

УДК 539.3

## МЕТОД РОЗВ'ЯЗУВАННЯ ПЛОСКОЇ ЗАДАЧІ ДЛЯ КРИВОЛІНІЙНОЇ ПЛАСТИНИ З КУТОВИМИ ТОЧКАМИ

Віктор РЕВЕНКО

*Інститут прикладних проблем механіки і математики  
ім. Я. С. Підстригача НАН України,  
вул. Наукова, 3б 79053 Львів, Україна*

Розроблено методику знаходження пружно-деформованого стану криволінійної пластини з кутковими точками. Метод ґрунтується на мінімізації квадратичної форми, яку визначають інтегралом від квадратів відхилення знайденого розв'язку і заданих граничних навантажень. Доведено збіжність розв'язку, а також знайдено оцінку точності задоволення граничних умов. Знайдено залежність між можливими стрибками зовнішніх зусиль у кутовій точці. Проведено числовий аналіз розподілу напружень і деформацій. Визначено якісні та кількісні особливості розподілу напружень у пластині.

*Ключові слова:* плоска задача, бігармонічне рівняння, криволінійна пластина, квадратична форма, аналітично-числовий метод.

Дослідженню пружно-деформованого стану (ПДС) пластин з кутковими точками присвячені праці [1, 2, 10]. Під час розв'язування плоскої задачі широко застосовують методи теорії комплексного змінного [4], проте для обмежених областей за наявності куткових точок ці методи не завжди ефективні. Внаслідок практичної важливості цієї задачі для її розв'язування у прямокутній області використовували різноманітні аналітичні підходи [1, 3, 11]. Огляд літератури наведено в [3, 11].

В [6, 9] теоретично розроблено новий аналітично-числовий метод розв'язування граничних функціональних рівнянь. Цим методом досліджено ПДС півсмуги [5] та довгої пластини [7]. В [8] метод обґрунтовано до розв'язування граничної задачі для бігармонічного рівняння в обмеженій області з кутковими точками.

Далі досліджено деякі аспекти моделювання ПДС криволінійної пластини за допомогою неортогональних функцій. Знайдено ПДС пластини під дією локальних навантажень. Досліджено збіжність, ефективність, точність задоволення граничних умов.

**1. Формулювання задачі.** Розглянемо плоску задачу для тонкої пластини сталої товщини  $h$ , яка займає в плані однозв'язну випуклу обмежену область  $D$  з кусково-гладким контуром  $L$  з обмеженою кількістю куткових точок. [4, 8, 9]. На контурі  $L$  задано граничні умови в нормальних і дотичних напруженнях

$$h\sigma_n(x,y)|_L = \sigma_g|_L, \quad h\tau_n(x,y)|_L = \tau_g|_L, \quad (1)$$

де зовнішні нормальні та дотичні навантаження  $\sigma_g$ ,  $\tau_g$  є відомими кусково-неперервними функціями вздовж контуру  $L$ . Надалі тривимірну пластину будемо

розглядати як двовимірну [4, 9]. Відомо, що граничні значення зовнішніх функцій  $\sigma_g|_L$ ,  $\tau_g|_L$  у кутовій точці можуть мати розрив. Позначимо ці значення на різних сторонах у кутовій точці відповідно  $\sigma_{gj}$ ,  $\tau_{gj}$ ,  $j = \overline{1,2}$ , де індекс 1 відповідає верхній стороні кутової області. Розглянемо умови рівноваги в кутовій точці випуклої області  $D$  з кутом  $\beta$  і сформулюємо теорему.

**Теорема 1.** Граничні значення зовнішніх навантажень  $\sigma_{gj}$ ,  $\tau_{gj}$ ,  $j = \overline{1,2}$  у кутовій точці контуру  $L$  при підході до неї з різних боків задовольняють умови

$$(\sigma_{g2} - \sigma_{g1}) \cos \beta = (\tau_{g2} - \tau_{g1}) \sin \beta, \quad (2)$$

де  $\beta$  кут області  $D$  після прикладення зовнішніх навантажень.

**Доведення.** Розмістимо систему координат так, що дотична до верхньої сторони кутової області у кутовій точці після деформації пластини буде паралельною до осі  $Ox$ . Зовнішні напруження  $\sigma_{g2}$ ,  $\tau_{g2}$ , які задані на нижній стороні кута (індекс 2), у кутовій точці можна виразити через нормальні та дотичні напруження [10, с. 36]

$$\begin{aligned} \sigma_{g2} / h &= \sigma_x \sin^2 \beta + \sigma_y \cos^2 \beta - 2\tau_{xy} \sin \beta \cos \beta, \\ \tau_{g2} / h &= (\sigma_x - \sigma_y) \sin \beta \cos \beta + \tau_{xy} (\sin^2 \beta - \cos^2 \beta). \end{aligned}$$

Якщо врахувати, що у введеної системі координат  $\sigma_y = \sigma_{g1} / h$ ,  $\tau_{xy} = \tau_{g1} / h$ , то після виключення з цих рівнянь невідомого значення напруження  $\sigma_x$  одержимо умову (2).

Проаналізуємо, які обмеження накладає умова (2) на зусилля в точках гладкості контуру  $L$ . Для точок на гладкій поверхні правильне  $\beta = \pi$  і з умови (2) випливає, що  $\sigma_{g2} = \sigma_{g1}$  при підході до заданої точки зліва і справа вздовж границі  $L$ . Отже, нормальні напруження не повинні мати точок розриву неперервності на поверхні, гладкій після деформації. Із рівнянь рівноваги також випливає, що в точках гладкості контуру  $L$  виконується  $\tau_{g2} = \tau_{g1}$ . Аналіз формули (2) показує, що в загальному випадку розрив неперервності нормальних або дотичних напружень на гладкому контурі буде пов'язаний з відповідною зміною кута контуру в точці розриву, що веде до порушення гіпотез лінійної теорії пружності у цій точці.

**Розділення ПДС на основний і збурений.** Бігармонічну функцію напружень  $\Phi(x, y)$ , яка задовольняє умови (1), будемо шукати як суму двох функцій  $\Phi_0$  і  $\Phi_p$ , які відповідно описують ПДС основного та збуреного станів [4, 9]. Враховуючи [6, 8], виділимо основний напружений стан, який відповідає головному вектору сил і моментів, прикладених до контуру пластини. Для цього в область  $D$  впишемо прямокутник  $\Pi$  із сторонами  $2a$ ,  $2b$ . Початок декартової системи координат розмістимо у точці симетрії прямокутника  $\Pi$ , вісь  $Oy$  направимо паралельно до сторін прямокутника довжиною  $2b$ . Позначимо вершини прямокутника буквами:  $A(-a, b)$ ,  $B(-a, -b)$ ,  $C(a, -b)$ ,  $D(a, b)$ . Сторони між вершинами  $A$  і  $B$ ;  $B$  і  $C$ ; і т.д. позначимо цифрами 1, 2, 3, 4, а відповідні лінії контуру  $L$ :  $L_j$ ,  $j = \overline{1,4}$ .

Розподілені зовнішні навантаження створюють на контурах  $L_j$  відповідні нормальні  $T_j$  й дотичні  $Q_j$  головні сили та моменти  $M_j$ ,  $j = \overline{1,4}$ . Ці нормальні й дотичні головні сили та моменти визначають бігармонічну функцію  $\Phi_0$ , яка має поліноміальний вигляд і знайдена в [9].

Враховуючи праці [8], подамо функцію напружень збуреного стану для пластини у вигляді ряду

$$\Phi_p(\alpha, \gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^2 \operatorname{Re} \{ b [ z_k^{-1} c_k^j f_j(c z_k, \alpha) \varphi(z_k, \gamma) + \xi_k^{-1} c_k^{2+j} f_j(c \xi_k, \alpha) \psi(\xi_k, \gamma) ] + \\ + a [ z_k^{-1} c_k^{4+j} f_j(w z_k, \gamma) \varphi(z_k, \alpha) + \xi_k^{-1} c_k^{6+j} f_j(w \xi_k, \gamma) \psi(\xi_k, \alpha) ], \quad (3)$$

де  $f_j(z, \alpha) = \exp \{ z [ (-1)^j \alpha - 1 ] \}$ ,  $\varphi(z, \gamma) = \gamma \sin z \gamma - \operatorname{tg} z \cos z \gamma$ ,  $\psi(\xi, \gamma) = -\operatorname{ctg} \xi \sin \xi \gamma + \gamma \cos \xi \gamma$  – комплексні функції;  $\gamma = y/b$ ,  $\alpha = x/a$  – безрозмірні координати;  $c = a/b$ ,  $w = b/a$  – відношення сторін;  $c_k^j$  – комплексні коефіцієнти;  $z_k$ ,  $\xi_k$  – безрозмірні комплексні спектральні параметри, відповідно корені характеристичних рівнянь:  $F^+(z) \equiv \sin 2z + 2z$ ,  $F^-(\xi) \equiv \sin 2\xi - 2\xi$  [2, 6], для яких  $\operatorname{Re} z_k > 0$ ,  $\operatorname{Re} \xi_k > 0$ .

**2. Перетворення і задоволення граничних умов.** Подамо праві частини граничних умов (1) як суму основного і збуреного станів:  $\sigma_g = \sigma_{oc} + \sigma_p$ ,  $\tau_g = \tau_{oc} + \tau_p$ , де  $\sigma_{oc}$ ,  $\tau_{oc}$  будуть визначати з відомого основного ПДС. Граничні умови для визначення збуреного стану, враховуючи [6], подамо у вигляді проєкцій напружень на осі  $Ox$ ,  $Oy$

$$\frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi_p}{\partial y} \Big|_L = X_{\sigma|L}, \quad \frac{d}{ds} \frac{\partial \Phi_p}{\partial x} \Big|_L = -Y_{\sigma|L}, \quad (4)$$

де  $X_{\sigma|L} = (\sigma_p \cos \theta - \tau_p \sin \theta) / h$ ,  $Y_{\sigma|L} = (\sigma_p \sin \theta + \tau_p \cos \theta) / h$ ;  $s$  – довжина дуги контуру  $L$ ;  $\theta$  – кут між нормаллю до контуру  $L$  і віссю  $Ox$ . Після інтегрування співвідношень (4) одержимо граничні умови на контурі  $L$

$$\frac{\partial \Phi_p}{\partial x} = P_1(\alpha, \gamma), \quad \frac{\partial \Phi_p}{\partial y} = P_2(\alpha, \gamma), \quad (5)$$

де  $P_1(\alpha, \gamma) = -\int_0^s Y_{\sigma} ds + C_1$ ,  $P_2(\alpha, \gamma) = \int_0^s X_{\sigma} ds + C_2$ ;  $C_1$ ,  $C_2$  – сталі інтегрування, які визначають жорстке зміщення тіла і приймемо, що вони дорівнюють нулю. Підставимо функцію напружень (3) в умови (5) і знайдемо явний вигляд граничних умов на контурі  $L$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \operatorname{Re} \{ c_k^j \chi_k^j(\alpha, \gamma) \} = P_1(\alpha, \gamma), \quad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j=1}^8 \operatorname{Re} \{ c_k^j \psi_k^j(\alpha, \gamma) \} = P_2(\alpha, \gamma), \quad (6)$$

де

$$\begin{aligned}\chi_k^j(\alpha, \gamma) &= (-1)^j f_j(cz_k, \alpha) \varphi(z_k, \gamma), \quad \chi_k^{2+j}(\alpha, \gamma) = (-1)^j f_j(c\xi_k, \alpha) \psi(\xi_k, \gamma), \\ \chi_k^{4+j}(\alpha, \gamma) &= f_j(wz_k, \gamma) \psi(z_k, \alpha), \quad \chi_k^{6+j}(\alpha, \gamma) = f_j(w\xi_k, \gamma) \chi(\xi_k, \alpha), \\ \psi_k^j(\alpha, \gamma) &= f_j(cz_k, \alpha) \psi(z_k, \gamma), \quad \psi_k^{2+j}(\alpha, \gamma) = f_j(c\xi_k, \alpha) \chi(\xi_k, \gamma), \\ \psi_k^{4+j}(\alpha, \gamma) &= (-1)^j f_j(wz_k, \gamma) \varphi(z_k, \alpha), \quad \psi_k^{6+j}(\alpha, \gamma) = (-1)^j f_j(w\xi_k, \gamma) \psi(\xi_k, \alpha), \quad j = \overline{1, 2}; \\ \chi(z, \gamma) &= m(z) \cos(z\gamma) - \gamma \sin(z\gamma), \quad m(z) = 1/z - ctg(z).\end{aligned}$$

### 3. Мінімізація відхилення розв'язку від заданих зовнішніх навантажень.

Обмежимося у співвідношеннях (3), (6) скінченною кількістю  $N$  щодо індексу  $k$  членів ряду. Оскільки кожний доданок у рядах (3) є розв'язком бігармонічного рівняння, то і обрізаний ряд буде точним розв'язком плоскої задачі. У [6, 9] теоретично розроблено метод інтегральних моментів розв'язування граничної задачі для бігармонічного рівняння у прямокутній області. Модифікуємо його на випадок криволінійної області. Перейдемо у граничних умовах (6) від комплексних до дійсних позначень. Для цього виділимо у невідомих комплексних коефіцієнтах  $c_k^j, j = \overline{1, 8}$  дійсну й уявну частини:  $c_k^j = x_{8k-8+j} + ix_{8(N+k-1)+j}$ ; аналогічно вчинимо з комплексними функціями, які стоять біля цих коефіцієнтів. Мірою наближення розв'язку (3) до заданих зовнішніх навантажень в граничних умовах (6) є мінімум інтеграла квадратичного відхилення вздовж контуру  $L$

$$\begin{aligned}\Psi\{x_1, \dots, x_{16N}\} &= \oint_L \left\{ \left[ \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N [x_{8k-8+j} \chi_{rk}^j(\alpha, \gamma) - x_{8(N+k-1)+j} \chi_{yk}^j(\alpha, \gamma)] - P_1(\alpha, \gamma) \right]^2 + \right. \\ &+ \left. \left[ \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N [x_{8k-8+j} \psi_{rk}^j(\alpha, \gamma) - x_{8(N+k-1)+j} \psi_{yk}^j(\alpha, \gamma)] - P_2(\alpha, \gamma) \right]^2 \right\} ds = \quad (7) \\ &= \sum_{k,j=1}^{16N} x_k x_j W_k^j - 2 \sum_{k=1}^{16N} x_k V_k + P^2,\end{aligned}$$

де

$$\begin{aligned}\chi_{rk}^j(\alpha, \gamma) &= \operatorname{Re} \chi_k^j(\alpha, \gamma), \quad \chi_{yk}^j(\alpha, \gamma) = \operatorname{Im} \chi_k^j(\alpha, \gamma), \quad \psi_{rk}^j(\alpha, \gamma) = \operatorname{Re} \psi_k^j(\alpha, \gamma), \\ \psi_{yk}^j(\alpha, \gamma) &= \operatorname{Im} \psi_k^j(\alpha, \gamma); \quad W_{8k-8+j}^{8m-8+n} = \oint_L [\chi_{rk}^j(\alpha, \gamma) \chi_{rm}^n(\alpha, \gamma) + \psi_{rk}^j(\alpha, \gamma) \psi_{rm}^n(\alpha, \gamma)] ds, \\ W_{8(N+k-1)+j}^{8m-8+n} &= \oint_L [\chi_{yk}^j(\alpha, \gamma) \chi_{rm}^n(\alpha, \gamma) + \psi_{yk}^j(\alpha, \gamma) \psi_{rm}^n(\alpha, \gamma)] ds, \\ W_{8(N+k-1)+j}^{8(N+m-1)+n} &= 2 \oint_L [\chi_{rk}^j(\alpha, \gamma) \chi_{ym}^n(\alpha, \gamma) + \psi_{rk}^j(\alpha, \gamma) \psi_{ym}^n(\alpha, \gamma)] ds, \quad k, m \leq N, \quad n, j \leq 8; \\ W_l^d &= W_d^l, \quad l, d \leq 16N; \quad V_l = \operatorname{Re} A_l, \quad V_{l+8N} = -\operatorname{Im} A_l, \quad l \leq 8N; \\ A_{8k-8+j} &= \oint_L [P_1(\alpha, \gamma) \chi_k^j(\alpha, \gamma) + P_2(\alpha, \gamma) \psi_k^j(\alpha, \gamma)] ds, \quad k = \overline{1, N}, \quad j = \overline{1, 8}; \\ P^2 &= \oint_L [P_1(\alpha, \gamma)^2 + P_2(\alpha, \gamma)^2] ds.\end{aligned}$$

Праву частину рівності (7) можна інтерпретувати як додатно визначену квадратичну форму. Отже, функціонал  $\Psi\{x_1, \dots, x_{16N}\}$  буде квадратичною формою. Її мінімумом позначимо  $F(N)$ . Коефіцієнти  $x_k^N$ , на яких досягається це мінімальне значення, визначатимуть за формулою (3) наближений розв'язок  $\Phi_N(\alpha, \gamma)$ . Цей розв'язок для заданого  $N$  буде давати найліпше наближення до заданих зовнішніх навантажень у граничних умовах (6). Для визначення мінімуму квадратичної форми знайдемо частинні похідні  $\frac{\partial \Psi_N}{\partial x_j}$ , прирівняємо їх до нуля і одержимо систему рівнянь

$$\sum_{k=1}^{16N} x_k^N W_k^j = V_j, \quad j = \overline{1, 16N}. \quad (8)$$

Розв'яжемо систему лінійних рівнянь (8). На знайдених коефіцієнтах  $x_k^N$  функціонал  $\Psi_N$  набуває своє мінімальне значення, яке дорівнює  $F(N)$ .

**Лема.** Функція  $F(N)$  є невід'ємною, незростаючою і рівною

$$F(N) = \oint_L [P_1(\alpha, \gamma)^2 + P_2(\alpha, \gamma)^2] ds - \sum_{k=1}^{16N} x_k V_k. \quad (9)$$

**Доведення.** За означенням квадратична форма (7) є невід'ємною. Отже,  $F(N) \geq 0$ . Після підстановки рівнянь (8) в квадратичну форму (7) одержимо вираз (9). Не зростання  $F(N)$  доведемо від протилежного. Припустимо, що  $F(N) < F(N+1)$ . Оскільки квадратична форма  $\Psi_{N+1}$  охоплює  $\Psi_N$  як частковий випадок, коли  $x_k^N = 0$ ,  $k = \overline{16N+1, 16(N+1)}$ , то припущення  $F(N) < F(N+1)$  суперечить визначенню мінімальності функції  $F(N+1)$ . Отож,  $F(N+1) \leq F(N)$ . Кінець доведення.

**Означення.** Якщо для довільного  $\varepsilon > 0$  існує  $N$  таке, що  $F(N) < \varepsilon$ , то границю побудованих бігармонічних функцій  $\phi(\alpha, \gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N(\alpha, \gamma)$  будемо називати слабким розв'язком задачі (6).

Введене означення дає змогу чисельно перевірити чи будуть знайдені наближені розв'язки  $\Phi_N(\alpha, \gamma)$  наближатися до слабого розв'язку при  $N \rightarrow \infty$ .

Покажемо, що числове значення  $\delta_N = \sqrt{F(N)}$  можна розглядати як відстань між наближеним і точним розв'язком граничної задачі (6).

**Теорема 2.** Слабкий розв'язок є точним розв'язком задачі (6) у метриці простору  $L_2[L]$ , а значення  $\delta_N$  характеризує похибку задоволення функцією  $\Phi_N(\alpha, \gamma)$  граничних умов (6).

**Доведення.** Розглянемо слабкий розв'язок  $\phi(\alpha, \gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N(\alpha, \gamma)$ . Для функцій  $F(N)$ , які визначають через функцію  $\Phi_N(\alpha, \gamma)$ , виконується умова  $\lim_{N \rightarrow \infty} F(N) = 0$ .

Кожна функція  $\Phi_N(\alpha, \gamma)$  задовольняє бігармонічне рівняння. Покажемо, що зі збільшенням  $N$  вона буде задовольняти граничні умови (6) з заданою точністю. Згідно з означенням слабкого розв'язку для довільного  $\varepsilon > 0$  існує значення  $N$  таке, що  $F(N) < \varepsilon$ . Для довільного  $N_1$ ,  $N_1 \geq N$  побудуємо функцію  $\Phi_{N_1}$ . З леми випливає  $F(N_1) \leq F(N)$ . З виразу функціонала (7) для функцій  $\Phi_{N_1}(\alpha, \gamma)$ ,  $N_1 > N$  одержимо такі нерівності:

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}\{a_k^j \chi_k^j(\alpha, \gamma)\} - P_1(\alpha, \gamma) \right\|_{L_2[L]}^2 &\leq F(N) < \varepsilon, \\ \left\| \sum_{j=1}^8 \sum_{k=1}^N \operatorname{Re}\{a_k^j \psi_k^j(\alpha, \gamma)\} - P_2(\alpha, \gamma) \right\|_{L_2[L]}^2 &\leq F(N) < \varepsilon, \end{aligned} \quad (10)$$

де  $a_k^j = x_{8k-8+j}^{N_1} + ix_{8(N+k-1)+j}^{N_1}$ . Із нерівностей (10) випливає, що послідовність функцій  $\Phi_N(\alpha, \gamma)$  є фундаментальною в  $L_2[L]$ . Отже, границя послідовності існує і ми в границі одержимо слабкий розв'язок  $\phi(\alpha, \gamma) = \lim_{N \rightarrow \infty} \Phi_N(\alpha, \gamma)$ , який точно задовольняє умови (6) у нормі  $L_2[L]$ . Внаслідок існування і єдиності розв'язку плоскої задачі, слабкий розв'язок буде збігатися у метриці  $L_2[L]$  з точним розв'язком задачі (6). Нерівності (10) показують, що значення  $F(N)$  є оцінкою похибки задоволення функцією  $\Phi_N$  граничних умов. Врахувавши лему й вище наведені нерівності, можна вважати, що значення  $\sqrt{F(N)}$  є лінійною оцінкою у метриці  $L_2[L]$  похибки задоволення функцією  $\Phi_N(\alpha, \gamma)$  граничних умов (6). Кінець доведення.

**4. Числовий аналіз.** Запропонований метод реалізовано для знаходження НДС прямокутної пластини. Аналіз числових розрахунків показав: нульові крайові умови на поверхнях 2, 4 задовольняються з точністю  $10^{-18}$ ; квадратичну форму (7) вибрано так, що квадратний корінь від  $\operatorname{Min}F$  характеризує точність задоволення граничних умов (6); мінімум квадратичної форми (7), якщо  $N \rightarrow \infty$  прямує до нуля.

**4.1. Знаходження НДС прямокутної пластини.** Для апробації запропонованого методу розв'яжемо граничну задачу для прямокутної пластини, яка займає прямокутну область  $D = \{(x, y) \in ([-a, a] \times [-b, b])\}$ . В цьому випадку область  $D$  збігається з прямокутником  $\Pi$ . Вважаємо, що сторони 2, 4 прямокутника вільні від навантажень, а на сторонах 1, 3 задані симетричні стосовно координати  $\gamma$  нормальні  $\sigma_m(\gamma)$  і несиметричні дотичні напруження  $\tau_m(\gamma)$ ,  $m = 1, 3$ . Після виділення основного НДС граничні умови на сторонах 1, 3 набувають вигляду

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{z_k [c_k^1 e^{-z_k c(m-1)} + c_k^2 e^{z_k c(m-2)}] \chi(z_k, \gamma)\} = \sigma_{2m-1}(b\gamma),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{Re}\{z_k [c_k^1 e^{-z_k c(m-1)} - c_k^2 e^{z_k c(m-2)}] \psi(z_k, \gamma)\} = \tau_{2m-1}(b\gamma), \quad m = \overline{1, 2}.$$

**4.2. ПДС пластини під дією змодельованої зосередженої сили.** Силу можна моделювати локальним навантаженням, яке описується максимальним значенням, областю локалізації і сумарною силою  $T_1$ . Такі навантаження можна описати їхнім максимальним значенням, областю локалізації та сумарною силою, яку вони створюють.

Нормальну стискаючу силу  $T_1$ , прикладену до прямокутної пластини на стороні 1 в точці  $(-1, 0)$ , будемо моделювати локалізованим в околі початку координат нормальним навантаженням  $h\sigma_1(\gamma)$ , яке урівноважується навантаженнями розподіленими на стороні 3. Дотичне навантаження на сторонах пластини приймемо таким, що дорівнює нулю. Розглянемо параболічне навантаження

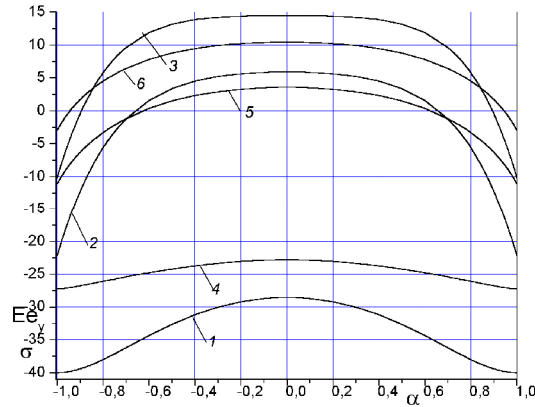
$$\sigma_1(\gamma) = \sigma_M(\gamma_0^2 - \gamma^2) / \gamma_0^2, \quad \gamma \in [-\gamma_0, \gamma_0]; \quad \sigma_1(\gamma) = 0, \quad \gamma \notin [-\gamma_0, \gamma_0],$$

де  $\gamma_0 = 1.5 / |\sigma_M|$ ,  $\sigma_M$  – визначає максимальне значення локального навантаження. Для цього навантаження основний ПДС нормується умовою  $\sigma_x^0 = 1$ , а всі інші компоненти дорівнюють нулю. Внаслідок симетрії розподілу, область локалізації нормальної сили дорівнює  $\Delta = 2\gamma_0 = 3 / |\sigma_M|$ . Наведемо знайдені оцінки мінімуму функції  $F(N)$  залежно від значення  $N$ :  $F(100) = 0.0017$ ;  $F(200) = 3.1 \cdot 10^{-5}$ . Похибка задоволення граничних умов при  $N = 200$ , менша ніж  $10^{-2}$ . Зі збільшенням  $N$  мінімум квадратичної форми й похибка задоволення граничних умов швидко наближається до нуля.

Для детального аналізу ПДС треба дослідити як змінюються нормальні напруження під прикладеною силою, а також знайти деформації  $e_y = \frac{\partial v}{\partial y}$  у матеріалі пластини. Проведено аналіз розподілу напружень і деформацій залежно від  $\alpha = x/b$  при  $\gamma = 0$ , де нормальні напруження набувають максимальних значень. Дослідження показали, що компоненти тензора напружень і деформацій в перерізі  $\gamma = 0$  не суттєво залежать від заданого закону розподілу навантажень. Напруження  $\sigma_y(\alpha, 0)$  у випадку  $a \gg b$  прямують до значень основного ПДС швидше, ніж  $\sigma_x(\alpha, 0)$ . Область локалізації напружень  $\sigma_y(\alpha, \gamma)$  за змінними  $\alpha$ ,  $\gamma$  є сумірною зі значенням  $\Delta$ .

Закономірності розподілу напружень у довгій пластині  $a \gg b$  в околі прикладання такої змодельованої сили розглянуто в [7]. Розглянемо випадок  $a < b$ ,  $\sigma_M = -40$ , при цьому максимальне навантаження  $\sigma_{1\max} = -40$  і прикладене в точці  $(-1; 0)$ ,  $\Delta = 0.075$ . Досліджували розподіл напружень при зміні  $\alpha = x/a$  залежно від відношення довжин сторін  $c = a/b$ . Для значень  $c < 0.5$  на розподіл напружень суттєво впливають згінні напруження, які залежать від умов закріплення

пластини. На рис. показано задачі про стиск пластини двома силами  $\sigma_M = -40$ , симетрично прикладеними посередині сторін  $\alpha = \pm 1$ , для  $a/b = 0.15$ .



Напруження в пластині вздовж осі  $Ox$  при стиску двома силами: 1 –  $\sigma_x(\alpha, 0)$ ; 2 –  $\sigma_y(\alpha, 0)$ ; 3 –  $Ee_y(\alpha, 0)$ ; 4 –  $\sigma_y(\alpha, 0.02)$ ; 5 –  $\tau_{xy}(\alpha, 0.02)$ ; 6 –  $Ee_y(\alpha, 0.02)$

Як бачимо, за стиску тонкої пластини на деякій відстані від краю виникає зона значних розтягуючих напружень  $\sigma_y$  і деформації  $e_y$ . Зауважимо, що такі додатні деформації можуть спричинити руйнування пластини з крихких матеріалів за її стиску.

**ВИСНОВКИ.** Розроблено аналітично-числовий метод розв'язування двовимірних граничних задач теорії пружності, показана його збіжність і точність. Метод ґрунтується на мінімізації квадратичної форми, яка є інтегральною мірою наближення шуканого розв'язку до заданих граничних навантажень. Доведено збіжність нового аналітично-числового методу розв'язування двовимірних граничних задач теорії пружності. Показано, що похибка задоволення граничних умов визначає корінь квадратний з мінімуму квадратичної форми (7), і похибка зі збільшенням  $N$  наближається до нуля.

Числовим моделюванням знайдено, що при інженерній оцінці руйнування матеріалу пластини в зоні дії локально зосередженої сили, крім напружень  $\sigma_x$ , треба враховувати також вплив  $\sigma_y$ . З'ясовано, що напруження  $\sigma_y(\alpha, 0)$  набагато швидше, ніж  $\sigma_x(\alpha, 0)$  змінюються, так що уже на відстані порядку  $\Delta$  їхній знак під максимальним значенням прикладеної сили міняється на протилежний. Знайдено, що під прикладеною стискаючою силою виникає зона значних розтягуючих напружень  $\sigma_y$  і деформації  $e_y$ , що може спричинити руйнування пластини з крихких матеріалів.

Запропоновану методику обчислень можна використати до уточненого розрахунку напружень в околі прикладання сил у балках і тонких пластинах. Для цього до знайдених у статті напружень треба додати напруження, зумовлені силами, які залежать від умов закріплення.



1. *Гринченко В.Т., Улитко А.Ф.* Пространственные задачи теории упругости и пластичности // Т. 3. Равновесие упругих тел канонической формы. – К., 1985.
2. *Космодамианский А.С., Шалдырван В.А.* Толстые многосвязные пластины. – К., 1978.
3. *Мелешко В.В.* Бигармоническая задача для прямоугольника: история и современность // Мат. методы та фіз.-мех. поля. – 2004. – 47, № 3. – С. 45–68.
4. *Мухелишвили Н.И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости. – М., 1966.
5. *Ревенко В.П.* Застосування нового аналітично-числового методу Остроградського до розв'язування плоскої задачі теорії пружності // Доп. НАН України. – 2007. – № 4. – С. 59–65.
6. *Ревенко В.П.* Розвиток спектрального методу Штурма-Ліувілля розв'язування граничної задачі для бігармонічного рівняння // Нелінійні коливання. – 2003. – 6, N.3. – С. 368–377.
7. *Ревенко В.П.* Дослідження розподілу напружень у прямокутній пластині під дією розподілених навантажень // Фіз. – хім. механіка матеріалів. – 2007 – 43, № 3, – С. 12–18.
8. *Ревенко В.П.* Про застосування нового аналітично-числового методу до розв'язування граничної задачі для бігармонічного рівняння у обмеженій області з кутковими точками // Математичний вісник Наукового товариства ім. Шевченка. – 2006. – том 3. – С. 113–125.
9. *Ревенко В.П.* Знаходження плоского напруженого стану прямокутної пластини методом інтегральних моментів // Вісник Львівського університету. Сер. мех.-мат. – 2006. – Вип. 65. – С. 232–240.
10. *Тимошенко С.П., Гудьер Дж.* Теория упругости. – М., 1975.
11. *Шалдырван В.А.* Некоторые результаты и проблемы трехмерной теории пластин (обзор) // Прикладная механика. – 2007. – Т. 43, № 2. – С. 45–69.

## THE METHOD OF A SOLUTION OF A PLANE PROBLEM FOR A CURVILINEAR PLATE WITH ANGULAR POINTS

**Victor Revenko**

*Pidstryhach Institute for Applied Problems of Mechanics and Mathematics,  
Naukova Str., 3b 79053 Lviv, Ukraine*

It is proposed a method of the solution of a plane problem for a curvilinear plate with angular points. The method is based on minimization of the quadratic form which characterizes integral of a square-law deviation of the found solution from the set boundary conditions. Convergence of the gained solution is proved, and also the estimation of precision of satisfaction of boundary conditions is found. The numerical analysis of a stress distribution and strains in a plate is carried out. Qualitative peculiarities of a stress distribution in a plate are determined.

*Key words:* plane elastostatics problem, biharmonic equation, curvilinear plate, quadratic form, analytical and numerical method.

Стаття надійшла до редколегії 16.03.2007

Прийнята до друку 19.11.2008