

УДК 539.3

**ДИНАМІЧНА ЦЕНТРАЛЬНОСИМЕТРИЧНА ЗАДАЧА
ТЕРМОМЕХАНІКИ ДЛЯ ПОРОЖНИСТОЇ ЕЛЕКТРОПРОВІДНОЇ
КУЛІ ЗА УМОВ ПОВЕРХНЕВОЇ ДІЇ ЕЛЕКТРОМАГНІТНОГО
ІМПУЛЬСУ**

Роман МУСІЙ, Галина СТАСЮК

*Національний університет “Львівська політехніка”,
вул. Ст. Бандери, 12 79013 Львів, Україна*

З використанням кубічної апроксимації одержано розв’язок динамічної центральносиметричної задачі для порожнистої кулі, що перебуває в умовах поверхневого електромагнітного навантаження.

Ключові слова: термопружність, електромагнітопружність, пондеромоторні сили, куля, динамічна задача.

У працях [1–2] розглянуто задачу про занурення з великою швидкістю суцільної електропровідної кулі в постійне магнітне поле величиною H_0 . Математичне формулювання задачі термомеханіки для порожнистої кулі, яка перебуває за умов дії зовнішнього нестационарного електромагнітного поля (ЕМП), заданого азимутальною компонентою, на обидвох поверхнях сформульовано у [3–4]. Формулювання задачі електродинаміки за умов дії нестационарного електромагнітного поля на зовнішній поверхні довгого порожнистого циліндра, розв’язок і числовий аналіз відповідної задачі термомеханіки за таких умов електромагнітної дії наведено в працях [5–6]. У цій праці сформульовано задачу термомеханіки для порожнистої електропровідної кулі, яка перебуває за умов дії електромагнітного імпульсу (ЕМІ) на зовнішній поверхні, подано розв’язки сформульованої задачі та проведено числовий аналіз.

Формулювання задачі. Розглядаємо порожнисту пружну електропровідну кулю з внутрішнім r_0 і зовнішнім r_1 радіусами, віднесено до сферичної системи координат (r, φ, θ) . Куля перебуває за умов дії нестационарного ЕМП, заданого значеннями азимутальної компоненти H_φ вектора напруженості магнітного поля $\vec{H} = \{0; H_\varphi(r, t); 0\}$ на її поверхнях; матеріал кулі однорідний, ізотропний і неферромагнітний, а його фізико-механічні характеристики – постійні. Дія ЕМП на кулю спричиняє виникнення джоулевого тепла Q і пондеромоторних сил \vec{F} . Ці фактори зумовлюють появу полів температури і механічних напружень у кулі. Розрахунок параметрів цих полів виконуємо за відомою в літературі схемою для задач термомеханіки електропровідних тіл за умов дії зовнішніх ЕМП [7].

У випадку, якщо зовнішня поверхня кулі $r = r_1$ перебуває за умов дії нестационарного ЕМП, заданого значеннями азимутальної компоненти H_φ вектора напруженості магнітного поля \vec{H} на зовнішній поверхні кулі

$$H_\varphi(r_1, t) = H_\varphi^+(t), \quad (1)$$

то на внутрішній поверхні на підставі закону Ампера і теореми Стокса з урахуванням сталості магнітного поля у порожнині кулі записуємо граничну умову третього роду

$$\frac{\partial H_\varphi(r_0, t)}{\partial r} + \frac{H_\varphi(r_0, t)}{r} = 0. \quad (2)$$

Колова компонента $H_\varphi(r, t)$ вектора \vec{H} у кулі на підставі співвідношень Максвелла задовольняє рівняння електродинаміки

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \sigma \mu \frac{\partial}{\partial t} \right) H_\varphi = 0, \quad (3)$$

за граничних умов (1)–(2) на поверхнях $r = r_1$ та $r = r_0$ і нульової початкової умови

$$H_\varphi(r, 0) = 0, \quad (4)$$

що відповідає відсутності поля у початковий момент часу. Тут σ – коефіцієнт електропровідності; μ – магнітна проникність матеріалу циліндра.

За знайденим виразом функції $H_\varphi(r, t)$ питомі густини джоулевих тепловиділень Q і пондеромоторної сили \vec{F} виражають формулами [3, 4]

$$Q = \frac{1}{\sigma} \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} \right)^2, \quad \vec{F} = \left\{ F_r(r, t) = -\mu \left(\frac{\partial H_\varphi}{\partial r} + \frac{H_\varphi}{r} \right) H_\varphi; 0; 0 \right\}. \quad (5)$$

Відомо, що за умов дії імпульсних ЕМП на поверхні електропровідного тіла процес його нагрівання відбувається адиабатично [8]. Тоді розподіл температури в кулі запишемо

$$T(r, t) = T_0(r) + \frac{\kappa}{\lambda} \int_0^t Q(r, t) dt, \quad (6)$$

де λ , κ – коефіцієнти тепло- та температуропровідності, $T_0(r)$ – розподіл температури в кулі в початковий момент часу $t = 0$.

Відмінні від нуля радіальна σ_{rr} , азимутальна $\sigma_{\varphi\varphi}$ та меридіанна $\sigma_{\theta\theta}$ ($\sigma_{\theta\theta} = \sigma_{\varphi\varphi}$) компоненти тензора динамічних напружень $\mathcal{E}(r, t)$ визначають зі системи рівнянь динамічної центральносиметричної задачі термопружності [9]

$$\frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial r^2} + \frac{4}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} - \frac{1}{c_1^2} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial t^2} = W^F + W^T,$$

$$\frac{\partial^2 \sigma_{\varphi\varphi}}{\partial t^2} + 4c_2^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{1}{r^2} \sigma_{\varphi\varphi} = 2c_2^2 \frac{1+\nu}{1-\nu} \left[\frac{2}{r} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{2}{r^2} \sigma_{rr} + \frac{F_r}{r} \right] + \frac{\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 \sigma_{rr}}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2}, \quad (7)$$

$$\text{де } W^F = -\frac{\partial F_r}{\partial r} - \frac{2}{1-\nu} \frac{F_r}{r}, \quad W^T = \alpha \rho \frac{1+\nu}{1-\nu} \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \frac{\alpha E}{1-\nu} \frac{2}{r} \frac{\partial T}{\partial r}; \quad c_1^2 = \frac{(1-\nu)E}{\rho(1+\nu)(1-2\nu)},$$

$c_2 = \sqrt{E/(2\rho(1+\nu))}$ – швидкості пружних хвиль розширення та формозміни; α , ν – коефіцієнти лінійного теплового розширення та Пуассона; E – модуль пружності; ρ – густина матеріалу кулі.

За відсутності переміщень і швидкостей переміщень у початковий момент часу $t = 0$ початкові умови на функції σ_{rr} і $\sigma_{\varphi\varphi}$ матимуть вигляд

$$\sigma_{jj}(r, 0) = 0, \quad \frac{\partial \sigma_{jj}(r, 0)}{\partial t} = -\frac{\alpha E}{1-2\nu} \frac{\partial T(r, 0)}{\partial t} \quad (j = r, \varphi). \quad (8)$$

Якщо поверхні кулі перебувають за умов силового навантаження, заданого вектором поверхневих навантажень $\vec{P} = \{P_r; 0; 0\}$, то граничні умови для компоненти σ_{rr} записують

$$\sigma_{rr}(r_0, t) = P_r^-(t) = \sigma_{rr}^-(t); \quad \sigma_{rr}(r_1, t) = P_r^+(t) = \sigma_{rr}^+(t). \quad (9)$$

Відповідно до принципу незалежності фізичних дій: джоулевого тепла та пондеромоторної сили [8], компоненти $\sigma_{jj}(r, t) = 0$ ($j = r, \varphi, \theta$) тензора напружень подають сумою двох складових

$$\sigma_{jj} = \sigma_{jj}^Q + \sigma_{jj}^F, \quad (10)$$

де σ_{jj}^Q і σ_{jj}^F – компоненти, зумовлені відповідно джоулевым теплом Q та пондеромоторною силою \vec{F} .

Для визначення компонент σ_{jj}^Q тензора напружень використовуємо систему вихідних рівнянь (7), приймаючи $W^F = 0$, а компоненти σ_{jj}^F шукаємо з системи (7) при $W^T = 0$; початкові та граничні умови для σ_{jj}^Q та σ_{jj}^F отримують аналогічно з умов (8) та (9).

Методика розв'язування. Для знаходження розв'язків сформульованих вище крайових задач електродинаміки, теплопровідності та термопружності використаємо кубічну апроксимацію шуканих функцій за радіальною координатою [4]

$$\Phi(r, t) = \sum_{i=0}^3 a_i^\Phi(t) r^i, \quad \Phi(r, t) = \{H_\varphi, \sigma_{rr}\}. \quad (11)$$

Коефіцієнти $a_i^\Phi(t)$ апроксимаційних поліномів (11) визначаємо через граничні значення $\Phi^\pm(t)$ функцій $\Phi(r, t)$ на поверхнях $r = r_0$ і $r = r_1$ та їхні інтегральні характеристики

$$\Phi_s(t) = \int_{r_0}^{r_1} \Phi(r, t) r^s dr, \quad s = 1, 2 \quad (12)$$

у вигляді

$$\Phi(r, t) = \sum_{i=0}^3 [a_{i,1}^\Phi \Phi_1(t) + a_{i,2}^\Phi \Phi_{\varphi 2}(t) + a_{i,3}^\Phi \Phi^+(t) + a_{i,4}^\Phi \Phi^-(t)] r^i. \quad (13)$$

Зінтегрувавши рівняння електродинаміки (3) та рівняння на радіальну компоненту σ_{rr} тензора напружень системи рівнянь термопружності (7) відповідно до формули (12), отримаємо системи двох диференціальних рівнянь на інтегральні характеристики функції $H_\varphi(r, t)$:

$$\begin{cases} \frac{d H_{\varphi 1}(t)}{d t} - d_1^H H_{\varphi 1}(t) - d_2^H H_{\varphi 2}(t) = d_3^H H_\varphi^+(t), \\ \frac{d H_{\varphi 2}(t)}{d t} - d_4^H H_{\varphi 1}(t) - d_5^H H_{\varphi 2}(t) = d_6^H H_\varphi^+(t) \end{cases} \quad (14)$$

та функції $\sigma_{rr}(r, t)$

$$\begin{cases} \frac{d^2 \sigma_{rr 1}(t)}{d t^2} - d_1^\sigma \sigma_{rr 1}(t) - d_2^\sigma \sigma_{rr 2}(t) = B_1^T(t) + B_1^F(t), \\ \frac{d^2 \sigma_{rr 2}(t)}{d t^2} - d_5^\sigma \sigma_{rr 1}(t) - d_6^\sigma \sigma_{rr 2}(t) = B_2^T(t) + B_2^F(t), \end{cases} \quad (15)$$

де

$$d_l^H = \frac{2\alpha_1 a_{1l}^H + 6\alpha_2 a_{2l}^H + 12\alpha_3 a_{3l}^H}{\sigma\mu}, \quad d_{l+3}^H = \frac{2\alpha_2 a_{1l}^H + 6\alpha_3 a_{2l}^H + 12\alpha_4 a_{3l}^H}{\sigma\mu} \quad (l = \overline{1, 3}),$$

$$d_l^\sigma = c_1^2 (4\alpha_1 a_{1l}^\sigma + 10\alpha_2 a_{2l}^\sigma + 18\alpha_3 a_{3l}^\sigma), \quad d_{l+4}^\sigma = c_1^2 (4\alpha_2 a_{1l}^\sigma + 10\alpha_3 a_{2l}^\sigma + 18\alpha_4 a_{3l}^\sigma) \quad (l = \overline{1, 4});$$

$$\alpha_i = \frac{r_1^i - r_0^i}{i}, \quad B_s^j(t) = c_1^2 \int_{r_0}^{r_1} W^j(r, t) r^s dr \quad (j = F, T; s = 1, 2),$$

$a_{i,1+4}^\Phi$, ($i = \overline{0, 3}$) – коефіцієнти, які виражають через геометричні параметри кулі та фізико-механічні характеристики її матеріалу [4].

Розв'язки систем (14) і (15) отримують за допомогою перетворення Лапласа за початкових умов (4) та (8), усереднених за радіальною координатою згідно з формулою (11).

Числовий аналіз результатів. Як приклад знайдено розв'язки задачі за умов дії ЕМІ на зовнішній поверхні кулі, який моделюємо функцією

$$H_\varphi^\pm(t) = kH_0 (e^{-\beta_1 t} - e^{-\beta_2 t}), \quad (16)$$

де β_1, β_2 – параметри, які відповідають часам фронтів наростання $t_{\phi.n.}$ і спадання $t_{\phi.c.}$ імпульсу; H_0 – максимальне значення напруженості магнітного поля в імпульсі; k – нормуючий коефіцієнт.

Числовий аналіз проведено для порожнистої кулі, виготовленої зі сталі X18H10T з внутрішнім $r_0 = 0,008\text{ м}$ і зовнішнім $r_1 = 0,01\text{ м}$ радіусами за умов дії ЕМІ (16) тривалістю $t_i = 10^{-4}\text{ с}$ і часом фронту наростання $t_{\phi.n.} = t_i/10 = 10^{-5}\text{ с}$ за відсутності силових навантажень на поверхнях кулі.

На рис. 1–7 показано залежності напруженості магнітного поля H_φ , пондеромоторної сили F_r , температури T , радіальної σ_{rr} та азимутальної $\sigma_{\varphi\varphi}$ компонент тензора напружень, а також інтенсивності напружень $\sigma_i = \sqrt{(3I_2 - I_1^2)/2}$, де I_1 та I_2 – перший і другий інваріанти тензора напружень, від часу t у кулі. Криві 1–3 на рис. 1–4 відповідають значенням обчислюваних величин на сферичних поверхнях $r_1 = 0,01\text{ м}$, $r_2 = 0,009\text{ м}$, $r_3 = 0,008\text{ м}$.

На рисунках видно, що за таких умов дії ЕМІ розподіли напруженості магнітного поля, теплових джерел, пондеромоторної сили та температури по товщині характеризуються зменшенням максимальних значень на внутрішній поверхні в 2–2,5 раза порівняно з максимальними значеннями на зовнішній поверхні кулі.

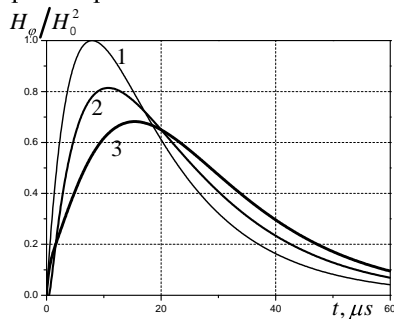


Рис. 1

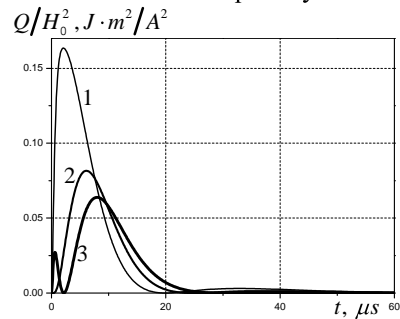


Рис. 2

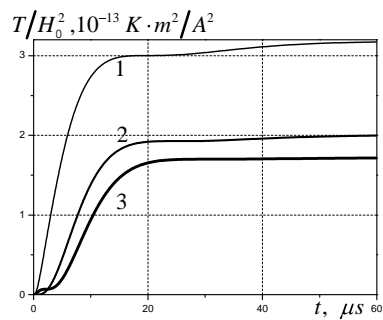
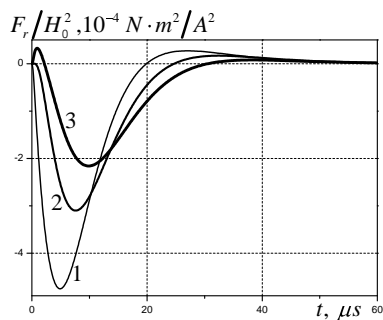


Рис. 3

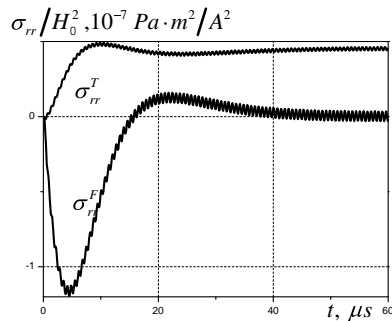


Рис. 4

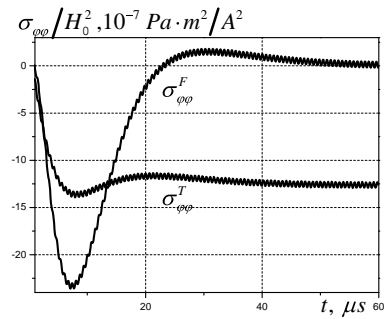


Рис. 5

Розподіли радіальних σ_{rr}^F та σ_{rr}^T напружень, показані на рис. 5, в часі якісно повторюють поведінку відповідних чинників: сили F_r та температури T і досягають максимальних значень приблизно на серединній поверхні порожнистої кулі. Напруження σ_{rr}^F є стискальними, а потім розтягальними і за час $0,5t_i$ дорівнюють нулеві, а напруження σ_{rr}^T є розтягальними і за величиною в 2,5 раза менші за максимальні стискальні напруження σ_{rr}^F . На рис. 6 показано зміну в часі колових $\sigma_{\varphi\varphi}^F$ при $r = r_0$ і $\sigma_{\varphi\varphi}^T$

Рис. 6

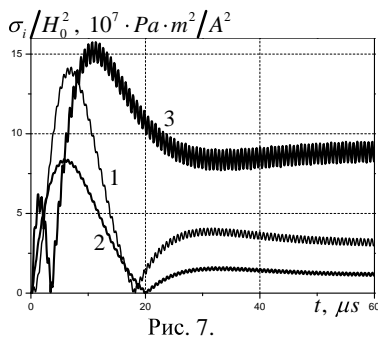


Рис. 7.

при $r = r_1$ напружень (на цих поверхнях вони максимальні). Видно, що колові напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^F$ і $\sigma_{\varphi\varphi}^T$ в кулі мають стискальний характер і є однакового порядку величини. Стискальні напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^F$ приблизно вдвічі більші за стискальні напруження $\sigma_{\varphi\varphi}^T$.

Зміна в часі інтенсивності сумарних напружень $\sigma_{jj}^F + \sigma_{jj}^T$, ($j = r, \varphi, \theta$) показана на рис. 7. криві 1–3 відповідають їхнім значенням на сферичних поверхнях $r = r_1$, $r = (r_1 + r_0)/2$, $r = r_0$. Макси-

мальні значення інтенсивності напружень досягають на поверхнях порожнистої кулі. На внутрішній поверхні кулі простежуються максимальні амплітуди осциляцій інтенсивності напружень. Отже, визначальний внесок у напружений стан порожнистої кулі, зумовлений дією поверхневого ЕМІ, вносять азимутальні $\sigma_{\varphi\varphi}$ та меридіанні $\sigma_{\theta\theta}$ напруження.

1. Улітко А.Т., Мольченко Л.В., Ковальчук В.Ф. Магнітопружність при динамічному навантаженні. К. – 1994.

2. Ковальчук В.Ф., Улитко А.Ф. Деформирование и движение проводящей сферы при погружении в магнитное поле // Известия АН СССР. Механика твердого тела. – 1986. – № 4. – С. 79–86.
3. Мусій Р. С. Динамічна центральносиметрична задача електромагнітно-термопружності для електропровідної сфери // Мат. методи та фіз.-мех. поля. 2002. Т. 45, № 1. С. 155–159.
4. Гачкевич А.Р., Мусій Р.С., Стасюк Г.Б. Термомеханическое состояние поллой электропроводной сферы при импульсном электромагнитном воздействии // Теоретическая и прикладная механика. Донецьк. 2005, – Вып. 40. – С. 9–17.
5. Стасюк Г.Б. Термонапружений стан довгого порожнистого електропровідного циліндра при односторонній нестационарній електромагнітній дії на поверхні // Конференція молодих вчених з сучасних проблем механіки і математики ім. академіка Я.С. Підстригача 24-26 травня 2004 р. С. 151–153.
6. Стасюк Г.Б. Термонапружений стан електропровідного порожнистого циліндра за умов азимутальної імпульсної електромагнітної дії // Проблеми корозійно-механічного руйнування, інженерія поверхні, діагностичні системи. Відкрита науково-технічна конференція молодих науковців ФМІ НАНУ, Львів, 2005 р., С. 282–285.
7. Гачкевич А.Р. Термомеханика электропроводных тел при воздействии квази-установившихся электромагнитных полей. – К., 1992.
8. Кнопфель Г. Сверхсильные импульсные магнитные поля. Методы генерации и физические эффекты, связанные с созданием импульсных полей мегаэрстедного диапазона. М., 1972.
9. Мусій Р. С. Ключове рівняння і розв'язок у напруженнях центральносиметричної динамічної задачі термопружності для сфери // Фіз.-хім. механіка матеріалів. 2002. Т. 38, № 1. С. 117–118.

**DYNAMICAL CENTRALSIMETRICAL TASK OF
THERMOMECHANICS FOR A HOLLOW ELECTROCONDUCTIVE
BULLET SUBJECT TO THE CONDITION SUPERFICIAL ACTION OF
ELECTROMAGNETIC IMPULSE**

Roman Musiy, Galina Stasyuk

*Lviv Polytechnic National University,
St. Bandera St. 12 79013 Lviv, Ukraine*

With the use of cube approximation the decision of dynamic centralsimmetrical task is got for a hollow bullet which is in the conditions of the superficial electromagnetic loading.

Key words: thermomechanics, electroconductive bullet, dynamic task.

Стаття надійшла до редколегії 20.02.2007
Прийнята до друку 19.11.2008