проекційно-ітераційного варіанту МСЕ до розв'язування задач теорії пружності для пластин з отвором порівняно зі звичайним МСЕ при незначному ускладненні обчислювального алгоритму. Зазначимо також, що зі збільшенням кількості невідомих задачі переваги проекційно-ітераційного методу суттєво збільшуються.

---

1. *Балашова С. Д., Тавадзе (Гарт) Э. Л.* О сходимости проекционно-итерационного метода решения экстремальной задачи с ограничениями // Математические модели и вычислительные методы в прикладных задачах. – Днепропетровск, 1996. – С. 128–134.

2. *Гарт Э. Л., Гарт Л. Л.* Применение проекционно-итерационного метода к исследованию напряженно-деформированного состояния пластины с отверстием // Вісник Донецьк. Ун-ту. Природничі науки. – Донецьк, 2002. – Вип. 2. – С. 54–58.

3. *Гарт Э. Л., Борисовская И. В.* Исследование вычислительной эффективности проекционно-итерационных вариантов методов конечных элементов и конечных разностей// Вісник Дніпропетр. ун-ту. Механіка. – 2004. – Вип. 8. – Т. 2. – С. 44–51.

4. *Гарт Э. Л., Лисицына Е. А.* Численные и экспериментальные исследования напряженно-деформированного состояния пластины с прямоугольным отверстием при сжатии / Э. Л. Гарт, Е. А. Лисицына // Проблеми обчислювальної механіки і міцності конструкцій. – Днепропетровск, 2006. – Т. 10. – С. 11–19.

5. *Гузь А.Н., Чернышенко И.С., Чехов В.Н.* Методы расчета оболочек. Т.1. Теория оболочек, ослабленных отверстиями. К., 1980.

6. *Зирка А. И., Чернописский Д. И.* Экспериментальные исследования концентраций напряжений в толстых цилиндрических оболочках с прямоугольными отверстиями при осевом сжатии // Прикладная механіка. 2001. – Т. 37. – № 5. С. 133–135.

7. *Молчанов И. Н.* Численные методы решения некоторых задач теории упругости. – К., 1979.

8. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. – М., 1978.

9. *Экспериментальные методы исследования деформаций и напряжений*: Справочное пособие / Под ред. Б. С. Касаткина. – К., 1981.

EXPERIMENTAL INVESTIGANION OF PLATE WITH HOLE BASED ON THE METHOD OF PHOTOELASTICITY

Eteri Hart, Elena Lisicina, Evgen Prokopalo

Dniepropetrovsk National University,
Gagarin Str., 72 49050 Dniepropetrovsk, Ukraine

The experimental research of state-and-strained state of axial loaded plate with rectangular hole for verification of correctness of numerical results based on the projective-iterative modifications of finite elements methods is developed. The control of the uniform deformation by means of hourtipe indicators is realized.

Key words: plate with hole, finite elements method, method of photoelasticity, projective-iterative method.

Стаття надійшла до редколегії 08.02.2007
Прийнята до друку 19.11.2008